LED ON LINE
STUDI E RICERCHE

PARAFRASI SCHRÖDERIANE

ovvero

Ernst Schröder

LE OPERAZIONI DEL CALCOLO LOGICO

Testo originale tedesco
con traduzione italiana commentata e annotata
a cura di Davide Bondoni

LED
Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto

ISBN 978-88-7916-474-0

LED Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto
Via Cervignano 4 – 20137 Milano
Catalogo: www.lededizioni.com – E-mail: led@lededizioni.com

In copertina:
Karlsruhe Castle by Marcel Krüger
www.truebavarian.com

Stampa 2010: Digital Print Service

Indice

Alla mia cara famiglia,
a Giò,
ad una principessa lontana

Prefazione

Stanco mi appoggio or al troncon d'un pino
Ed or prostato ove strepitan l'onde,
Con le speranzie mie parlo e deliro.
(Ugo Foscolo)

Questo libro nasce dal progetto di redigere una traduzione con tedesco a fronte dell'*Operazioni del calcolo logico* del matematico tedesco Ernst Schröder. Tuttavia, traducendo il testo mi sono reso conto che una tale fatica senza un nutrito apparato notazionale sarebbe stata inservibile. Certo, avrei potuto scrivere un'introduzione anche di un migliaio di pagine e poi lasciare il lettore in balia delle vertigini schröderiane. Io penso che i problemi vadano risolti quando sorgono, al tempo e al luogo opportuno, a costo di essere pedanti ed intralciare la lettura. Del resto, questa è la prassi nell'edizioni di testi poetici. È comunque sempre possibile, in un secondo momento, rileggere l'intero libro senza note.

Qui nacquero subito i problemi. Come inserire queste annotazioni? Purtroppo il programma da me usato per redarre questo volumetto, il LaTeX3e, non consente l'introduzione di note in certi *ambienti* [environments], così ho optato per inserire queste annotazioni direttamente nel testo. Da qui il titolo del libro *parafrasi schröderiane*. Il riferimento è ovviamente al concetto di parafrasi in Franz Liszt. Prendiamo, per esempio, la sua *danza funebre* [Totentanz] [1]. Si tratta di una serie di variazioni sulla sequenza liturgica del *Dies Irae* gregoriano per pianoforte ed orchestra. Da dove salta fuori il titolo di *parafrasi*? Liszt interpola alle variazioni materiale originale e cadenze (alcune delle quali possono essere saltate dal pianista). Non si tratta, quindi, di un brano costruito secondo lo schema: prima parte del tema - ripetizione; seconda parte del tema - ripetizione; prima parte della prima variazione - ripetizione; seconda parte della prima variazione - ripetizione, ecc. Ma non si tratta neppure di una generica *fantasia*. *Parafrasi* sta ad indicare che si tratta di una traduzione per pianoforte ed orchestra, tesa a spiegare il significato del *tema* originario.

Ecco. Questa era l'idea: interpolare al testo schröderiano delle cadenze che

[1] L'espressione usuale di *danza macabra* non rende conto del carattere della musica, suggerendo altre danze macabre, meramente virtuosistiche o grottesche.

aiutasssero nella comprensione di un testo molto compresso con delle appendici, volte ad inserire, come una gigantesca coda, il libro in un opportuno contesto.

Convenzioni

L'originale paginazione e paragrafazione di Schröder sono state rispettate, esattamente come i rientri, la posizione delle immagini e il layout generale (mi riferisco alla presentazioni anche solo delle formule, ognuna affiancata dal suo duale e separata da esso da una linea verticale). La traduzione italiana si modella sul testo originale; ad ogni pagina tedesca, corrisponde una pagina italiana; così come ad ogni paragrafo tedesco, ne corrisponde uno italiano, rispettando anche i rientri. Il tutto per facilitare l'orientamento del lettore. Nella sezione italiana ho usato dei simboli e un vocabolario moderno, sempre per facilitare la comprensione. In pratica, ho sostituito alle originarie operazioni schröderiane le moderne operazioni insiemistiche di $\cap$ (intersezione), $\cup$ (unione), $-$ (negazione, o complemento) e ho fatto uso della notazione moderna per la classe vuota $\emptyset$ e per la classe totale V.

Il calcolo logico qui introdotto rivela una struttura booleana, costituendo un reticolo orto-complementato e distributivo $\mathfrak{A} =< V, \cap, \cup, -, \emptyset, V >$.
Sfortunatamente, il LaTeX3e non permette di scrivere un libro con testo a fronte, il che ha comportato di mettere prima tutto il testo tedesco e poi quello italiano. A margine del testo ho indicato la numerazione di pagina originaria, sia nella parte tedesca che in quella italiana. Tuttavia, il testo è stato concepito in maniera parallela al testo originario e il lettore dovrebbe leggere contemporaneamente entrambe le versioni, dato che si supportano a vicenda.

Nell'originale, Schröder non seziona il libro, salvo a parlare di 4 generici paragrafi. Per il resto, il testo scorre come un flusso di coscienza fino alla fine. I nomi di queste nuove sezioni sono stati messi in parentesi quadre ad indicare che non sono dell'autore. In pratica, abbiamo, una [Vorrede], e poi all'interno dei paragrafi schröderiani abbiamo ottenuto i capitoli e sezioni seguenti:

- Paragrafo 1
  - [Einleitung]
    - [Die vier Grundoperationen]
    - [Dualismus]
    - [Die Negation]

- Paragrafo 2
  - [Der Logikkalkul]
    - [Grundsätze]
    - [Logische Multiplikation und Addition]
    - [Null und Eins]
    - [Axiome]
    - [Theoreme]

[Entwicklung eines Ausdrucks]
[Schröders Gesetz]
[De Morgans Gesetze]
[Das Auflösungsproblem]
[Über das Hauptsatz 20]
[Ein Theorem von R. Grassmann]

Paragrafo 3
[Über ein Problem von Boole]
[Zweite Antwort]
[Erste Antwort]
[Dritte Antwort]
[Vierte Antwort]

Paragrafo 4
[Die inverse Operationen]
[Distributiongesetz und Subtraktion]
[Arithmetik]
[Noch etwas über die Entwicklung eines Ausdruckes]

Come si vede facilmente, l'ossatura esterna del testo di Schröder in paragrafi è stata mantenuta, salvo che nel paragrafo 2, dove ci siamo permessi di dedicare un capitoletto al problema della soluzione, data la sua estrema importanza. I nomi dati, sono puramente evocativi. Dal punto di vista filologico non ha alcun senso parlare nelle *Operazioni del calcolo logico* di *legge di Schröder*; tantomeno, di *leggi di de Morgan*. Queste indicazioni servono puramente ad un uno scopo mnemonico, nell'idea che questo libro venga *usato* e non semplicemente *letto*.

Per quanto riguarda le altre convenzioni usate, come appena detto, indicazione di inizio pagina e di inizio paragrafo sono indicate a margine. Per precisione, la fine esatta di ogni pagina è contrassegnata da un trattino verticale |. Per esempio,

> bekannt|lich,

segnala che la seconda pagina (S. 2) è finita a *bekannt-* e la terza (S. 3) inizia a *lich*. Il segno || evidenzia, invece, la conclusione di uno dei paragrafi originari. Esempio:

> Disciplin des Logikkalkuls, zu deren Darstellung wir jetzt schreiten [2]. ||

Le mie inserzioni sono segnalate dall'uso di parentesi quadre [ ], mentre del testo che per una serie di ragioni è stato cassato è stato messo tra parentesi angolate ⟨ ⟩. Le interpolazioni, invece, sono state inserite in parentesi uncinate ⌈ ⌋. Tutte le note sono mie, salvo indicazione diversa. Così, come sono mie tutte le traduzioni, salvo

[2] Seite 4.

diversamente segnalato.

Le doppie virgolette „ "sono state sostituite dal corsivo. Per esempio,

„Klassen von Zeittheilen" [3]

è diventato *Klassen von Zeittheilen*. Parimenti,

„*Absorptionsgesetz*" [4]

è stato semplificato con un semplice corsivo *Absorptionsgesetz*. I riferimenti al testo di Schröder si riferiscono sempre alla paginazione originale. Solo nel caso dell'elenco dei risultati a fine libro ci si riferisce alla pagina di *questo* volumetto.

Le figure sono state tratte dall'originale e mantenute anche nella parte italiana, sebbene in questo luogo le lettere sarebbero state da correggere. Confidando nella comprensione del lettore, ho scelto di mantenere quelle di Schröder, piuttosto che alterare visivamente il testo con immagini create con moderni programmi di grafica.

Nei limiti dei possibile, ho cercato di trovare e citare tutti i riferimenti, in modo che il testo potesse essere autosufficiente. In questo modo ho agito anche nelle appendici. Per esempio, nell'Appendice G, Frege si riferisce a delle formule della sua *Begriffsschrift* senza indicarle. Ho provveduto a cercarle ed a inserirle. Nel caso di Frege, ho tradotto in un linguaggio moderno la sua ideografia. Mi rendo conto che questa scelta farà storcere il naso a molti, ma questo libretto è dedicato alla comprensione di Schröder, non di Frege. Introdurre tutto il suo formalismo avrebbe comportato di dilatare troppo la parte a lui dedicata e di creare confusione circa il reale oggetto del mio lavoro. Per lo stesso motivo, le appendici non presentano note, salvo eccezioni. Appunto, per far convergere l'attenzione sulle *Operazioni del calcolo logico*.

Veniamo adesso al titolo del libro di Schröder, *Der Operationskreis des Logikkalkuls* che noi abbiamo deciso di tradurre con le *Operazioni del calcolo logico*. Anzitutto, il riferimento ai moderni connettivi sarebbe stato fuori luogo, in quanto l'autore tedesco non distingueva tra *operazioni* e *connettivi*. Per esempio, per Schröder, l'espressione $a \subseteq b$ può anche avere il significato di $a \to b$. Rimaneva da rendere in italiano *Kreis*. In un primo momento, sulla scia di Volker Peckhaus, io tradussi *La sfera operazionale del calcolo logico* [5], intendendo con *Kreis* l'ambito delle operazioni di questo calcolo. D'altra parte, in questo libretto non si può dire che si sia compiuta un'analisi del dominio di applicabilità o di azione delle operazioni logiche. Ci si è limitato ad esporre le operazioni dirette e a dedurre da queste quelle indirette. Anzi, il dominio (nel senso stretto della parola) più che essere definito viene lasciato sullo sfondo. Quando Schröder indica l'oggetto del suo lavoro:

---

[3] Seite 1.

[4] Seite 12.

[5] Vedi [**Bon07**].

> Gegestand der logische Operationen sind Buchstaben, welche (...)
> als *Klassensymbole* zu bezeichnen sind [6].

Schröder non specifica da dove saltino fuori queste classi. Si devono trarre da un dominio ben specificato in anticipio [in advance]? Ovviamente, sì e dal discorso si *intuisce*, ma non viene indicato. A questo punto, *Kreis* poteva solo indicare un *insieme, gruppo* [7] di cose che hanno un qualcosa in comune. Per fluidità, ho scelto di cassare l'espressione e di parlare di *operazioni del calcolo logico*, intendendo con ciò l'insieme di tali operazioni.

Per quanto riguarda le scelte di traduzione dei singoli vocaboli, rimando al testo; ad ogni modo, come accennato, ho tradotto *Produkt* e *Summe* con *intersezione* ed *unione*, rispettivamente, traducendo insiemisticamente le operazioni schröderiane. Ancora, l'autore si occupa del testo non di classi, ma, come appena citato, di *simboli* di classe. La sua non è una *Formelsprache* [linguaggio formale, o per formule] come quella di Frege, ma una *Zeichensprache*, un linguaggio di segni. In questo senso, molti passaggi potrebbero essere letti à la Hilbert (tenuto conto delle ovvie differenze). Tuttavia, Schröder non è consistente nel testo e talvolta parla di *classi* tout-court. È ovvio che anche in questi casi, Schröder si riferisca ai segni delle classi e non alle classi stesse: si tratta di un abuso di linguaggio. In alcuni punti cruciali abbiamo corretto in italiano l'autore, ma generalmente abbiamo mantenuto la sua ambiguità.

Il simbolismo di Schröder

Piuttosto che creare un indice analitico in cui trovare il primo punto nel testo in cui sono introdotti per la prima volta dei simboli, preferisco riunirli qui in anticipo nelle Tabella 1 e 2 [8], sperando che possa servire da facile rimando.

Soffermiamoci un attimo su questo riquadro. Riguardo all'utilizzo, per esempio dello 0 si legga questa condizione di valenza:

$$a_1 b = 0\,^9,$$

dove a, b sono generici simboli di classe. Come legge tale espressione l'autore? Come *è falso che* $a_1 b$, ovvero $\not\models a_1 b$ (è falso che non-a sia intersecato a b). Ciò equivale a *è vero che* $b_1 + a$, ossia, $b \subseteq a$. Infatti, $b_1 + a$ corrispondono, leggendo $+$ come connettivo $\vee$, al condizionale $b \to a$, che, equiparando $\to$ a $\subseteq$, vale $b \subseteq a$. Si noti che siamo partiti da una lettura aritmetica, siamo passati per la logica, per finire in teoria degli insiemi. Spesso, nel testo sarà sottointeso questo passaggio. Il che non nega, che talvolta 0 venga usato proprio come 0, cioè come elemento neutro dell'addizione come in $a + 0 = a$, o come infimo in $aa_1 = a$.

---

6 SS. 1-2.

7 [**Dud07**, p. 1016, alla voce *Kreis*, punto 4].

8 Vedi pagine seguenti.

9 Formula 24d, S. 29.

elenco dei simboli	
1	*Eins*, il supremo del reticolo o classe totale, talvolta usato come numero 1 o come valore di verità *vero*
0	*Null*, l'infimo del reticolo o classe vuota, talvolta usato come numero 0 o come valore di verità *falso*
$a, b, c \ldots$	*Klassensymbole*, simboli di classe
a_1	*Ergänzung*, il complemento della classe a
$a \cdot b$ o ab	*Produkt*, intersezione delle classi a e b

TABELLA 1

Considerazioni finali

Non credo che questa sia la sede più adatta per discutere del pensiero di Schröder, essendo lo scopo di questo libricino limitato alla mera traduzione di un testo importante per la storia della logica. Tuttavia, ritengo che sia fondamentale affrontare questo lavoro partendo dal problema della soluzione. Kolmogorov, per esempio, nel primo volume della sua storia della matematica considera Schröder esclusivamente sotto questo aspetto [**KY01**, pp. 27–34]. Si vedrà, infatti, nel testo come il teorema 14 e l'*Haupttheorem* 20 ricorrano in maniera ostinata per tutte le righe, come un'idea fissa di *berloziana* memoria.

D'altra parte, il fatto che lo Schröder sia un autore molto noto, ma poco studiato, ha comportato che non avessi molti testi di riferimento o persone con cui discutere di questo o di quell'aspetto. Per questi motivi, qualcuno potrebbe obiettare che il mio libretto è una sorta di supermercato in cui vengono esposte le cose più diverse. In un certo senso, questo è anche vero. In mancanza di una *stella polare* che mi indirizzasse verso il giusto cammino, nelle note, mi sono limitato a segnalare quello che per me in quel momento era rilevante. Così, vi sono delle note linguistiche, storiche, concettuali, spunti, ecc. Nei limiti delle mie possibilità, ho cercato fin dove ho potuto i riferimenti, arrivando fino all'opera di Brook Taylor *Methodus incrementorum directa & inversa* [**TayXV**] o alla prefazione di Peano al

elenco dei simboli	
$a + b$	*Summe*, unione delle classi a e b
$=$	*Gleichheit*, simbolo di identità, talvolta usato come bi-implicazione o come mutua inclusione
$a \div b$	*volldeutige Subtraktion*, differenza completa della classe a con b
$a :: b$	*volldeutige Division*, divisione completa della classe a per la classe b
$a - b$	*eindeutige Subtraktion*, oder *Minimaldifferenz*, differenza univoca della classe a con la classe b
$a : b$ o $\frac{a}{b}$	*eindeutige Division*, oder *Maximalquotient*, divisione univoca di a per b
f	generico simbolo di funzione
ω	generico funzionale

TABELLA 2

testo sul calcolo differenziale di Angelo Genocchi.

Sono assenti molti riferimenti all'esigua letteratura su Schröder [10]. In verità,

[10] Per questo rimando al mio [**Bon07**]. Nella bibliografia ho ritenuto opportuno inserire tutti i testi scritti dall'autore tedesco nella sua breve vita. Ogni sua riga (escluse le lettere) risulta essere in mio possesso, comprese le parti forse non scritte da lui, come [**Sch84b**] o [**Sch84a**], semplici correzioni a testi precedenti, come [**Sch71a**] o [**Sch90a**], note [**Sch01**], ecc. Il lettore si trova qui esposto, quindi, tutto il materiale possibile di Schröder. Per trovare i testi, mi sono riferito a [**Lür02**, pp. 263–265], correggendo le sviste, gli errori di data e presentando i riferimenti in una veste più moderna. In particolare, Lüroth indica come data di un lavoro, non la data di pubblicazione, ma la data in cui Schröder sottomise alla rivista o alla casa editrice il testo. Questo può essere fuorviante, nel momento in cui si cerchi il volume di una rivista in base all'anno. Il caso di [**Sch82**] presenta poi una sua singolarità. Se si cerca nell'*Archiv der Mathematik und Physik* alla pagina 353 il testo schröderiano, come indica Lüroth, non lo si trova. In realtà, il contributo di Schröder si trova sì alla pagina 353, ma del quarto fascicolo della rivista. Da notare che ho trovato e sono in possesso di due ulteriori articoli finora sconosciuti e di cui Lüroth non parla: [**Sch88b**] e [**Lov01**].

non ne ho fatto alcun uso, in quanto o non pertinenti al testo in esame, o eccessivamente generici. D'altra parte, il fatto di essere alieno dal mondo universitario mi ha permesso una certa libertà di espressione e il non dovere sottostare a canoni rigidi (peraltro, corretti). Così, questo, più che essere il lavoro di un professionista, è il lavoro di un amatore, non di uno scienziato, ma di un curioso. Io spero che le mie osservazioni, anche se fuori luogo o scorrette, possano indirizzare lo studioso verso la via corretta o, nel peggiore dei casi, muoverlo al riso.

In ogni caso, anche prescindendo dalle mie annotazioni o interpolazioni, il testo di Schröder (originale) rimane e torna a circolare. Cosa che penso sia comunque meritoria.

Acknowledgements

I thanks very much dt. Waltraud Götschel of the *Universitätsbibliothek* in Bayreuth for a copy of [**Sch74b**], dt. Miriam Carbogno of the *Universitätsbibliothek* in Bern for the copies of [**Sch90b**] and [**Sch67**], dt. Yvonne de Wit of the *University of Amsterdam* for a reproduction of [**Sch74a**] and dt. Robert Trusch of *Naturwissenschaftlicher Verein Karlsruhe* for a copy of [**Sch88b**]. Finally, I am indebted for the picture of Karlsruhe's castle to Marcel Krüger: thanks of all. I hope that you could enjoy the reading of this booklet.

Ringraziamenti

Non posso che volgere i miei più sentiti ringraziamenti al popolo del web, che, digitalizzando lavori insigni, mi ha permesso di accedere a testi di difficile reperibilità, come [**Boe76**]. Un sentito ringraziamento va alla mia famiglia, per la sua capacità di sopportarmi, in particolare a mia mamma, a cui affidai il compito di verificare quanto suonasse *italiana* la mia traduzione, a mia zia Olimpia per il suo sostegno, al prof. Gianluigi Nobili con il quale ho condiviso gran parte del mio percorso esistenziale e al quale debbo molto, non fosse altro che per la sua stima nei miei confronti e a Valeria Passerini che mi propose la pubblicazione di un nuovo libro per la LED.

Possa quanto segue esser di diletto e curiosità,

Anfo, 17 Agosto 2010,
davide bondoni

Der Operationskreis des Logikkalkuls (1877)

Ernst Schröder

[Vorrede]

Obwohl schon nahe ein Vierteljahrhundert verflossen ist, seit das von Leibniz [11] aufgestellte Ideal eines Logikkalkuls durch George Boole erst in zwei vorgängigen Schriften [12] und dann in seinem Hauptwerke [13] eine Verwirklichung gefunden hat, scheint doch der neunen Schöpfung so weniger Beachtung und fernere Pflege zutheil geworden zu sein, dass die kurzen Notizen von Cayley [14] und von A.J. Ellis [15], sowie eine, wie es scheint unabhängige Bearbeitung derselben Materie von Robert Grassmann [16] so ziemlich die einzige Schriften sein dürften, in welchen auf diese ernstlich Bezug genommen worden ist. Seite III

Einen Grund dieser Erscheinung erblicke ich darin, dass die Bool'sche Theorie selbst noch an gewissen Unvollkommenheiten leidet. Als den gewichtigsten der Mängel, welche mir an dieser immerhin bewundernswerthen und überdies höchst anziehend von ihm dargestellten Methode Boole's bemerklich geworden sind, will ich im voraus nur das eine anführen, dass Boole zur Lösung seiner Probleme ein dem Wesen der Sache völlig *fremdartiges* Element in die Untersuchungen mit hereinzieht. Als solche nämlich muss ich [mit einer Ausnahme zugunsten der Symbole 0 und 1, welche allein auch in dem Kalkul der Logik ein Heimatsrecht nicht abzusprechen ist] [17] den ganzen Ballast der *algebraischen Zahlen* instellen. Die herbeiziehung dieser letzteren hatte in der That zur Wirkung, dass auf die Interpretabilität der einzeln Schritte bei Boole verzichtet und im allgemeinen mit logisch

[11] Man vergleiche über diese und verwandte Bestrebungen älteren Datums die reiche Quellenangaben in [**Tre67**, SS. 1–63] [Si veda per questi e tentativi simili di vecchia data la ricca fonte di informazioni in [**Tre67**, pp. 1–6]. NdA. Schröder si riferisce ai primi due capitoli dell'opera di Trendelenburg, ovvero *Ueber Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik* [**Tre67**, pp. 1–47] [Sul progetto leibniziano di una [lingua] caratteristica generale] e *Ueber das Element der Definition in Leibnizens Philosophie* [**Tre67**, pp. 48–62] [Sul concetto di definizione nella filosofia di Leibniz]. Come si può vedere, questi capitoli si riferiscono al cosiddetto *sogno di Leibniz* e non costituiscono una storia della logica, nemmeno parziale.

[12] [**Boo47**] und [**Boo48**]. NdA.

[13] [**Boo54**]. NdA.

[14] [**Cay71**]. NdA.

[15] [**Ell73**]. NdA.

[16] [**Gra72a**]. NdA.

[17] Le parentesi sono dell'autore.

durchaus nicht deutungsfähigen Symbolen wie $2, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{0}$ [18] gerechnet werden muss. Während es eine hoffnungslose Aufgabe bleibt, sich die Bedeutung der dabei voll führten Zwischenoperationen einzeln zum Bewusstsein zu bringen, sieht man sich auf eine überraschende aber den Geist nicht befriedigende Weise zu dem erwünschten und allerdings in seiner Art richtigen Resultate geleitet.

Jenes wird man zwar bei jedem Rechnen mehr oder weniger unterlassen, indem eben darin, dass der Geist für eine Weile davon dispensirt wird, sich die Dinge, um die sich die Untersuchung dreht, selbst gegenwärtig zu halten, der Hauptvortheil und die Erleichterung besteht, die das Rechnen gewährt. Allein die Möglichkeit wenigstens, | jeden Schritt mit der Anschauung zu controlieren, wird man verlangen müssen, wenn auch von Durchführung der Controle der Complikation wegen gerne Umgang genommen wird; an eine vollkommene Methode wird man m.a.W. die Anforderung stellen, dass sie fähig sei, ihre elementaren Operationen Schritt vor Schritt, und nicht blos das Ganze derselben durch den Erfolg, zu rechtfertigen.

Seite IV

Wenn ich auch nicht verkenne, dass gerade das Wagniss, gewisse anfänglich sinnlos erscheinende Symbole - wie $\sqrt{-1}$- in der Algebra zur Verwendung zu bringen, diese Disciplin oft wesentlich gefördert hat, so glaube ich dagegen, dass im vorliegenden Falle in der Rückkehr vom abstrusen Künstlichen zum einfachen Natürlichen und durchaus interpretabeln ein Fortschritt liegen wird, und schreibe ich die unnöthige Herbeiziehung des abstrusen Elementes historisch nur dem Umstande zu, dass der Urheber der neuen Disciplin sich noch nicht vollständig genug von den Regeln der Arithmetik loszusagen vermochte, die für die inverse Operationen der Logik nun einmal nicht gelten.

Die erwähnte und auch noch andere gelegentlich zur Sprache kommende Unvollkommenheiten zu beseitigen, zugleich aber auch in der nunmehr dafür erreichbaren vollendeteren Gestaltung ein completes Bild des ganzen merkwürdigen, auch in formaler Beziehung hochinteressanten Operationskreis der deduktiven Logik dem deutschen Leserkreise vorzuführen, ist nun der Hauptzweck der vorliegenden Schrift.

Durch die hier eingeschlagen Behandlungweise wird schon die Länge und mehr noch die Mühsamkeit der bei Problemen selbst erforderlichen Zwischenrechnungen merklich verringert; besonders aber wird der ganze Aufbau der Theorie erforderliche Apparat so wesentlich vereinfacht, dass dabei nicht die geringsten mathematischen Vorkenntnissen, selbst das Einmaleins nicht mehr, vorausgesetzt zu werden brauchen. Um freilich diese so durchaus elementare Theorie auch für Nichtmathematikerverständige geniessbar zu machen, müsste ich - wie ich es in der That einmal zu verwirklichen hoffe - eine Exposition derselben geben, welche der Boole'schen an Ausfürlichkeit einigermassen gleickäme. In Hinsicht auf den Formalismus des Kalkuls und dessen Begründung glaube ich, der nachfolgend dargestellten Theorie jetzt die äusserste erreichbare Einfachheit und Vollendung

[18] Si veda alla fine della S. 30.

vindiciren zu können - ein Ziel, zu dessen Verwirklichung es allerdings, nach der von Boole geleisteten Vorarbeit, nurmehr noch weniger ziemlich nahe liegender Wahrnehmungen bedurfte, auf welche lediglich wegen ihres Erfolges Gewicht zu legen sein möchte. |

Im folgenden gebe ich nun einen Ueberblick über die Operationen des Logikkalkuls und deren Gesetze, und zwar von einem Standpunkte, auf welchem die Kenntniss des Boole'schen Werkes *nicht* vorausgesetzt wird. Der varänderte Standpunkt bedingte, dass, während von den durch Boole aufgestellten Sätze ein grosser Theil beibehalten werden konnte, doch die Beweise durchweg durch ganz andere ersetzt werden mussten, deren einige man ähnlich bei Rob. Grassmann finden wird. Wenn aber Herr Grassmann in sachlicher Hinsicht auch ganz den richtigen Weg betreten hat, so ist er doch auf diesem nicht weit genung gegangen, nämlich jedenfalls nicht so weit fortgeschritten, um dieselben Aufgaben, wie Boole, lösen zu können und dessen unnöthig verwickelten Apparat definitiv entbehrlich zu machen. Seite V

In §1 und 2 [hier, (Einleitung) und Kapitel 1 (Der Logikkalkul)] beschränke ich mich auf die concise Darstellung derjenigen Untersuchungen, welche zur bequemen Lösung der allgemeinen Aufgabe des Kalkuls erforderlich und hinreichend sind, um dann in §3 [Kapitel 3, Über ein Problem von Boole] sogleich die Kraft der Methode an der complicirtesten von Boole gestellten Aufgabe zu erproben.

Auf eine andere (immerhin untergeordnete) Anwendung des Logikkalkuls, nämlich auf die Herleitung der *Syllogismen* der alten Logik, hier näher einzugehen, unterlasse ich, damit die gegenwärtige Publikation nicht zu umfangreich werde und hiermit ferenere Verzögerungen erfahre; doch gedenke ich auf diese in einer eigenen Schritt zurückzukommen, in welcher sich zeichen wird, dass denselben eine hinreichend gründlich Bearbeitung noch nicht zutheil geworden ist.

In §4 [Die inverse Operationen, Kapitel 4] gebe ich sodann Betrachtungen, welche mehr zur Auschmückung des Baues dienen sollen, zum Theil jedoch auch nöthig sind, um gewissermassen die Dinge aus dem bisherigen in ein besseres Geleise zu bringen, um nämlich die Verbindung zwischen Boole's und meiner Behandlungsweise herzustellen, und begründe ich namentlich eine correkte Theorie der beiden inversen Operationen, durch welche die vier Species ihre Ergänzung finden.

Karlsruhe, im März 1877.

Der Verfasser. |

[Einleitung]

Wenn wir uns der gebräulichsten Eintheilung anschliessen, wonach die Lehre §1, Seite 1
von den *Begriffen*, den *Urtheilen* und den *Schlüssen* den Vorwurf der (deduktiven) Logik überhaupt ausmacht, so charakterisirt es insbesondere die *mathematische Logik* oder den *Logikkalkul*, dass darin die Begriffe oder auch die Urtheile allgemein durch *Buchstaben* dargestellt und die Schlussfolgerungen in Gestalt von *Rechnungen* bewerkstelligt werden, die man nach bestimmten einfachen Gesetzen an diesen Buchstaben ausführt.

Einen ersten Theil des Logikkalkuls bildet demgemäss [1] die *Rechnung mit den Begriffen*; durch sie gelingt es, diejenigen Schlüsse zu vollziehen, deren Prämissen und Conclusionen *Urtheile der ersten Klasse*, nämlich solche Urtheile sind, in denen *von den Dingen selbst etwas ausgesagt* wird - gemeinhin kategorische Urtheile.

Der zweite Theil umfasst das *Rechnen mit den Urtheilen* und vermögen durch ihn diejenigen Untersuchungen ihre Einkleidung zu finden, bei welchen *über unsere Behauptungen* von den Dingen *geurtheilt* wird hinsichtlich der Art und Weise, wie die Wahrheit oder Unwahrheit der einen abhängig erscheint von denen der andern - Beziehungen also, welche in der Regel ihren sprachlichen Ausdruck finden in Conditionalsätzen, in hypothetischen und disjunktiven Urtheilen, denen wir den Namen von *Urtheilen der zweiten Klasse* mit Boole beilegen wollen.

Während in beiden Theilen die Rechnung nach denselben Gesetzen vor sich geht, ist nur die Interpretation der Formeln in jedem derselben eine andere. Indem wir deshalb zunächst nur dem ersten derselben unsere Aufmerksamkeit zuwenden, werden wir finden, dass hernach der andere Theil durch eine einfache Bemerkung sich miterledigt, die nämlich - um es gleich vorweg zu sagen - , dass man unter den Buchstaben, welche die Urtheile vorstellen, statt dieser lediglich die Zeiten (oder *Klassen von Zeittheilen*) zu setzen braucht, während welcher sie bezüglich wahr sind, um sofort die Untersuchung zu einer dem ersten Theile des Logikkalkuls angehörigen zu stempeln.

Gegestand der logischen Operationen sind Buchstaben, welche - in dem genannten ersten Theile - als *Klassensymbole* zu bezeichnen | sind. Unter einem Seite 2
Buchstaben, wie a, verstehen wir nämlich hier stets eine *Klasse* oder *Gattung* von Objekten des Denkens. Der sprachliche Ausdruck einer solchen ist in der Regel

[1] Cioè, in base alla sopra menzionata articolazione della logica.

ein *Gemeinname* und gibt zugleich Veranlassung zur Bildung eines *Begriffes*, in welchem wir uns die wesentlichen Merkmale, die allen zu der Gattung gehörenden Individuen gemeinsam sind, zusammengefasst denken. Im Gegensazt zu diesen Merkmalen, dem sogenannten *Inhalte* der erwähnten Begriffes, stellt dann die Klasse selbst dessen *Umfang* vor, sodass wir in Gestalt dieser Klassensymbole in der That mit den hinsichtlich ihres Umfanges dargestellten Begriffen rechnen werden.

Die Individuen einer solchen Gattung können übrigens auch ganz beliebig aus der Mannigfaltigkeit des Denkmöglichen [2] herausgegriffen werden und ausser dem Zufall, der unsere Wahl auf sie fallen lässt, keine übereinstimmenden Merkmale verrathen.

Die Zahl der in der Klasse enthaltenen Individuen kann begrenzt oder unbegrenzt sein; die Klasse kann sich auch auf ein einziges Individuum reduciren, in welchem Falle also das Klassensymbol a einen *Eigennamen* vertritt.

1. [Die vier Grundoperationen]

Auch in dem Kalkul der Logik gibt es, wie in der Arithmetik, 4 *Species* oder Grundrechnungsarten, welche jedoch, wie sich zeigen wird, *endgültig* auf *drei* verschiedenartige Elementaroperationen reducirt werden können. *Nichts hindert, jene 4 Grundoperationen mit denselben Namen zu benennen und mittelst derselben Rechenzeichen auszudrücken, wie sie in der Arithmetik gebräulich sind.* Ist doch der Gegenstand der Operationen beidemal ein ganz anderer - dort sind es Zahlen, hier aber beliebige Begriffe! Sollte freilich der Logikkalkul speciell auf arithmetische Probleme angewendet werden, so müssten die arithmetischen Operationszeichen durch irgend eine kleine Abänderung, z.B. durch Einklammerung, von der logischen unterschieden werden.

Ausserdem führt aber eine jede der logischen Operationen noch einen besonderen in der Philosophie oder in der Grammatik schon eingebürtigen Namen, und will ich zuerst unter Anführung dieser zwiefältigen Benennung eine Ueberblick der 4 Grundoperationen geben, indem ich mir vorbehalte, eine jede im einzelnen noch genauer zu erklären; sie sind

1. Die *Multiplikation*, gennant Determination	1d. Die *Addition* oder collektive Zusammenfassung (*Collektion*)
2. Die *Division* oder *Abstraktion*	2d. Die *Subtraktion* oder *Exception* (Ausschliessung).

In der Arithmetik besteht zwischen den gleichnamigen Operationen eine be-
Seite 3 stimmte Rangordnung oder *Stufenfolge*, und pflegt man bekannt|lich die Addition und Subtraktion als die Operationen der ersten Stufe, die Multiplikation und Division als Operationen der zweiten Stufe zu bezeichenen. Diese aber ist nicht etwa

[2] Qui Schröder intedende *forse* l'universo di discorso booleano. Il perché di questo 'forse' verrà chiarito in seguito.

willkürlich, sondern in der Natur der Sache begründet, insofern man den Begriff der Multiplikation und ihrer umgekehrten Operation erst dann zu erklären fähig, die Gesetze derselben erst abzuleiten im Stande ist, nachdem man sich mit dem Begriff und den Gesetzen der Addition und Subtraktion hinlänglich vertraut gemacht hat.

Obwohl es bequem ist, diese Eintheilung der vier Operationen zwei Stufen auch in dem Logikkalkul als Ausdrucksweise beizubehalten, ist doch eine bestimmte Rangordnung hier sachlich nicht gerechtfertigt, und stelle ich, um dies hervortreten zu lassen, die Multiplikation mit Absicht der addition voran.

2. [Dualismus]

Dagegen läss sich zwischen den logischen Operationen der beiderlei Stufen eine durchgreifende Analogie erkennen und findet sich weiter unten der Nachweis geleistet, dass zwischen beiden Paaren von Operationen sogar ein vollkommener *Dualismus* besteht, den wir als (empirisches) Prinzip [3] so formulieren können:

DUALISMUS. *Aus jeder in der Logik geltenden allgemeinen Formel muss sich wiederum eine richtige Formel ergeben, wenn man die plus- und minus- Zeichen durchweg mit Multiplikations - und Divisionszeichnen und ausserdem die Symbole* 0 *und* 1 *mit einander vertauscht.*

Würde man die Zeichen 0 und 1 als der *Moduln* der beiden direkten Operationen durch die Namen $\mu_\times$ und μ_+ ersetzen, desgleichen das Subtraktions- und Divisionszeichnen bezüglich durch $(:)_\times$ und $(:)_+$, so würde das dualistische Princip in dem noch einfacheren Satzen seinen Ausdruck finden, dass es gestattet ist, die Zeichen der Multiplikation und der Addition durchgängig zu vertauschen.

Ich werde diesen Dualismus dadurch zum Ausdruck bringen, dass ich die dual einander entsprechenden Formeln und Sätze jeweils nebeneinander stelle - so oft ich wenigsten es verlohnend finde, sie beide anzuführen; ich werde ferner solche Sätze stets mit der gleichen Ziffer *n* als *n* und *nd* numerieren - jedoch *nd* nicht immer ausdrücklich anführen - so dass mit dem ⟨unaccentuirten⟩ *n* nur ein solcher Satz numerirt erscheinen kann, der dual sich selbst entspricht - wie dieses weiter unten züfallig blos bei 7, 11, 12, 13 und 32 der Fall sein wird. So oft das duale Gegenstück zu interessant erscheint um ganz übergangen zu werden, aber gleichwol für die praktischen Ziele des Kalkuls nicht wesentlich ist, soll es in eckige Klammer gesetz werden. |

3. [Die Negation]

Seite 4

Will man nur auf das durchaus nothwendige sich beschränken, so kann man noch der beiden inversen Operationen (Division und Subtraktion) in Logikkalkul, wie schon gesagt, entrathen. Diese Elementaroperationen werden nämlich von

[3] Auf die innere Nothwendigkeit diese Princips habe ich schon [**Sch73**, S. 146] aufmerksam gemacht [Io avevo già evidenziato l’intima necessità di questo principio in [**Sch73**, p. 146]]. NdA.

vornherein entbehrlich gemacht durch eine fünfte zu sich selbst duale, die in der Bildung des contradiktorischen Gegentheils besteht und

3. *Opposition* oder *Negation*

zu nennen sein möchte. Diese Operation, welche wir später in dem Lichte eines gemeinsamen Specialfalles der Subtraktion und Division erblicken werden, ist von einfacherer Natur als die übrigen, indem bei ihr nur *eines*, bei den anderen aber *mehr* als ein Operationsglied als gegeben vorausgesetzt werden muss. Sie bildet mit der Multiplikation und Addition zusammen die *drei definitiven* Grundoperationen der nach Möglichkeit vereinfachten Disciplin des Logikkalkuls, zu deren Darstellung wir jetzt schreiten. ||

KAPITEL 1

[Der Logikkalkul]

Indem ich nunmehr die wesentliche *Definitionen, Axiome* und *Sätze* des Logikkalkuls samt den dazu gehörigen Beweisen zusammenstellen, halte ich für gut, noch ein Paar Bemerkungen voraufzuschicken. §2

Sämtliche Theoreme unserer Disciplin sind *intuitiv*; sie erscheinen, sobald sie zum Bewusstein gebracht werden, als unmittelbar einleuchtend, und deshalb könnten auch als Axiome hier angeführten Behauptungen mit einer gewissen Berechtigung als Folgerungen hingestellt werden, welche durch die Definitionen unmittelbar mit gegeben seien. Diese Axiome, welche jedenfalls (wie auf anderen Gebieten manche) einen empirischen Charakter durchaus nicht haben, möchte ich deshalb genauer als lediglich *formale* bezeichnen, indem ich als solche nur diejenigen Behauptungen aufführe, welche ich nicht durch formelle Rechnung nach bereits begründeten und klassificirten Methoden oder durch äusserlich dargestellte und verfolgbare Schlüsse ausdrücklich aus früheren ableite. Bei dieser Behandlung werden dann nicht die Definitionen, sondern nur die eventuell an sie geknüpften Postulate nebst den Axiomen die formale Grundlage der ganzen Disciplin ausmachen. Ob ich einerseits in dem Streben nach Verringerung der Anzahl jener Axiome weit genug gegangen bin, muss ich Anderen zu beurtheilen überlassen [ich verweise in dieser Beziehung noch auf die Bemerkung am Schlusse von 10] [1]; zur Rechtfertigung einiger scheinbaren Umständlichkeiten muss ich andrerseits auf ebendiese Tendenz mich berufen.

Man wird die Wahrnehmung machen, dass mitunter von zwei einander dual entsprechenden Sätzen nur der eine (und natürlich | einerlei welcher) als Axiom zu Seite 5
figuriren hat, und ferner, dass demgemäss die Reihenfolge des Beweises der Sätze nicht ganz zusammenfällt mit derjenigen, in welcher sie des Dualismus wegen aufgeführten werden mussten - weshalb dann auch die Beweise nicht immer dual entsprechend zu führen sind.

Die auch in der gemeinen Arithmetik gültigen Axiome und Sätze werd ich einmal mit aufzählen, aber in der Regel nicht citiren.

Ich muss endlich empfehlend hinweisen auf die längst bei den Philosophen übliche Versinnlichungsweise der Begriffsumfänge durch irgendwie begrenzte Flächengebiete der Ebene, bei welcher die zur Kategorie eines Begriffs gehörigen Individuen durch geometrische oder nach Belieben auch ausgedehnte Punkte der

---

[1] Le parentesi quadre sono dell'autore.

Fläche abgebildet werden. Als reales Substrat der formalen Rechnungsoperationen des Logikkalkuls könnten darnach - ganz abgesehen von den Geistesprocessen, die wir damit darzustellen beabsichtigen - auch gewisse rein geometrische Processe in einer linearen oder auch in einer zweifach oder dreifach ausgedehnten räumlichen Mannigfaltigkeit genommen werden, wie sie weiter unten für das Beispiel der Ebene mit angeführt und zuweilen (aus typographischen Gründen jedoch sparsam) zur Illustration verwendet werden.

1. [Grundsätze]

Vorangestellt sei:

I. Die *Definition der Gleicheit* zweier oder mehrerer Klassensymbole. Die letzteren sollen einander gleich heissen, wenn die von hinen vorgestellten Klassen identisch die nämlichen Individuen umfassen, wenn jene also nur Namen für ein und dieselbe Klasse sind. Darnach gilt

II. Das *Axiom*: Jedes Klassensymbol ist sich selbst gleich,

III. Das *Axiom*: Wenn zwei Klassensymbole einem dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich

- nebst den noch allgemeineren Sätzen, welche sich in bekannter Weise hieraus folgern lassen, cf. z.B. [**Sch73**, SS. 25–26].

Hieran schliessen sich als *wesentlich* Inhalt der Theorie nun etwa zwanzig zumeist gedoppelte Sätze, wovon vorerst dreizehn einzelne als formale *Axiome* hinzustellen sind. Von diesen mögen auch die [Sätze 1, 1d und 7] als *Postulate* aufgefasst werden.

2. [Logische Multiplikation und Addition]

1. *Definition* des *Produktes* ab zweier Klassensymbole. *Unter* ab *ist zu verstehen die Gesamtheit oder Klasse, die ganze Gattung der Individuen, welche sowohl zur Klasse* a *als auch zur Klasse* b *gehören.*	1d. *Definition* der *Summe* $a+b$ zweier Klassensymbole. *Die Klasse* $a+b$ *bedeutet die Gesamtheit der Individuen, welche zur Klasse* a *oder auch zur Klasse*| b *gehören*, d.h. genauer gesagt entweder zur einen oder aber zur andern, oder gleichzeitig zu beiden Klassen zählen.

Seite 6 Bei der geometrische Veranschaulichung der Klassen a und b durch die Punkte zweier Kreisflächen stellt:

$$ab \mid a+b$$

bezüglich die nachstehend schraffirte Fläche [in der Abbildung 1] vor:

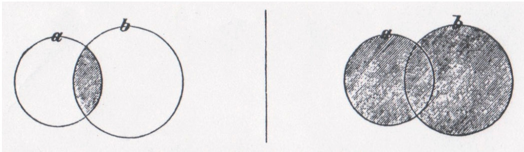

ABBILDUNG 1

Es stellt also in irgeind Mannigfaltigkeit

$a \cdot b$ das Gebiet vor, in welchem die Gebiete a und b einander gegenseitig *durchdringen*.	$a + b$ das Gebiet vor, zu welchem die Gebiete a und b einander gegenseitig *ergänzen*.

Die logische

Multiplikation dient dazu, aus der Mannigfaltigkeit des Denkbaren solche Dinge hervorzuheben, welche durch die *Gemeinsamkeit ihrer Merkmale* charakterisirt sind; sie läuft wesentlich auf eine Aussonderung oder *Selektion* hinaus. Die Philosophen nennen sie *Determi-*	Addition dient dagegen dazu, solche Klassen von Dingen zusammenzusetzen, deren einzelne Gruppen charaktisirt sind durch *verschiedenartige* Merkmale, sie zukommt also auf ein Zusammenfassen, auf eine *Collektion* hinaus.

nation, weil, wenn man aus der Klasse a diejenigen Individuen hervorhebt, welche zugleich zur Klasse b gehören, der Begriff der a eine nähere *Bestimmung* erfährt durch die Forderung, dass die gemeinten a zugleich auch die Merkmale der b haben sollen.

3. [Null und Eins]

Die gegebene Definition bedarf eine Ergänzung für den Fall dass

die beiden Kreise ausserhalb einander liegen,	die beiden Flächen die ganze Ebene zusammen überdecken

und hierzu ist die Einführung je eines neuen Symbols erforderlich, als welches die Zeichen

$$0 \mid 1$$

gewählt werden sind und in der That sich auch empfehlen. |

Die *Null* sei das Zeichen für *nichts* - eine Klasse, zu welcher gar kein Individuum gehört.	Die *Eins* soll die Klasse des *etwas* vorstellen - eine Kategorie, die alles Denkbare umfasst, die Gesamtheit alles dessen, wovon überhaupt die Rede sein kann (Boole's *universe of discourse*).

Seite 7 Die Motivierung dieser Festsetzungen, von denen namentlich die letztere dem Anfänger überraschend erscheint, ist unter 9 zu finden.

Die Symbole 0 und 1 sind darnach die Grenzen, die entgegengestztesten Extreme der Klassensymbole, indem keine Klasse weniger als keines, und keine mehr als alle Individuen umfassen kann.

Es ist demnach

$$ab = 0 \mid a + b = 1$$

zu setzen, wenn die Klassen a und b

kein Individuum gemein haben. In diesem Falle können die Klassen *disjunkte* gennant werden; ihre Begriffe *widerstreiten* einander.	zusammen alles Denkbare umfassen. Dergleichen Klassen könnten füglich (*über*)*complementäre* gennant werden.

An die erste Bemerkung scheint es nicht überflüssig, den ausdrücklichen Hinweis zu knüpfen, dass in der Logik ein Produkt sehr wohl verschwinden kann ohne dass einer seiner Faktoren 0 sein müsste - was bekanntlich in der Arithmetik nur bei unendlicher Faktorenzahl eintreffen kann.

4. [Axiome]

Die Definitionen 1 - 1d sind entsprechend auf beliebig viele Operaionsglieder ausgedehnt zu denken. Als den eigentlich Inhalt dieser beiden Nummern sehe ich aber nicht die angeführten Definitionen, sondern die sich an sie anlehnenden Postulate an, *gegeben Klassensymbole mit einander zu multipliciren resp. zu addiren*, d.h. also mit anderen Worten die axiomatische Sätze:

Axiom. Das Produkt | *Axiom. Die Summe*

von Klassensymbolen ist immer wieder ein Klassensymbol, oder die logische Multiplication resp. Addition ist eine *unbedingt ausführbare* Operation; das formale Ergebniss (der Name für das Resultat) derselben ist innerhalb des Gebietes der Klassensymbole sinnlos, undeutig oder *nulldeutig*.|

2. *Axiom*. Das *Commutationsgesetz der Multiplikation*: $ab = ba.$	2d. *Axiom*. Das *Commutationsgesetz der Addition*: $a + b = b + a.$
3. *Axiom*. Das *Associationsgesetz der Multiplikation*: $a(bc) = (ab)c = abc.$	3d. *Axiom*. Das *Associationsgesetz der Addition*: $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

Seite 8 Die aus der Arithmetik bekannte Ausdehnung der beiden Gesetze 2-3 auf Produkte

resp. Summen von beliebig vielen Operationsgliedern wäre hier wol als ein *Lehrsatz* anzureihen, den wir jedoch nicht besonders numeriren wollen. Die *Reihenfolge* und *Gruppirung* der Operationsglieder, die ganze Anordnung des Multiplikations- resp. Additionsprocesses ist darnach für den *Werth* (die Bedeutung) des Endergebnisses gleichgültig.

4. *Axiom*. Gleiches mit gleichem multiplicirt gibt gleiches[.] Wenn

$$a = b$$

so ist auch

$$ac = bc,$$

4d. *Axiom*. Gleiches zu gleichem addirt gibt gleiches. Wenn

$$a = b$$

so ist auch

$$a + c = b + c,$$

- ein Sazt, der leicht auch auf die operative Verknüpfung beliebig vielere Gleichungen auszudehnen ist.

Auf Grund dieses Satzes ist das Ergebniss einer jeden der beiden direkten Grundoperationen des Logikkalkuls ein *unzweideutig bestimmtes*, indem zwei aus denselben Faktoren zusammengesetze Produkte (z.B) immer identisch sein müssen. Da mithin diese Operationen weder mehrdeutig, noch, nach 1, jemals undeutig werden können, so dürfen wir dieselben als *vollkommen eindeutig* bezeichnen.

Wichtig erscheint es, zu betonen, dass die beiden Sätze 4 *nicht umgekehrt* werden dürfen - wie denn z.B. für $cd = 0$ nach Axiom 6 die Gleichung $(a + d)c = ac$ zulässig sein wird, ohne dass doch $a + d = a$ sein müsste. Auch Exempel aus dem Idennkreis des gewöhnliches Lebens, um darzuthun, dass aus $ac = bc$ nicht auf $a = b$ geschlossen werden darf, sind naheliegend.

Die Analogie zwischen den Gesetzen der logischen und denen der arithmetischen Operationen sehen wir hiermit zunächst abbrechen, den Contrast der beiden aber in den nächstfolgenden Sätzen seinen Gipfel erreichen.

5. *Axiom*. Es ist

$$aa = a,$$

d.h. *Multiplikation einer Klasse mit sich selbst ändert nichts*.

5d. *Axiom*.

$$a + a = a.$$

Ein Klassensymbol zu sich selbst addirt bleibt unverändert. |

Ich werde diese im Hinblick auf die Definitionen 1 ganz selbstverständlichen Seite 9
Sätze *die specifischen Gesetze des Logikkalkuls* [2] nennen.

Man könnte freilich einwenden, dass ungereimt sei, Operationen wie $a \cdot a$ oder $a + a$ überhaupt auszuführen. Unzweifelhaft macht sich einer *Tautologie* schuldig. Der Allgemeinheit der Untersuchungen kommt es aber zu statten, wenn in den auf

[2] Der für den ersteren von Boole vorgeschlagen Name des *Law of duality* erscheint im Hinblick auf den vorerwähnten nicht völlig mehr von ihm erkannten wirklichen Dualismus als gänzlich unpassend [Il nome scelto per primo da Boole *Law of duality* mi sembra completamente inadatto in considerazione del fatto che, come detto in precedenza, lui non ha saputo riconoscere fino in fondo il vero dualismo]. NdA.

beliebige Klassen bezüglichen Produkte oder Summen der Fall der Gleichheit dieser Klassen nicht ausgeschlossen wird, und könnte leicht der Nutzen dieser Freiheit in Hinsicht auf Vereinfachung der Ausdrucksweise an Beispielen illustrirt und jene als durch den Usus sanktionirt nachgewiesen werden. Was aber in verhüllter Form, implicite, ganz allgemein geschieht, muss im System auch explicite eine Stelle finden. Die Sätze sind natürlich auch auf beliebige viele Operationsglieder auszdehenen:

$$aaa \cdots = a,$$

und kommen demnach im Logikkalkul keine Potenze vor. Die Stelle der Exponenten bleibt hier für obere Indices disponibel, und soll weiter unten auch nur für solche in Anspruch genommen werden.

$$a + a + a + \cdots = a.$$

Ein Zusammenhang zwischen Multiplikation und Addition wie derjenige, durch welchen wir in der Arithmetik das natürliche Produkt definiren, besteht im Logikkalkul *nicht*.

Mit vorstehendem sind die *reine* Gesetze der beiden direkten Grundoperationen, so weit in dieselben lediglich allgemeine Klassensymbole eingehen, erschöpft. *Rein* nenne ich diejenigen Gesetze, welche nur auf eine einzige Operation bezug haben.

Auf den *Zusammenhang* zwischen den beiden Operationen beziehen sich dagegen die beiden folgenden (*gemischten*) Gesetze dieser Operationen, von welcher das eine - wir wählen das erste - als Axiom genommen werden muss und einen Grundpfeiler der ganzen Theorie bildet, das andere nur der dualistichen Vollständigkeit halber mitangeführt wird.

6. *Axiom*. Es gilt für die logischen Operationen das (*erste* oder *zweite*) *Distributivgesetz*:

$$a(b + c) = ab + ac$$

oder $\quad (b + c)a = ba + ca,$

das ist die Regel für das *Ausmultipliciren* (eines Polynoms mit einem Monom) und für das *Vereinigen* oder Ausscheiden eines gemeinschaftlichen Faktors in den Gliedern einer Summe).

[6d. *Theorem*. Ebenso gilt das duale Gegenstück der Distributionsgesetze:

$$a + bc = (a + b)(a + c)$$

oder $\quad bc + a = (b + a)(c + a).$ |

Der Beweis dieses fernerhin von uns nicht wesentlich verwendeten Satzes ist erster weiter unter sub 10 zu führen.]

Seite 10 Die geometrische Veranschaulichung dieser beiden Sätze geben folgenden Figuren [in der Abbildung 2], in welchen der schraffirte Theil wieder den übereinstimmenden Werth beider Seiten der Gleichung vorstellt.

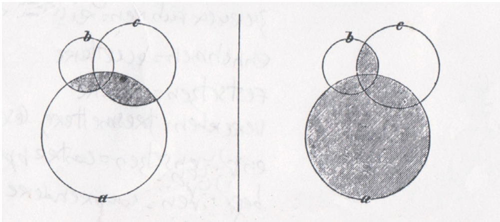

ABBILDUNG 2

Die Operationen der Logischen Addition und Multiplikation sind das einzige bekannte Beispiel von solchen commutativen Operationen, die in gegenseitig distributiver Beziehung zu einander stehen, für welche nämlich *alle vier* Distributionsgesetze 6 gleichzeitig Geltung haben. Natürlich sind vorstehende Distributionsgesetze auch auf beliebig viele Operationsglieder auszudehen und fernerhin in einer aus der Arithmetik bekannten Weise zu erweitern zu der allgemeinen:

Multiplikationsregel für Polynome, | [Additionsregel für Produkte],

welche für den einfachsten Fall durch die Formel ausgedrückt wird:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd, \mid [ab + cd = (a+c)(a+d)(b+c)(b+d)],$$

hier aber als *Lehrsatz* nicht mitgezählt werden soll.

7. *Axiom.*

Zu jedem klassensymbol a gibt es mindstens ein anderes a_1 von der Eigenschaft, dass sowohl

$$7.\ aa_1 = 0 \quad \textit{als auch} \quad 7\text{d}.\ a + a_1 = 1$$

ist. Wer sich dies genauer überlegt, wird sogleich einsehen, dass die gedachte andere Klasse a_1 eine ganz bestimmte und zwar das contradiktorische Gegentheil von a ist. Es ist jedoch nicht nöthig, auch diese eindeutige Bestimmtheit von a_1 in die axiomatische Voraussetzung mit einzuschliessen, sondern die Annhame, dass es nur irgend | eine Klasse von der genannten Eigenschaft gebe, ist schon hinreichend, um (weiter unten) beweisen zu können, dass nicht mehr als eine solche Klasse existirt. Nennen wir vorläufig ein solches Symbol a_1 *eine Ergänzung* von a, so ist symmetriehalber auch a eine Ergänzung von a_1 zu nennen, und versichert uns unser Axiom der Existenz von einer (nämlich weigstens einer) Ergänzung zu jedem denkbaren Klassensymbole. Wie wir sub 12 sehen werden, involvirt dieses Axiom das dritte und letzte Postulat, auf dem unsere Theorie beruht. Seite 11

8. *Theorem.*	8d. *Theorem.*
$0 \cdot a = 0.$	$1 + a = 1.$
9. *Axiom.*	9d. *Axiom*
$a \cdot 1 = a.$	$a + 0 = a.$

Beweis zu 8. Wird a zusammengehalten mit einem nach 7 dazu gehörigen a_1, so ist:

$$a \cdot 0 = a(aa_1) = (aa)a_1 = aa_1 = 0,$$

q.e.d. Ebenso ist genau dual entsprechend zu führen der

Beweis zu 8d $a+1 = a+(a+a_1) = (a+a)+a_1 = a+a_1 = 1$, und kommen, wie man sieht, hierbei nur 7 und 4, das Associationsgesetz 3 und endlich 5 und 7 zur Anwendung.

Was den *Beweis* zu 9 betrifft, so kann, wie mir scheint, nur der eine von diesen beiden Sätzen zurückgeführt werden auf den andern, indem man nach 7d, nach dem Distributionsgesetz 6, nach 5 und 7:

$$a \cdot 1 = a(a + a_1) = aa + aa_1 = a + 0$$

sein muss. Der andere Satz - ich wähle 9 - muss axiomatisch angenommen werden.

Die Formeln 8 und 9 geben nach Boole das passendste Motiv ab für die Wahl oder den Ausfall der für die Symbole 0 und 1 definitionsweise von uns festgesetzten Bedeutung, indem es wünschenswerth erscheint, jene von der aritmetischen 0 und 1 geltenden Grundeigenschaften auch auf die logischem Symbole zu vererben. Sollen in der That die Gleichungen 8 und 9 auch in Logikkalkul gelten, so muss

0 eine solche Klasse bedeuten, die mit jeder andern, insbesondere also auch mit contradiktorisch entgegengestzten Klassen, sich selbst gemein hat; da letztere aber kein Individuum miteinander gemein haben, so kann die Klasse 0 auch nur nichts enthalten; es muss eine *leere* Klasse sein. |	1 diejenige Klasse vorstellen, welche mit jeder denkbaren andern Klasse diese selbst gemein hat, welche also jede denkbare Klasse und alle denkmöglichen Individuen in sich begreift.

5. [Theoreme]

Seite 12 Die vorstehenden 4 Sätze, in welche theils allgmeine, theils specielle Klassensymbole eingehen, und von denen 3 auch in der Arithmetik bestehen, schliessen sich offenbar noch den *reinen* Gesetzen unserer Grundoperationen an.

Sehr charakteristisch für den Logikkalkul und einerseits wichtig sind nun folgende beiden (wieder gemischten) Sätze:

10. *Theorem*. Es ist
$$a + ab = a,$$
d.h. *ein Term, der einen andern als Faktor entählt, geht jeweils in dieses ein*, oder kann von ihm gewissermassen absorbirt werden (*Absorptionsgesetz*).
Beweis. Indem man links ausscheidet, kommt nach 9, 6, 8d und 9:
$a + ab = a \cdot 1 + ab =$
$= a(1 + b) = a \cdot 1 = a.$

[10d. *Theorem*. Analog ist:
$$a(a + b) = a.$$
Beweis. Links ausmultiplicirend hat man nach 6, 5 und 10:
$a(a + b) = aa + ab = a + ab = a.$]
[Darnach lässt sich jetzt auch 6d durch Ausmultipliciren nach 5 und 10 beweisen wie folgt:
$(a + b)(a + c) =$
$= aa + ab + ac + bc =$
$= (a + ab) + ac + bc =$
$= \{a + ac\} + bc = a + bc.$]

⌈Una curiosità linguistisca: il verbo *ausmultipliciren* è caro a Schröder. Nel terzo volume delle *Lezioni* si incontra nella forma più moderna di *Ausmultiplizieren*.⌉

Indem mit 1d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6, 7 und 9 jetzt die Reihe der Postulate und Axiome, auf die wir uns berufen müssen, abgeschlossen ist, zugleich aber auch die dual entsprechenden Ergänzungssätze 6 und 9 nunmehr bewiesen sind, muss auch das in §1 [dem Abschnitt 2.2] ausgesprochene Reciprocitätsgesetz oder die Behauptung des *volkommenen Dualismus der logischen Grundoperationen* fortan als erwiesen gelten.

Die fünf als Axiome hier angeführten Sätze 2, 3 und 6 sind noch von Hermann Grassmann [3] auf ihre einfachsten auf die Einheiten bezüglichen Voraussetzungen zurückgeführt, was auch bei 5 und 9 anginge. Den Einheiten entsprechen hier die (unter sich disjunkten) *Individuen*, als deren logische Summe:

$$a = i^1 + i^2 + i^3 + \cdots \qquad \text{eventuell bis } i^n$$ [4]

---

[3] [**Gra61**]. Vergl. auch [vedi anche] [**Sch73**]. NdA. I riferimenti precisi sono [**Gra61**, p. 24, numero 72] per 2, [**Gra61**, p. 23, numero 70] per 3, [**Gra61**, p. 21, numero 66] per 6, per quanto riguarda Grassmann. [**Sch73**, p. 75, numero 14] per 2, [**Sch73**, p. 78, numero 16] per 3, [**Sch73**, p. 84, numeri 17 e 18] per 6, per quanto riguarda il volume di Schröder.

[4] Ovviamente i è il simbolo di un individuo generico, non di $\sqrt{-1}$. Il riferimento di Schröder è il seguente: *Man bilde aus einer Grösse* e *eine Reihe von Grössen durch folgendes Verfahren: Man setze* e *als ein Glied der Reihe, setze* $e + e$ *(gelesen* e *plus* e*) als das nächstfolgende Glied der Reihe, und so fahre man fort, aus dem jedesmal letzten Gliede das nächstfolgende dadurch abzuleiten, dass man zu jenem* $+e$ *hinzufügt. Ebenso setze man* $e + -e$ *(gelesen* e *plus minus* e*) als dem* e *zunächst vorhergehende Glied der Reihe, und so fahre man fort, aus dem jedesmal ersten Gliede der Reihe das nächste vorhergehende dadurch abzuleiten, dass man zu jenem Gliede* $+ -\, e$ *hinzufügt, so erhält man eine nach beiden Seiten unendliche Reihe* $\cdot\cdot\, e + -e + -e + -e, e + -e + -e, e + -e, e, e + e, e + e + e \cdot\cdot$ *Wenn man in dieser Reihe jedes Glied von allen übrigen Gliedern der Reihe als verschieden annimmt, so nennt man diese Reihe die* Grundreihe, e die positive Einheit, $-e$ die negative Einheit [**Gra61**, pp. 2 –3] [Si formi a partire da una grandezza e una serie di grandezze attraverso il seguente procedimento: si ponga e come un elemento della serie, $e + e$ (da leggersi e più e) come l'elemento immediatamente successivo della serie e così si prosegua per dedurre dall'ultimo elemento considerato il suo immediato successore nel modo indicato, cioè si aggiunga

die Klasse sich offenbar darstellen lässt.

11. *Theorem.*

Wenn zugleich $ac = bc$ *und* $a + c = b + c$, *so ist:*

$$a = b.$$

Beweis. Multiplikation der zweiten Gleichung mit a resp. mit b gibt nach 5 [Idempotenz]:

$$a + ac = ab + ac, \qquad ab + bc = b + bc.|$$

Seite 13 Nach Voraussetzung ist aber der zweite Ausdruck [$a + c = b + c$] dem dritten [$a = b$] und folglich auch dem erste [$ac = bc$] dem letztem gleich, mithin wegen 10 [Absorptionsgesetz]

$$a = b,$$

q.e.d. [5] Oder auch dual entsprechend zu führen.

12. *Theorem.*

Von ein und demselben oder von gleichen Klassensymbole müssen alle Ergänzungen einander gleich sein, also wenn einerseits

$$aa_1 = 0, \qquad a + a_1 = 1$$

und adrerseits auch

$$ab_1 = 0, \qquad a + b_1 = 1$$

ist, so muss $a_1 = b_1$ sein.

Beweis. Denn es folgt:

$$aa_1 = ab_1 \qquad \text{und} \quad a + a_1 = a + b_1,$$

somit nach 11 $a_1 = b_1$. [q.e.d.]

Ist demnach eine Klasse a gegeben, so ist die Ergänzung derselben völlig bestimmt. Es gibt nur *eine* solche Ergänzung, und diese heisst die *Negation* oder das *contradiktorische Gegentheil* von a, das *non*-a oder *Nicht*-a.

---

ad ogni elemento $+e$. Allo stesso modo, si ponga $e+-e$ (da leggersi e più $-e$) come l'elemento della serie immediatamente precedente e, e si prosegua così, per dedurre dall'ultimo membro della serie considerato, il suo immediato predecessore, cioè si aggiunga ad ogni elemento $+-e$, così si ottiene una serie infinita da entrambe le parti $\ldots e+-e+-e+-e, e+-e+-e, e+-e, e, e+e, e+e+e \ldots$ Quando si suppone che ogni elemento di questa serie sia distinto dai restanti membri, allora questa serie si chiama *serie fondamentale*, e l'unità positiva, $-e$ l'unità negativa]. Vorrei far notare che Hermann Grassmann si sta occupando di definire una serie (infinita) di elementi discreti, non di introdurre il concetto di classe. Semmai, il concetto di classe può essere presupposto da quello di serie, vista come sommatoria degli elementi della classe. Per questo, rimando a [**Wüs09a**, p. 99 e segg.]. Ma si guardi anche cosa scrive Schröder: $a = i^1 + i^2 + i^3 + \ldots$. Non sembra aver senso. Per monotonia, $i^1 = i^2 = i^3 =$ ecc.; e per idempotenza $\sum_{i=1}^{n} i = i$. Quindi, a è un *singoletto*, coincide con l'unico elemento che contiene. Forse che qui Schröder intende introdurre il concetto di *individuo* come una classe collassata su sé stessa? Ovvero, come la classe che contiene meno elementi di tutti, pur essendo diversa da 0? Il che rimanda all'identificazione *individuo-infinitesimo*. In altre parole, un individuo non è niente, ma non è ulteriormente segmentabile, un *a*-tomo.

[5] Ovvero, si applichi il terzo assioma (S. 5), $(\alpha = \gamma) \wedge (\beta = \gamma) \to \alpha = \beta$, con $\alpha = (ac+bc)$, $\gamma = (a = b)$ e $\beta = (a + c = b + c)$.

Negation oder Opposition soll auch die Rechnungsoperation heissen, durch welche der Ausdruck des Nicht-a hergestellt wird, wenn der des a gegeben ist. Nach 12 und 7 ist mithin diese unsere *dritte Grundoperation* ebenfalls eine *vollkommen eindeutige*.

Die Gleichung 7 erscheint uns jetzt als der mathematische Ausdruck des *Satz vom Widerspruch*, welche aussagt, dass nichts zu denken möglich ist, was zugleich und in demselben Sinne a und Nicht-a wäre - jenes principium contradictionis, welches Aristoteles an die Spitze [6] des ganzen Logikgebäudes gestellt wissen wollte.

13. *Theorem.*

Es ist stets $$(a_1)_1 = a,$$
oder: *die Negation der Negation* (das Gegentheil des Gegentheils) *von irgend einer Klasse ist diese selbst*. Beim Negiren einer Negation heben sich die Suffixe änlich auf, wie die beiden minus-Zeichen beim Subtrahiren einer negativen Zahl, oder besser, wie beim Subtrahiren einer Differenz von ihrem Minuenden dieser letztere sich weghebt. [7]

Beweis aus 12, da einerseits:

$$aa_1 = 0, \qquad a + a_1 = 1$$

und andrerseits:

$$a_1 \cdot (a_1)_1 \quad \text{oder} \quad (a_1)_1 \cdot a_1 = 0, \qquad (a_1)_1 + a_1 = 1$$

nach 7 ist. [q.e.d.] |

Speciell wegen $0 \cdot 1 = 0$ und $0 + 1 = 1$ folgt Seite 14

$$(1)_1 = 0, \qquad (0)_1 = 1$$

und sind also die Klassen 0 und 1 die Negationen von einander.

6. [Entwicklung eines Ausdrucks]

14. *Theorem. Jede Klasse b kann linear und homogen durch jede andere a ausgedrückt werden in der Form:*	[14d. *Theorem.* Desgleichen kann stets gesetz werden:
(A) $b = xa + ya_1$	$b = (y + a)(x + a_1)$.]

wo x und y gewisse nicht volkommen bestimmte *Klassensymbole* vorstellen, die auch gleich 0 oder 1 sein können.

Geometrisch ist der Satz unbmittelbar evident [siehe Abbildung 3], da das Flächengebiet von b durch die Contour von a zerlegt wird in zwei Theile, mit deren einem $X = Xa$ es in a hineinfällt, und deren anderer $Y = Ya_1$ ausserhalb

[6] Una metafora *montana* da parte di un matematico innamorato delle vette. Vedi più sotto a proposito del teorema 20.

[7] Cf. 35d. Nda.

a zu liegen kommt; die Gleichung (A) ist also richtig, wenn $x = X$ und $y = Y$ verstanden wird.

Analytisch ist der Satz am einfachsten wie folgt zu beweisen; es ist:

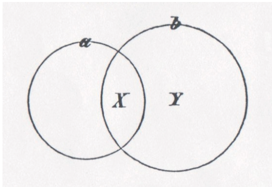

ABBILDUNG 3

$$\text{(B)} \qquad b = b \cdot 1 = b(a + a_1) = ba + ba_1,$$

also ist der Satz jedenfalls unter der Auffassung $x = y = b$ richtig. [q.e.d.]

Dass aber x und y nicht völlig bestimmt sind, leuchtet weiter daraus ein, dass wenn x und y richtige Coefficienten sind, die die Gleichung (A) erfüllen, dann auch $x + ua_1, y + va$ solche sein müssen.

Ueberhaupt erkennt man leicht die Richtigkeit der Gleichung:

$$\text{(C)} \qquad b = (ab + ua_1)a + (a_1 b + va)a_1,$$

in welcher u und v volkommen willkürlich Klassen vorstellen; und würde man durch die bis zum Ende des gegenwärtigen Paragraphen auseinandergesetzen Methoden auch in der Stand gesetzt sein, nachzuweisen, dass diese (C) in der That die allgemeiste Form der Darstellung (A) ist, aus welcher sich durch passende Annahme von u und v alle möglichen Darstellungen dieser Art ergeben müssen.

Mit $f(a)$ soll nunmehr jeder Ausdruck bezeichnet werden, der die Symbole a und a_1 eventuell enthält.

Was die behufs Herstellung des Ausdrucks auszuführenden Operationen betrifft, so wollen wir zunächst annehmen, dass die Symbole a und a_1 nur durch die Operation der logischen Addition und Multiplikation unter sich und mit andern unabhängig von ihnen gegeben zu verknüpfen seien - ein besonders einfacher Fall, Seite 15 auf welchen | aber - wie aus dem später folgenden erhellen wird - alle denkbaren Fälle sich leicht zurückführen lassen.

In diesem Falle nun kann man alle etwa als Faktore auftretenden Summenausdrücke nach 6 [Distributionsgesetz] ausmultipliciren, und den ganzen Ausdruck in ein Aggregat von Monomien auflösen. Jedes dieser Monome kann die Symbole a und a_1 nie gleichzeitig und jenes höchstens einmal als Faktor enthalten wegen 7 und 5. Es wird demnach der ganze Funktionsausdruck vom ersten Grade bezüglich a und a_1 sein, und kann derselbe homogen gemacht werden, indem man nach Belieben entweder den von a und a_1 freien Term oder auch den ganzen Ausdruck mit $a + a_1$ multiplicirt. So erhalten wir endlich ebenfalls die Form:

$$f(a) = xa + ya_1,$$

worin nun x und y unabhängig von a und a_1 gegeben sind. Es enthalten diese Coefficienten hier nichts willkürliches mehr, sondern durch die Forderung ihrer Unabhängigkeit von a in Verbindung mit der ihrer Entstehung aus dem gegebenen Ausdruck $f(a)$ haben dieselbe ihre Bestimmung gefunden.

Die Rechenarbeit kann hierbei oft sehr verringert werden durch die Bemerkungen von Boole, welcher dem Satze die Form gibt:

$$\text{(D)} \quad f(a) = f(1) \cdot a + f(0) \cdot a_1,$$

da offenbar $f(1)$ und $f(0)$ auch aus dem noch unreducirten Ausdruck $f(a)$ direkt abgeleitet werden können, indem man

$$a = 1 \text{ nebst } a_1 = 0 \text{ resp. } a = 0 \text{ nebst } a_1 = 1$$

darein substituirt und 8, 9 berücksichtigt. Dies beruht eben auf der Allgemeingültigkeit der logischen Gleichungen, wonach die Gleichheit zwischen dem gegebenen Ausdruck von $f(a)$ und zwischen dem gesuchten aber schon als zulässig erkannten (A) fortbestehen muss, auch wenn man a gleich 0 oder 1 specialisirt.

Der Satz (D) lässt sich von einem leicht auf zwei oder mehr Argumenten ausdehnen:

$$\text{(E)} \quad f(a, b) = f(1, 1)ab + f(1, 0)ab_1 + f(0, 1)a_1b + f(0, 0)a_1b_1,$$

$$\begin{aligned} \text{(F)} \quad f(a, b, c) = {} & f(1, 1, 1)abc + f(1, 1, 0)abc_1 + f(1, 0, 1)ab_1c \\ & + f(1, 0, 0)ab_1c_1 + f(0, 1, 1)a_1bc + f(0, 1, 0)a_1bc_1 \\ & + f(0, 0, 1)a_1b_1c + f(0, 0, 0)a_1b_1c_1, \end{aligned}$$

u.s.w. Eine derartige Darstellung nennnen wir die *Entwickelung* des Funktionsausdrucks nach den Symbolen a, resp. a, b oder a, b, c u.s.w. Zur Einprägung ihres Bildungsgesetzes kann man die Regel aussprechen: *Um einen Funktionsausdruck nach seinen Argumenten zu entwickeln, ersetze man diese sämtlich durch* 1 *und multiplicire das Ergebniss mit dem geordneten Produkt der Argumente; man erhält so das | erste Glied der gesuchten Entwicklung* [$f(1, 1)ab$]. *In diesem ersetze man nun das letzte Argument* 1 *durch* 0 *und zugleich den letzten Argumentfaktor durch seine Negation* [$f(1, 0)ab_1$], *so wird man das zweite Glied gefunden haben. In den beiden bisherigen Gliedern ersetze man weiter das an der vorletzten Stelle befindliche Argument* 1 *durch* 0, *zugleich den vorletzten Argumentfaktor durch seine Negation* [$f(0, 1)a_1b + f(0, 0)a_1b_1$], *wodurch sich zwei weitere Glieder ergeben. In den vier hierdurch gewonnen Gliedern* [$f(1, 1)ab + f(1, 0)ab_1 + f(0, 1)a_1b + f(0, 0)a_1b_1$] *behandle man ebenso das drittletzte Argument,* u.s.w. Seite 16

Die Glieder der entwickelten Produkte:

$$\text{(G).} \begin{cases} 1 & = a + a_1, \qquad \text{resp.} \\ 1 & = (a + a_1)(b + b_1) = ab + ab_1 + a_1b + a_1b_1, \\ 1 & = (a + a_1)(b + b_1)(c + c_1) = \quad \text{u.s.w.} \end{cases}$$

⌈Mi sono permesso di introdurre la parentesi graffa, in modo da rendere più esplicito il riferimento a G da parte di tutte e tre le identità.⌋

heissen die *Constituenten* jener Entwickelungen im Gegensatz zu den *Coefficienten* $f(1,1,1), f(1,1,0)$, u.s.w., mit welchen sie multiplicirt erscheinen.

Die Summe aller Constituenten ist also $= 1$ in jeder *vollständigen* Entwickelung, d.h. sofern man sich auch die fehlenden Constituenten mit Nullcoefficienten versehen angeschrieben denkt.

Das Produkt je zweier verschiedenen Constituenten ist $= 0$ nach 7, da in ihnen mindestens zwei von den Argumentfaktoren $a, b, c, \ldots$ contradiktorisch entgegengesetzt sein müssen; sämtliche Constituenten sind also disjunkt.

15. *Theorem*. Zur Erleichterung der Rechnung mit *entwickelten* Ausdrücken dient die Bemerkung, dass nicht nur die Summe zweier nach denselben Symbolen entwickelten Funktionen gefunden wird durch Zusammenziehen der hinsichtlich ihrer Constituenten gleichnamigen Terme, sondern dass auch für die Multiplikation der Satz gilt:

Das Produkt von (zwei) nach denselben Argumenten entwickelten Aggregaten ist einfach die ***Ueberschiebung*** *derselben;* es wird dasselbe nämlich entwickelt erhalten, indem man die Coefficienten der gleichnamigen Terme multiplicirt, und ist z.B.

$$\begin{aligned}&(pab + qab_1 + ra_1b + sa_1b_1)(p'ab + q'ab_1 + r'a_1b + s'a_1b_1)\\&= pp'ab + qq'ab_1 + rr'a_1b + ss'a_1b_1.\end{aligned}$$

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus der Multiplikationsregel für Polynome im Hinblick auf die Bemerkung am Schlusse der vorigen Nummer.

16. *Theorem*. Wenn $a + b = 0$ ist, so muss $a = 0$ und $b = 0$ sein. |	[16d. *Theorem*. Wenn $ab = 1$ ist, so muss sein $a = 1$ und $b = 1$].

Seite 17 *Eine Summe kann also im Logikkalkul nicht anders* $= 0$ *sein, als indem ihre Glieder einzeln verschwinden* [8].

Beweis. Multiplikation der Prämisse mit a gibt nach 5 [Idempotenz] $a + ab = 0$, also nach 10 [Absorptionsgesetz] $a = 0$. Darnach folgt dann die andre Gleichung $b = 0$ nach 9d [$a + 0 = 0$] als Rückstand aus der Prämisse, wie man direkt durch Multiplikation dieser letzteren mit b auch ebenso nachweisen könnte. [q.e.d.]

Von zweien ist der Satz leicht auf beliebig viele Glieder auszudehnen.

[8] Altro verbo caro a Schröder, dalle sfumature favolistiche.

7. [Schröders Gesetz]

Derselbe ist dadurch ungemein wichtig, dass es umgekehrt uns in Verbindung mit nächstfolgenden Satze gestatten wird, *jedes System von logischen Gleichungen durch eine einzige: die Summe der rechterhand auf* 0 *gebrachten Gleichungen, vollständig zu ersetzen.*

17. *Theorem. Jede logische Gleichung kann einerseits auf* 0 *gebracht werden. Die Gleichung* $a = b$ *ist* nämlich *völlig äquivalent mit* $ab_1 + a_1b = 0.$	[17d. *Theorem*. Statt $a = b$ kann ebenso $(a + b_1)(a_1 + b) = 1$ oder $ab + a_1b_1 = 1$ gesetzt werden.]

Beweis. Wenn die erste Gleichung richtig ist, gilt jedenfalls auch die zweite, da sie, wenn a für b gesetzt wird [12 und 4] [9] nach 5d [Idempotenz] auf 7 [$aa_1 = 0$] hinauskommt.

Umgekehrt muss, wenn die zweite Gleichung erfüllt ist, nach 16 sein:

$$ab_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad a_1b = 0.$$

Wird mit Rücksicht hierauf die nach 7d [$a + a_1 = 1$] identisch richtige Gleichung

$$a + a_1 = b + b_1$$

mit a multiplicirt, so kommt nach 5 und 7:

$$a = ab + ab_1 = ab.$$

Desgleichen folgt durch Multiplikation mit b:

$$ab + a_1b = b \qquad \text{oder} \qquad ab = b,$$

daher endlich nach III: $a = b$. [q.e.d.]

8. [De Morgans Gesetze]

Um von dem letzten Satze mit Nutzen Gebrauch zu machen, muss man im Stande sein, *für jeden wenn auch noch so complicirten Klassenausdruck sofort die Negation hinzuschreiben.*

Hierzu verhelfen uns aber die drei nächstfolgenden Sätze [10].

---

[9] Le parentesi quadre sono dell'autore.

[10] Il terzo teorema, il 19, riguarda la negazione di un'espressione completamente sviluppata. Ho chiamato questi teoremi *Leggi di de Morgan*; ovviamente, non è chiaro se Schröder conoscesse il testo demorganiano del 1860 [**dM66**, p. 182], anche se penso di sì, perché verrà incluso nella bibliografia del primo volume delle *Lezioni* [**Sch66b**, p. 703]. Ad ogni modo, ritengo che il nome possa aiutare a ricordare il teorema.

18. *Theorem. Die negation eines Produktes ist die Summe der Negationen der Faktoren:*
$$(ab)_1 = a_1 + b_1,$$

18d. *Theorem. Die Negation einer Summe ist das Produkt der Negationen der Glieder:*
$$(a + b)_1 = a_1 b_1,$$

⌈Vorrei far notare come l'autore nei precedenti teoremi abbia scritto le formule duali tra parentesi quadre e in tondo. Stavolta, mancano le parentesi e il testo è in corsivo. Segno che Schröder, giustamente, annetteva grande importanza anche alla forma duale di 18.⌋

Seite 18 welche, nebenbei gesagt, noch zu der Regel zusammengefasst und verallgemeinert werden könnten:

Um die Negation eines durch direkte Operationen aufgebauten Ausdruckes zu bilden, ersetze man in diesem alle einfache Elemente durch ihre Negationen und übersetze denselben dual, d.h. man vertausche Addition und Multiplikation [11].

Beweis von 18d [12] - der von 18 ist genau dual entsprechend zu führen.

Soll $a_1 b_1$ die richtige Negation von $a + b$ sein, so müssen nach 7 [$a + a_1 = 1$] die beiden Relationen bestehen:

$$(a + b)a_1 b_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad a + b + a_1 b_1 = 1,$$

und umgekehrt, wenn diese erfüllt sind, so ist nach 12 [eindeutigkeit der Ergänzung] und 7 auch $a_1 b_1 = (a + b)_1$. [q.e.d.] [13]

Die Richtigkeit der ersteren Relation ist nun sofort ersichtlich; für die der zweiten kann der Nachweis dadurch erbracht werden, dass mann die Summe $a + b$ nach ihren Gliedern a und b entwickelt. Hier ist nämlich:

$$a + b = a(b + b_1) + b(a + a_1),$$

also nach 5d [Idempotenz]:

$$\text{(H)} \qquad a + b = ab + ab_1 + a_1 b;$$

mithin kommt $a + b + a_1 b_1 = (a + a_1)(b + b_1) = 1$, cf. (G). Man könnte übrigens auch so schliessen, indem man erst den mittleren Term zerlegte und dann die extremen vereinigte:

$$a + b + a_1 b_1 = \llcorner a + \ulcorner ab \lrcorner + \llcorner a_1 b \urcorner + a_1 b_1 \lrcorner = a + a_1 = 1$$ [14].

[11] Trattandosi di una regola, non capisco perché l'autore non l'abbia messa in corsivo.

[12] È la prima volta nel testo che Schröder dimostra il duale del teorema piuttosto che l'originale.

[13] Non è del tutto chiaro dal testo se la dimostrazione finisca qui. Senza dubbio, la dimostrazione di 18 finisce qui; ciò che segue sono delle considerazioni su come dimostrare 18 e pertanto le ho escluse dalla dimostrazione vera e propria.

[14] Per esigenze tipografiche ho sostituito le parentesi graffe orizzontali di Schröder con questi *delimiters*.

Anmerkung. Die drei Terme der hierbei bewiesenen Gleichung (H), sowie auch die vier der Zerlegung von 1 in (G) entsprechen den 3 resp. 4 Theilen, in welche die Fläche $a+b$ resp. die ganze Ebene durch die Conturen von a und b zerschnitten wird [siehe Abbildung 4]:

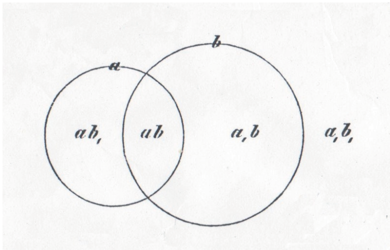

ABBILDUNG 4

Während (H) die Formelübersetzung von a *und* b vorstellt, worin die Partikel *und* auch ersetzt werden kann durch das *inclu|sive* ***oder*** (= *oder auch*) wird man Seite 19 das *exclusive* ***oder*** (= *oder aber*), das *oder* in *entweder* a *oder* b zu übersetzen haben mit

$$\text{(K)} \qquad ab_1 + ba_1.$$

Nach vorstehenden beiden Sätze, in letzter Istanz nach 18d [de Morgans Gesetze] erhält man die Negation oft in der unbequemen Form eines Produktes von Summenausdrücken, die erst noch auszumultipliciren erübrigte. Um diese Arbeit zu sparen, bedürfen wir des weiteren Satzes, durch welchen sie allgemein verrichtet wird:

19. *Theorem. Um die Negation eines etwickelten Ausdrucks zu bilden, ersetze man sämtliche Coefficienten einfach durch ihre Negationen.* Ist

$$f = pab + qab_1 + ra_1b + sa_1b_1,$$

so muss sein:

$$f_1 = p_1ab + q_1ab_1 + r_1a_1b + s_1a_1b_1$$ [15].

Der *Beweis* ist sofort durch die Bemerkung erledigt, dass für f und f_1 angegebenen Ausdrück die Relationen:

$$ff_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad f + f_1 = 1,$$

nach 15 und 14 Schlussbemerkung, identisch erfüllen. [q.e.d.]

Heuristischer, wenn auch nicht ganz so kurz, ist folgende ebenfalls bemerkenswerthe Begründung des Satzes, bei welcher derselbe erst für den Fall eines einziges

[15] NB: Viene negato solo il coefficiente, non l'intero addendo.

Argumentes der Entwicklung aus 18 [de Morgans Gesetze] hergeleitet:

$$\begin{aligned}(xa + ya_1) &= (xa)_1 \cdot (ya_1)_1 = (x_1 + a_1)(y_1 + a)\\ &= x_1y_1 + x_1a + ya_1 + aa_1 = x_1y_1(a + a_1) + x_1a + y_1a_1\\ &= x_1a(1 + y_1) + y_1a_1(1 + x_1) = x_1a + y_1a_1,\end{aligned}$$

sodann für mehr als ein Entwickelungsargument recurrirend weiter geschlossen wird:

$$\begin{aligned}&(pab + qab_1 + ra_1b + sa_1b_1)_1 = \{(pb + qb_1)a + (rb + sb_1)a_1\}_1\\ &= (pb + qb_1)_1a + (rb + sb_1)_1a_1 = (p_1b + q_1b_1)a + (r_1b + s_1b_1)a_1\\ &= p_1ab + q_1ab_1 + r_1a_1b + s_1a_1b_1.\end{aligned}$$

Bei der Anwendung des Satzes ist eine Fehlerquelle verfänglich. Wenn nämlich in dem zu negirenden Ausdrucke einzelne Glieder von vornherein fehlen, so darf man nicht übersehen, dass deren Constituenten in der Ergänzung den Coefficienten 1 bekommen müssen. Dergleichen defekte Entwickelungen muss man also mittelst Zuziehung von Nullcoefficienten erst in Gedanken vervollständigen, und dann *sämtliche* Terme behufs Negirens ihrer Coefficienten Revue passiren lassen.

Seite 20 Eine Entwickelung [16], die hinsichtlich zweier Argumente im an|geführten Sinne defekt ist, kann freilich hinsichtlich eines derselben schon complet sein, und findet man z.B. auch direkt, dass:

$$(ab_1 + a_1b_1)_1 = ab + a_1b_1$$

ist, und umgekehrt: $(ab + a_1b_1)_1 = ab_1 + a_1b$.

Vorstehende 3 einfache Sätze sind es hauptsächlich, welche den Boole'schen arithmetisch-logischen Rechenapparat durchaus entbehrlich machen helfen - ein Apparat, welcher im wesentlichen besteht in der Aufrechthaltung [Rechtfertigung, s.u. §4, 40d] [17] und Anwendung der beschwerlichen Entwickelungsschemata (D), (E), (F),... sub 14 für alle möglichen durch Auflösung von Gleichungen noch *nach arithmetischen Regel* gewonnen Ausdrücke.

[16] Mi permetto di far notare una certa leziosità nella scrittura schröderiana: *Entwickelung* al posto di *Entwicklung*, espressione più scorrevole della precedente.

[17] Le parentesi sono dell'autore.

KAPITEL 2

[Das Auflösungsproblem]

20. *Theorem. Die Gleichung*

$$xa + ya_1 = 0$$

ist vollkommen äquivalent mit den beiden:

$$xy = 0 \qquad \text{und} \qquad a = ux_1 + y$$

- *unter u eine arbiträre Klasse verstanden* [1]. Die letzte von diesen Gleichungen lässt sich auch noch in den Formen schreiben:

$$a = (u + y)x_1, \quad a = (uy_1 + y)x_1, \quad a = ux_1y_1 + y,$$

welche nach den Zwecken, die man verfolgt, verschiedene Vorzüge besitzen.

Um zunächst diese verschiedenen Formen auf einander zurückzuführen, hat man einerseit zu beachten dass

$$u + y = u(y_1 + y) + y = uy_1 + uy + y = uy_1 + y,$$

idem man nach 10 [Absorptionsgesetz] der vorletzte Term von dem letzten absorbirt wird - sowie andrerseits, dass, wofern nur die Gleichung $xy = 0$ richtig ist, auch

$$x_1y = x_1 + xy = (x_1 + x)y = y$$

sein muss.

Im übrigen ist behufs *Beweises* sowol zu zeigen, dass aus der ersten Gleichung des Theorems die beiden andern folgen, als auch, dass umgekehrt die letzteren zusammen die erste bedingen. Der ganze zerfällt demnach in mehrere Theilbeweise.

Beweis I. [$\alpha \Rightarrow \beta$] [2] Wir multipliciren die erste Gleichung mit x [$x \cdot (xa + ya_1)$], desgleichen mit y [$y \cdot (xa + ya_1)$] und summiren [$xxa + xya_1 + xya + ya_1$], so kommt nach 5 [Idempotenz]:

$$xa + xya_1 + yxa + ya_1 = 0,$$

oder, weil nach der Voraussetzung die beiden äussersten Terme *sich wegheben* (d.i. zusammen 0 geben), so bleibt $xy(a + a_1) = 0$, das ist $xy = 0$, wie zu zeigen war. [q.e.d. I.]

Behufs Ableitung der zweiten Gleichung stellen wir auf: den

---

[1] Ho ritenuto opportuno dedicare un'intera sezione a questo teorema, in quanto in esso culmina il calcolo schröderiano [**KY01**, pp. 27 e segg.].

[2] Per il significato di α, β e γ, rimando alla parte italiana.

Hilfsatz. Wenn $ab = 0$ ist, so kann $a = ub_1$ gesetzt werden, | *worin u unbe-*
Seite 21 *stimmt ist.* Diese beiden Gleichungen sind überhaupt äquivalent mit einander.

Beweis. [des Hilfsatzs] Jedenfalls kann nach 14 gesetzt werden: $a = vb + ub_1$ für gewisse vorderhand noch unbestimmte Klassen u und v. Multipliciren wir aber diese Gleichung mit b [$ab = vbb + bub_1 = vb + 0 = vb = 0$], so entsteht im Hinblick auf die Voraussetzung: $0 = vb$, und kann dieser Term unterdrückt, also blos $a = ub_1$ gesetzt werden. Dass alsdann aber u durch das Datum der Aufgabe nicht weiter bestimmt ist, sondern gänzlich willkürlich bleibt, folgt daraus, dass wir aus der letzten Gleichung durch Multiplikation mit b auf die erstere $ab = 0$ zurückschliessen können, welche Bedeutung auch u haben möge. [q.e.d.]

Der ebene bewiesene Hilfsatz erscheint als specieller Fall des Haupttheorems 20, wenn in diesem $x = b$ und $y = 0$ gedacht wird.

Beweis II. [$\alpha \Rightarrow \gamma$] Nach 16 zerfällt die Voraussetzung in $xa = 0$ und $ya_1 = 0$. Die erste von diesen Gleichungen ist nach dem Hilfsatze einerlei mit: $a = ux_1$, worin aber jetzt u nicht vollkommen beliebig ist, sondern so bestimmt werden muss, dass auch die zweite Gleichung erfüllt wird. Wir haben nach 18 [de Morgans Gesetze] und 13 [$(a_1)_1 = a$]: $a_1 = u_1 + x$, und dies, mit y multiplicirt, gibt $0 = u_1y + xy$, [als $ya_1 = 0$] oder wegen $xy = 0$ geradezu: $0 = u_1y$. Daraus fliesst nach dem Hilfsatze: $u_1 = vy_1$ oder $u = v_1 + y$, und Einsetzung dieses Werthes [in $a = ux_1$] gibt: $a = (v_1 + y)x_1$, worin nun v_1 ebenso v vollkommen beliebig ist, und daher schliesslich auch durch das Zeichen u ersetzt werden kann, welches (von dem vorhin betrachteten unabhängig) beliebig gedacht wird. Damit ist dann aber die zu beweisende Endgleichung in der zweiten [$a = (u + y)x_1$] [3] von ihrem vier angegebenen und bereits aufeinander zurückgeführten Formen gewonnen. [q.e.d. II.]

Dass u nun in der That auch volkommen beliebig bleibt, folgt nochmals mit aus

Beweis III. [$\beta \wedge \gamma \Rightarrow \alpha$] Wenn umgekehrt $a = ux_1 + y$ und $xy = 0$ ist, so haben wir: $a_1 = (u_1 + x)y_1$, mithin:

$$xa + ya_1 = x\,\overbrace{(ux_1 + y)}^{a} + y\,\overbrace{y_1(u_1 + x)}^{a_1} = xy = 0\ \text{[4]},$$

also gilt dann die ursprungliche Gleichung $xa + ya_1 = 0$, welches immer die Bedeutung von u gewesen sein mochte. [q.e.d. III.] [5]

Anmerkung. Es kommt nicht selten vor, dass in dem Endresultat $a = ux_1 + y$ der den arbiträren Faktor u enthaltende Term ux_1 gänzlich unterdrückt und rundweg $a = y$ geschrieben werden kann. Als hinreichende Bedingung für diese Resorption des arbiträren Termes erkennt man aus der vierten Form [$a = ux_1y_1 + y$] der Endgleichung die Annahme $x_1y_1 = 0$. Diese Bedingung ist auch nothwendig,

---

[3] Dato che sia u che v sono arbitrari, si può rinominare v_1 come u.

[4] Le parentesi graffe sono mie.

[5] Fine della dimostrazione del teorema 20.

denn aus | $ux_1 + y = y$ folgt durch Multiplikation mit y_1, dass $ux_1y_1 = 0$ sein müsse *für jedes* u, somit auch für $u = 1$. Seite 22

So *oft* demnach, ausser $xy = 0$, auch noch $x_1y_1 = 0$ *ist, haben wir einfacher:* $a = y$*, und vice versa.*

1. [Über das Hauptsatz 20]

Der Lehrsatz 20 ist nun das *Haupttheorem*, in welchem der ganze Logikkalkul gipfelt.

Dasselbe setzt uns in den Stand, aus einer beliebigen Gleichung eine beliebige Klasse a zu *eliminiren*. Wie wir in 14 sahen, kann die Gleichung immer in der Form $xa + ya_1 = 0$ geschrieben werden, und ist dann $xy = 0$ die *Resultante* der Elimination von a.

Und ferner können wir nach ihm jede verlangte Klasse a aus der Gleichung selbst *berechnen*, die Gleichung nach dieser Unbekanntes *auflösen* - eine Aufgabe, die im allgemeinen nicht völlig bestimmt ist; es umfasst der Ausdruck: $a = ux_1+y$ für ein von *nichts* bis *alles* [6] variierendes u die sämtlichen *Wurzeln* a der Gleichung.

Was von der *einen* Gleichung gesagt ist, gilt auch *für jedes System von (logischen) Gleichungen* [7], da ein solches nach 16 und 17 stets einer einzigen Gleichung äquivalent ist, welche die in den gegebenen Gleichungen vorkommenden Klassensymbole nebst deren Negationen lediglich als *multiplikative* oder *additive* Operationsglieder enthält. Ich will die genannte die stellvertretende oder *vereinigte Gleichung* des ganzen Systems nennen. Der gewöhnlich axiomatisch angenommenen Satz, dass *die Reihenfogle und Gruppirung der Prämissen für die Conclusion gleichgültig* sei, läuft darnach einfach hinaus auf die Inanspruchnahme des Commutations- und Associationsgesetzes 2d und 3d für die Terme der vereinigten Gleichung.

Wie ferner ein erstes, so lässt auch ein zweites und darnach ein drittes u.s.w. Klassensymbol sich aus dem Systeme der Gleichungen, das ist aus der vereinigten Gleichung, eliminiren, mithin überhaupt ein jedes *System von Klassensymbolen*. Denkt man sich das Polynom der vereinigten Gleichung *entwickelt* nach den zu eliminirenden Symbolen, so ist es leicht, den Satz zu beweisen, dass allgemein *die Resultante der Eliminaton eines beliebigen Systems von Klassen* [8] *aus einem Gleichungensystem gefunden wird, indem man das Produkt der Coefficienten* (dieser nach den Eliminanden entwickelten vereinigten Gleichung) $= 0$ *setzt.*

---

[6] $\forall u (0 \leq u \leq 1)$.

[7] In virtù della legge di Schröder. Si noti come l'autore usi l'espressione *System* per indicare un *insieme*. Un po' come farà Dedekind. Nonostante l'ammirazione per Cantor, Schröder preferirà sempre usare *System* al posto del nuovo *Menge*. In alcuni casi, utilizzerà come sinonimo di 'System' anche *Gebiet* con tutti i problemi del caso.

[8] Ormai, è quasi superfluo notarlo, ma Schröder chiama *insieme di classi* per intendere un insieme di *simboli* di classe. Almeno in questo testo, Schröder non ha mai a che fare con delle classi vere e proprie, ma con dei simboli, con delle lettere senza significato.

So ist in der That $pqrs = 0$ die Resultante der Elimination von a und b aus der Gleichung:

$$pab + qab_1 + ra_1b + sa_1b_1 = 0\,^9,$$

und so weiter. *Die Reihenfolge und Gruppirung der successiven part|iellen oder*
Seite 23 *Einzeleliminationen* von Klassen oder untergeordneten Systemen solcher, die man etwa anstatt der simultanen Elimination des ganzen Systems exekutiren mag, kann hiernach ebenfalls *als eine irrelevante nachgewiesen* werden.

Um übrigens das Geschäft der Entwickelung der vereinigten Gleichung nicht bis zu Ende durchführen zu müssen, kann es Vortheil gewähren, noch Hilfsätze aufzustellen - deren vollständige Darlegung ich hier nicht beabsichtige. Ich begnüge mich mit dem Hinweise darauf, dass schon bei *einem* Eliminanden die Herstellung der homogenen Form nicht erforderlich ist, indem als Eliminationsergebniss von a aus der Gleichung $xa + ya_1 + z = 0$ die $xy + z = 0$ gemerkt werden kann, sonach der constante (d.i. der von a unabhängige) Term nur einfach abgetrennt und alsdann der nach der früheren Regel gebildeten resultirende Gleichung wieder unverändert zugefügt zu werden braucht. Aehnlich sei beispielweise noch $pq + rs = 0$ angeführt als das Ergebniss der Elimination von a, b aus der Gleichung $pa + qa_1 + rb + sb_1 = 0$.

Von Wichtigkeit ist indess die Bemerkung, dass die Ergebnisse der Elimination eines Symbols a aus mehreren getrennten Gleichungen, die wir uns schliesslich zu einem einzigen Ausspruche zusammengefasst denken wollen, doch weniger umfassend sind, als die Resultante seiner Elimination aus der vereinigten Gleichung von jenen. Z.B. wird a aus jeder der beiden Gleichungen

$$xa + ya_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad pa + qa_1 = 0$$

gesondert eliminirt, so lautet die Zusammenfassung der Eliminationsergebnisse:

$$xy + pq = 0,$$

- gerade so, wie sie auch lauten würde, wenn in der zweiten Gleichung b, b_1 statt a, a_1 gestanden wäre und man diese vier Grössen eliminirt hätte; dagegen ist die Resultante der Elimination von a aus der vereinigten Gleichung:

$$(x + p)(y + q) = xy + xq + yp + pq = 0$$

umfassender als die vorige, indem sie ausser $xy = 0$ und $pq = 0$ auch noch besagt - was daraus allein nicht folgen würde -, dass auch $xq = 0$ und $yp = 0$ sein muss.

Es ist also nicht gleichgültig, ob man erst vereinigt und dann eliminirt, oder ob man erst eliminirt und dann vereinigt. Um das *volle* Eliminationsergebniss zu gewinnen, muss man die erstere Geschäftsordnung einhalten. Nur bei solchen Gleichungen, die den Eliminanden gar nicht enthalten, ist deren nachträgliche Heranziehung gestattet: $xa + ya_1 = 0$ und $z = 0$ gibt auf beide Arten: $xy + z = 0$. |
Seite 24 *Mit dem einfachen Mitteln des Theorems 20 sind wir* nicht nur *im Stande*, ein einzelnes Klassensymbol, sondern überhaupt *jede logische Funktion* $f(a, b, c\ldots)$

[9] Cioè, i coefficienti devono essere indipendenti tra loro, in quanto $xy = 0 \to x + y = 0$.

eines verlangten Systems $a, b, c, \ldots$ *solcher Klassensymbole zu berechnen*, nämlich dieselbe auszudrücken durch ein beliebiges System von anderen Klassensymbolen.

Zu dem Ende eliminire man jedenfalls zuerst die ausser Betracht gebliebene Symbole, welche weder zu den letzteren gehören, noch in dem Funktionsausdruck f vorkommen, aus dem gegebenen System von Gleichungen. Alsdann bezeichne man den erwähnten Funktionsausdruck mit dem Namen eines neuen Klassensymbols - ich will sagen mit ω. Hierdurch tritt einfach die Gleichung $\omega = f(a, b, c, \ldots)$ zu dem gegebenen System, resp. zur letzteren Eliminationsresultante hinzu, und ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, das neue Gleichungssytem unter Elimination von $a, b, c, \ldots$ nach der Unbekannten ω aufzulösen, das ist eben auf die schon in 20 gelöste Aufgabe, ein einfaches Klassensymbol zu berechnen. Jene Aufgabe, eine gegebene Funktion von unbekannten Symbolen zu finden, ist daher im Logikkalkulgebiet nur scheinbar allgemeiner als diese auf *ein* unbekanntes Symbol bezügliche Aufgabe, und ist sie hiermit ebenfalls theoretisch erledigt.

Während in der Arithmetik die Anzahl der zu berechnenden oder zu eliminirenden Unbekannten in Beziehung steht zu der Anzahl der disponiblen Gleichungen, *sind im Logikkalkul*, wie man sieht, *das Eliminations- sowol als das Auflösungsproblem vollkommen unabhängig von der Zahl der gegebenen Gleichungen lösbar*, und besitz überhaupt diese Disciplin den seltenen Vorzug, dass sie die allgemeinste Aufgabe, welche innerhalb des Rahmens derselben erdacht werden kann, auch wirklich löst. Dieselbe dürfte aus diesem Gesichtspunkte als die volkommenste nicht minder wie elementarste Disciplin zu bezeichnen sein.

Mit dem bisherigen scheint mir alles das erledigt zu sein, was für die *Technik* des Kalkulus von Wichtigeit ist [mit Ausnahme der auf die *Interpretation* bezüglichen Bemerkungen.] [10]

Ich werde mir jedoch in §4 erlauben, noch weitere Betrachtungen - mit aus dem gegenwärtigen Pragraphen fortlaufend Nummern - anzufügen, denen meiner Meinung nach einiges theoretische Interesse zukommt, und schliesse die gegenwärtige Aufzählung mit der Anführung des Theorems von Robert Grassmann [**Gra72a**, S. 13], als eines solchen, welches (abgesehen von einem Buchstabenwechsel) seiner eigenen Umkehrung dual entspricht. Dasselbe lautet: |

2. [Ein Theorem von R. Grassmann]

21. *Theorem*. Wenn $ab = a$ ist, so muss $a + b = b$ sein. *Beweis*. $a + b = ab + b = b$ nach 10. [q.e.d.]	21d. *Theorem*. Umgekehrt, wenn $a + b = b$ ist, muss auch $ab = a$ sein. *Beweis*. $ab = a(a + b) = a$ nach 10d. [q.e.d.]

[10] Le parentesi sono dell'autore.

Seite 25 Die beiden nach diesem Satz einander gegenseitig bedingenden Gleichungen sind, wie man leicht sieht, äquivalent mit:

$$ab_1 = 0,$$

und drücken die *Unterordnung* des Begriffes a unter den b aus. ||

KAPITEL 3

[Über ein Problem von Boole]

Zur Illustration und als Anwendung der vorstehende Theorie gebe ich mit allen §3
Zwischenrechnungen die Lösung der von Boole [**Boo54**, SS. 146–149] gestellten

Aufgabe. Es werde angenommen, dass die Beobachtung einer Klasse von Erscheinungen (Natur- oder Kunsterzeugnissen, z.B. Substanzen) zu den folgenden allgemeinen Ergebnissen geführt hat.

$\boldsymbol{\alpha}$. *Dass, in welchem auch von diesen Erzeugnissen die Merkmale oder Eigenschaften A und C gleichzeitig fehlen* $[a_1c_1]$, *das Merkmal E gefunden wird, zusammen mit einem der beiden Merkmale B und D, aber nicht beiden* $[e(bd_1 + b_1d)]$.

$\boldsymbol{\beta}$. *Dass, wo immer die Merkmale A und D in Abwesenheit von E gleichzeitig auftreten* $[e_1ad]$, *die Merkmale B und C entweder beider sich vorfinden oder beide fehlen* $[(bc + b_1c_1)]$.

$\boldsymbol{\gamma}$. *Dass überall, wo das Merkmal A mit dem B oder E, oder mit beiden zusammen besteht* $[a(b+e)]$, *auch entweder das Merkmal C vorkommt oder das D, aber nicht beide* $[(cd_1 + c_1d)]$. *Und umgekehrt, überall wo von den Merkmalen C und D das eine ohne das andere wahrgenommen wird, da soll auch das Merkmal A in Verbindung mit B oder mit C* [1], *oder mit beiden zugleich auftreten.*

Es möge nun verlangt sein, dass ermittelt werde:

ersten, was in jedem gegebenen Falle aus der erwiesenen Gegenwart des Merkmals A in Bezug auf die Merkmale B, C und D geschlossen werden kann,

zweitens, auch zu entscheiden, ob irgendwelche Beziehungen unabhängig von der An- oder Abwesenheit der übrigen Merkmale bestehen zwischen derjenigen der Merkmale B, C, D (und bejahendenfalls welche?),

drittens, in ähnlicher Weise zu beantworten, was aus dem Vorhandensein des Merkmals B folgt in Bezug auf A, C, D, und endlich

viertens zu constatiren, was für letztere A, C, D an sich folgt. |

Man bemerkt, dass in jedem der 3 Data α, β, γ die bezüglich der Merkmale Seite 26
A, B, C, D gegebene Auskunft verquikt erscheint mit einem andern element E, über welches wir in unseren Schlussfolgerungen nicht zu sagen wünschen [2]. Es

---

[1] Così nel testo. Si tratta di una svista di Schröder: al posto di c va e, *dass soll auch das Merkmal A in Verbindung mit B oder mit E, oder mit beiden zugleich auftreten* $[a(b+e)]$. Vedi in appendice l'originale booleano.

[2] Vedi il primo volume delle *Lezioni* dove questo passo viene riportato alla lettera [**Sch66b**, pp. 523–524].

wird deshalb erforderlich sein, das der Eingenschaft E entsprechende Symbol zu eliminiren aus dem System der Gleichungen, in welches sich die Daten einkleiden lassen werden.

Die ganze Klasse der Fälle von Erscheinungen, in welchen sich eines der Merkmale $A, B, C \dots$ vorfindet, werde nun mit dem entsprechenden Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets bezeichnet [3].

Um nicht auf ein weitläufiges Gebiet von Betrachtungen mich einlassen zu müssen, will ich an dieser Stelle darauf verzichten, über die *Interpretation*, d.h. die Einkleidung der Data in Formeln, sowie auch die Rückübersetzung der Formelergebnisse in die Wortsprache, allgemeine Principien aufzustellen - um so mehr, als ich glaube, das hier einschlägige der Divination des Lesers ohne weiteres überlassen zu können, und es mir vor allem nur darum zu thun ist, den Gang des Kalkuls darzulegen, wie er sich auf dem von uns eingenommenen Standpunkte im Gegensatz zu dem Boole'schen nunmehr einfacher gestaltet [4].

Im engsten Anschluss an der Worttext übersetzen sich unsere Data α, β, γ bezüglich in die nachstehenden Gleichungen der ersten Colonne:

$$\begin{array}{ll|ll}
\alpha. & a_1c_1 = xe(bd_1 + b_1d), & \alpha'. & a_1c_1(e_1 + bd + b_1d_1) = 0, \\
\beta. & e_1ad = y(bc + b_1c_1), & \beta'. & ad(bc_1 + b_1c)e_1 = 0, \\
\gamma. & a(b + e) = cd_1 + c_1d, & \gamma'. & a(b + e)(cd + c_1d_1) \\
 & & & +(cd_1 + c_1d)(a_1 + b_1e_1) = 0,
\end{array}$$

⌈Come detto sopra (nella parte italiana), la x ed y in α' e β' sono necessarie per trasformare un'inclusione (che in realtà sarebbe un'implicazione) in un'identità, secondo il modello: $a \subseteq b = x \cdot b$. Nel primo volume delle *Lezioni*, in cui si assume come primitiva la relazione di inclusione, rispetto a quella d'identità, le prime due premesse vengono scritte come: $a_1c_1 \subseteq (bd_1 + b_1d)e$ e come $ade_1 \subseteq bc + b_1c_1$ [**Sch66b**, p. 523]. Il segno di inclusione sostituisce quello qui presente d'identità, in quanto Schröder si doveva essere reso conto del carattere condizionale delle

[3] [**Sch66b**, p. 523].

[4] Riguardo allo scopo della risoluzione di questo e di altri problemi simili, Schröder avrà anche modo di aggiungere: *Alle [diese Aufgaben] können sie dazu dienen, die Kraft der rechnerischen Methode gegenüber den herrkömmliche schulmässig verbalen Überlegungsweisen in's rechte Licht zu setzen, jene als die überlegene zu erproben* [**Sch66b**, p. 522] [Tutti (questi esercizi) possono servire a porre in una corretta luce la forza del metodo calcolistico a confronto delle tradizionali considerazioni verbali scolastiche]. Incidentalmente, non si può non notare l'analogia con questo passo tratto dalla *Begriffschrift* di Frege: *(...) fand ich ein Hindernis in der Unzulänglichkeit der Sprache, die bei aller entstehenden Schwerfälligkeit des Ausdruckes doch, je verwickelter die Beziehungen wurden, desto weniger die Genauigkeit erreichen liess, welche mein Zweck verlangte. Aus diesem Bedürfnisse ging der Gedanke der vorliegenden Begriffsschrift hervor* [**Fre79**, p. iv] [(...) io trovai un ostacolo nell'inadeguatezza del linguaggio [naturale], che nonostante tutte le pesantezze delle sue espressioni, più complicate divenivano le relazioni, tanto meno riuscivo a raggiungere quella precisione che il mio scopo esigeva. Da questa esigenza saltò fuori l'idea della presente *scrittura concettuale* [Begriffsschrift]].

prime due premesse (ma si veda in appendice il testo booleano, in cui i dati vengono espressi in forma equazionale). Se ne era accorto Peirce nel 1880 nel suo *On the Algebra of Logic* (si veda [**HW60**, p. 136 e segg.] e la sua traduzione nell'Appendice F) e Frege in uno dei suoi scritti postumi, *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift* del 1880/81 (si veda [**Fre86**, p. 120 e segg.] e la traduzione nell'Appendice G). Ad ogni modo, le espressioni succitate delle *Lezioni* continuano ad essere ambigue; Schröder intendeva dire (in simboli moderni) $(-A \cap -C) \to ((B \cap -D) \vee (-B \cap D))$ e $(A \cap D \cap -E) \to ((B \cap C) \vee (-B \cap -C))$. Purtroppo, come già detto, l'autore non distingueva tra operazioni e connettivi. In questo errore è caduto di recente anche Peckhaus, osservando a proposito dell'*Operationskreis*: *Il suo [i.e. di Schröder]* Operationskreis des Logikkalkuls *consiste di 40 proposizioni numerate, di cui le prime 20 riguardano i **connettivi logici** diretti (addizione e moltiplicazione) e la seconda parte i loro inversi* [**Pec04**, p. 31]. È, invece, cruciale distinguere in Schröder le operazioni come $\cap$ o $\cup$ dai connettivi logici $\wedge$ e $\vee$. ⌋

in welchen x, y unbestimmte Klassen vorstellen. Als zweite Colonne haben wir dieselben auf 0 gebrachten Gleichungen daneben geschrieben, wo bei den beiden ersteren diese Operation verbunden worden ist mit der Elimination jener unbestimmten Klassensymbole x, y gemäss dem *Hilfsatze* unter 20.

1. [Zweite Antwort]

Das Ergebniss der Elimination von e besteht nach Seite 23 nun aus dem von e, e_1 freien Gliede der Summe dieser letzteren drei Gleichungen:

$$a_1c_1(bd + b_1d_1) + ab(cd + c_1d_1) + a_1(cd_1 + c_1d),$$

dessen erster Term a_1c_1db noch in den letzten a_1c_1d nach dem Absorptionsgesetze eingeht, vermehrt um das Produkt der Coefficienten von e und e_1 - das Ganze gleich Null gesetzt. Der Coefficient von e ist aber gleich $a(cd + c_1d_1)$, der von e_1 ist gleich |

$$a_1c_1 + ad(bc_1 + b_1c) + b_1(cd_1 + c_1d);$$

das Produkt beider ist gleich ab_1cd, also die Resultante: Seite 27

$$a_1(cd_1 + c_1d + b_1c_1d_1) + a(bcd + bc_1d_1 + b_1cd) = 0,$$

oder durch Zusammenziehung zweier Terme:

$$\delta. \qquad a(cd + bc_1d_1) + a_1(cd_1 + c_1d + b_1c_1d_1) = 0.$$

Das Produkt der Coefficienten von a und a_1 in dieser Gleichung verschwindet nach 7 $[aa_1 = 0]$ identisch; die Elimination von a aus ihr führt also auf $0 = 0$, womit in Beantwortung der *zweiten* Frage bewiesen ist, dass *zwischen den Merkmale* B, C *und* D für sich hinsichtlich ihrer An -oder Abwesenheit *keine unabhängige Beziehung besteht.*

2. [Erste Antwort]

Die Gleichung δ ist darnach äquivalent ihrer Auflösung nach a. Als solche findet sich geradezu:

$$\varepsilon. \qquad a = cd_1 + c_1d + b_1c_1d_1,$$

da auch die Negationen der Coefficienten von a und a_1 in δ disjunkt sind [vgl. die *Anmerkung* zu 20] [5]; betrachtet als entwickelt nach den Symbolen c, d erscheint nämlich der eine Coefficient geradezu als die Negation des andern.

Das Ergebniss ε, welches nebenbei auch in den äquivalenten Formen:

$$a = cd_1 + c_1d + b_1c_1 = cd_1 + c_1d + b_1d_1 = cd_1 + c_1d + b_1(c_1 + d_1)$$

angeschrieben werden könnte, beantwortet nun die *erste* der gestellten Fragen, und zwar dahin: *Wo immer das Merkmal A zu findet ist, muss auch das Merkmal C oder das D vorliegen, aber nicht beide zugleich, oder aber es müssen beide zusammen mit dem Merkmal B fehlen,* und umgekehrt: *wo die Merkmale B, C, D alle drei fehlen, sowie auch, wo von den Merkmalen C, D das eine ohne das andere vorliegt, da muss auch das Merkmal A sich finden.*

3. [Dritte Antwort]

Des weiteren muss nun b aus der Resultante δ eliminirt werden; es folgt unmittelbar:

$$\zeta. \qquad acd + a_1cd_1 + a_1c_1d = 0,$$

wonach die Gleichung δ sich vereinfacht zu $b\cdot ac_1d_1 + b_1\cdot a_1c_1d_1 = 0$ [6], und daraus gemäss dem vierten Auflössungschema sub 20 [$a = ux_1y_1 + y$] sich berechnet: $b = (a_1 + c + d)(a + c + d)v + a_1c_1d_1$ [7] oder

$$\eta. \qquad b = (c + d)v + a_1c_1d_1$$

für eine unbestimmte Klasse v. Man wird bemerken, dass dieses Ergebniss einfacher ist als das von Boole angegebene, wie denn auch in dieser Richtung ein Vorzug unsrer Behandlungsweise vor der Booleschen nachweisbar ist.

⌈ Come già osservato, sono due i temi costanti nell'opera di Schröder: il problema della soluzione (in cui culmina tutto il suo lavoro) e l'attenzione verso l'aspetto simbolico in tutti i sensi della parola. Non solo come indicatore di un atteggiamento formale, ma anche di uno estetico. Non tutti i simboli sono uguali per Schröder e lui pensò sempre di aver trovato quello giusto. La polemica, qui, contro Boole

---

5 Le parentesi sono dell'autore.

6 NB i puntini di moltiplicazione dopo il primo fattore di ogni addendo.

7 Il teorema 20 recita: $xa + ya_1 = 0$; qui, viene esemplificato dalla formula $b(ac_1d_1) + b_1(a_1c_1d_1) = 0$, con $a = b$, $x = ac_1d_1$ e $y = a_1c_1d_1$. In base alla quarta formula del teorema, otteniamo: $b = u(ac_1d_1)_1(a_1c_1d_1)_1 + (a_1c_1d_1) = u(a_1+c+d)(a+c+d) + a_1c_1d_1$ che è quanto calcola Schröder nel testo, ponendo la variabile $v = u$.

troverà un riscontro nella polemica contro Dedekind nel terzo volume delle *Lezioni* e in quella contro Peano negli ultimi scritti. Per quanto riguarda il rapporto con Dedekind, Schröder scrisse [**Sch66c**, p. 353]: *Der Leser verfügt hiermit über den* Schüssel *zur Übersetzung der einen Darstellung der Kettentheorie in die andre. Wie zu sehn ist, ist unsre Bezeichnungsweise die* ***ausdrucksvollere*** [Il lettore ha con ciò a disposizione la chiave per tradurre una rappresentazione della teoria delle catene nell'altra. Come si può vedere, il nostro simbolismo è il più espressivo]. E più in basso, *(...) trotz allem unsre Darstellung der Kettentheorie an* Übersichtlichkeit *keiner andern - auch derjenige eines Meisters der Präzision und Knappheit, wie es ihr Urheber [d.h. Dedekind] ist, nicht - nachstehen wird* [malgrado tutto, la nostra rappresentazione della teoria delle catene è seconda a nessun'altra per la sua perspicuità - compresa quella di un tale maestro della precisione e della concisione come è il suo autore]. Per quanto riguarda Peano, in uno dei suoi ultimi scritti, l'autore osserva: *In Bezug auf den, die gegenwärtige Phase der italienischen Pasigraphiebewegung noch charakterisirienden, Nichtgebrauch von Peirce's Algebra der Relative aber (für dessen ausgiebige Verwertung das von der italienischen Schule adoptierte Bezeichnungssytem beinahe ein* Hindernis *bildet) kann ich mich nun kurz fassen, indem ich das Gleichnis unseres Einführenden (in der 1. Sektion, Herrn Minkowski) auf die Schule anwende: von denen, die sich immer noch der Segelboote bedienen, während die Dampfschiffe bereits erfunden sind* [**Sch98b**, p. 161] [Io mi posso brevemente figurare l'attuale fase del movimento pasigrafico italiano, ancora in via di caratterizzazione, in rapporto al non uso dell'algebra dei relativi di Peirce (per la cui adeguata valutazione il sistema ideografico adottato dalla scuola italiana costituisce quasi un ostacolo), applicando una similitudine proposta dal nostro introduttore [ai lavori] (il signor Minkowski, nella prima sezione [del presente volume]) alla scuola [di Peano]: coloro che si servono ancora delle barche a vela, quando sono già stati scoperti i battelli a vapore]. Non sono stato in grado di rintracciare questo riferimento. In [**Rud98**, p. 45] si trova scritto:

> Dienstag, den 10. August.
> Sektionssitzungen
> I. Sektion: Arithmetik und Algebra.
>
> Die Sektion versammelte sich vormittags 8 Uhr im Auditorium 6^d des eidgenössischen Polytechnikus. Der Einführende, Prof. Minkowski, begrüßte die Anwesenden und lud zur Wahl des Bureaus ein. Es wurden gewählt:
>
> Als Präsident: Herr F. Mertens,
> “ Vicepräsident: “ G. Peano,
> “ Sekretär: “ E. Amberg.
>
> [Martedì, 10 agosto.
> Sedute
> I. Sezione: aritmetica e algebra.

La sezione si è riunita alle 8 di mattina nell'auditorio 6^d del politecnico svizzero. Il prof. Minkowski, che introdusse i lavori, ha salutato i presenti e ha invitato a scegliere gli incarichi. Vennero selezionati:

come presidente: il signor F. Mertens,
" vicepresidente: " G. Peano,
" segretario: " E. Amberg.]

[**Sch98b**, ivi]. In quell'occasione Minkowski non presentò un suo contributo scritto. Può darsi che la metafora a cui allude Schröder fosse stata pronunciata *verbalmente* durante l'introduzione ai lavori. Peccato non sapere a cosa si riferisse Minkowski... Ho cercato invano un suo possibile scritto nelle opere complete di Minkowski [**Min11a**] e [**Min11b**]. E come non ricordarsi la disputa con Frege?⌋

Letzterer nämlich findet:

$$b = (a_1cd + acd_1 + ac_1d)v + a_1c_1d_1, |$$

Seite 28 eine Form, die unserer Gleichung η durch Entwicklung nach den Symbolen a, c, d unter Berücksichtigung von ζ abgeleitet werden könnte, am raschesten aber zu gewinnen ist, wenn man den Koefficientem von b in der homogen gemachten Resultante δ einfach als ein nach c, d entwickeltes Aggregat negirt, und den vom zweiten Term desselben herrührenden Theil in das von v freie Glied einverleibt.

In Worten beantwortet sich unsere *dritte* Frage nun nach η wie folgt: *Bei Anwesenheit des Merkmals B muss auch C oder D vorliegen, oder aber C und D müssen mit A zugleich fehlen.* Umgekehrt: *wenn A, C und D gleichzeitig fehlen, so findet sich B.*

4. [Vierte Antwort]

Das Ergebnis ζ ist endlich äquivalent seiner Auflösung nach a:

$$\vartheta. \qquad a = w(c_1 + d_1) + cd_1 + c_1d = wc_1d_1 + cd_1 + c_1d \text{ [8]}$$

- unter w eine unbestimmte Klasse verstanden - und lehrt, *dass aus der Anwesenheit von A geschlossen werden kann auf die Abwesenheit von wenigsten einem der beiden Merkmale C, D,* und umgekehrt *aus dem Auftreten von einem der letzteren Merkmale allein (ohne das andere) geschlossen werden kann auf die Anwesenheit von A* - in Beantwortung der letzten von unseren Fragen.

Noch grösser als bei vorliegendem ist der Contrast der Boole'schen Rechenarbeit mit der unsrigen bei einem andern von ihm auf [**Boo54**, SS. 118–120] und

[8] Vorrei far notare come nella risoluzione di questo problema si sia fatto abbondante uso della distributività.

[**Boo54**, SS. 128–129] behandelten Problem [9], bei welchem es darauf ankommt, aus den Prämissen:

$$ab = x(cd_1 + c_1d), \qquad bc = y(ad + a_1d_1), \qquad a_1b_1 = c_1d_1$$

die Schlüsse zu ziehen:

$$a_1b_1c + abc = 0, \quad a = uc_1 + b_1c, \quad [b = vc_1 + a_1c], \quad c = w(ab_1 + a_1b)\ ^{10},$$

ein Problem, welches aber nicht so vielerlei interessante Wechselfälle darbietet [11].‖

---

[9] Ancora una volta, Schröder rinfaccia a Boole la superiorità del suo calcolo in termini di semplicità. Quello che colpisce è come mai, invece, Schröder non si sia discostato da Boole nel richiamarsi da vicino all'algebra. Questo rimprovero, come si ricorderà, era stato espresso nettamente dall'autore tedesco che sembrava voler emancipare maggiormente la logica dall'algebra. Il fatto, però, che il culmine di tutta la sua opera logica (e non mi riferisco solo al volume presente) consista nel problema della soluzione, la dice lunga sul tradimento di questo suo progetto. Schröder rimarrà, fino alla fine, un'algebrista. Si riporti alla mente le parole lette qualche pagina fa: *Der Lehrsatz 20 ist nun das Haupttheorem, in welchem der ganze Logikkalkul gipfelt*. Esatto, 'Gipfel', ovvero, cima, vetta, vertice; suo sinonimo è *Bergspitze*, la punta della montagna (da cui il verbo *gipfeln*, culminare). E cosa ci può essere sopra alla vetta? Forse il cielo, ma non altre rocce. Dopo il problema della soluzione ci possono essere ancora altre cose da trattare, ma abbiamo finito con la ricerca, con la scalata logica. Qualcuno potrebbe obiettare, che nel terzo volume delle *Lezioni*, Schröder manifesterà il tentativo di voler fondare la matematica sul calcolo dei relativi: *Endziel der Arbeit ist: zu einer streng logischen Definition des relativen Begriffes* Anzahl von- *zu gelangen (...)* [**Sch66c**, pp. 349–351] [meta finale del lavoro è giungere ad una rigorosa definizione logica del concetto relativo di *numero di-*]. Questo è vero. Ma solo dopo aver risolto il problema della soluzione. Questo avviene nella lezione quinta, mentre la teoria delle catene viene tradotta nella nona. Il fondazionalismo schröderiano è una sorta di sotto-prodotto di un risultato principale. Lo scopo è la risoluzione di un problema; fatto questo, ci si domanda cosa si possa fare con questi strumenti e si trova che si può svolgere con essi la teoria dei numeri, soddisfancendo anche ai bisogni estetici dell'autore, sempre attento a porre in evidenza la superiorità del suo simbolismo.

[10] La parentesi quadra è dell'autore.

[11] Qui Schröder semplicemente osserva che questi altri problemi booleani non sono così intriganti dal punto di vista calcolistico. Tuttavia, verrano trattati da Schröder nel primo volume delle *Lezioni* [**Sch66b**, pp. 528–530].

KAPITEL 4

[Die inverse Operationen]

§4 Ich gehe dazu über, die Theorie der vier Species des Logikkalkuls zu vervollständigen und also die Frage nach dem Begriffe und den Gesetzen *der beiden inversen Operationen* zu beantworten. Des Dualismus wegen braucht blos die eine derselben besprochen zu werden, und gebe ich dabei der Subtraktion vor der Division den Vorzug, also diesmal der ersten Stufe vor der zweiten. Da jedoch, wo ich eine Vergleichung zwischen beiden Operationen veranlassen will, oder wo er sich um die Grundlegung dazu handelt, werde ich sie beide berücksichtigen.

Gemäss dem auf anderen Gebieten herrschenden Herkommen sind die gedach-
Seite 29 te Operationen durch ihren Gegensatz zu den direkten | einzuführen, nämlich Differenz und Quotient resp. zu definiren als die Auflösungs der Gleichung [1]:

$$22\text{d.} \qquad c + b = a, \;\Big|\; 22. \qquad cb = a,$$

⌈Si noti che, adesso sulla sinistra non troviamo il teorema originale, ma il suo duale.⌋

nach der Unbekannten c.

Die Methode dieser Auflösung ist in §2 [Kapitel 2] gelehrt, und wissen wir darnach, dass die Wurzeln dieser Gleichungen ∞ vieldeutig sein werden. Indem ich mir die Ausdrücke $a - b$ und $a : b = \frac{a}{b}$ für eine bestimmte völlig eindeutig zu erklärende und weiter unten genauer specifirte Partikularlösung der betreffenden Gleichung reservire, will ich die *vollständige* oder *allgemeine* Auflösung der in Rede stehenden Gleichung mit:

$$23\text{d.} \qquad c = a \div b \;\Big|\; 23. \qquad c = a :: b$$

bezeichnen und im Gegensatz zu irgend welchen Partikularlösungen

die *volldeutige* Differenz | den *volldeutigen* Quotienten

nennen. In den Ausdrücken 23 dürfen übrigens die Klassen a und b nicht als beliebig oder auf's Gerathewohl gegebene angesehen werden, da die als Vorbedingung zur Bildung jener Ausdrücke angenommenen Gleichungen 22 eine Voraussetzung bezüglich dieser Klassen involviren. Die gedachte Voraussetzung ergibt sich durch regelrechte Elimination des Symbols c aus 22, und zwar springt als deren Resultante hervor:

---

[1] Come notato in precedenza, è dal problema della soluzione che scende tutto.

$$24\text{d.} \qquad a_1 b = 0. \;\Big|\; 24. \qquad a b_1 = 0.$$

Wie zunächst hieraus zu sehen ist, sind die beiden inversen Species des Logikkalkuls *keine unbedingt ausführbaren* Operationen; ihre Ausführbarkeit ist vielmehr an eine Bedingung 24 geknüpft, und erst in Verbindung mit dieser Gleichung vermag die 23 völlig die Gleichung 22 zu ersetzen.

Die Gleichung 24 - die linkerhand z.B. -, welche eine Mitbedingung für die Zulässigkeit der Annhame 22d oder die Vorbedingung dafür bildet, dass überhaupt von einer Differenz von a und b die Rede sein kann, will ich die *Werthigkeits-* oder *Valenzbedingung* dieses Ausdrück nennen, da sie schon erfüllt sein muss, wenn der Name $a \div b$ nur einen Sinn haben [2], wenn der Differenz eine Bedeutung oder ein Werth überhaupt zukommen soll [3]. Diese Valenzbedingung muss die nämliche sein für die volldeutige Differenz wie für jede Partikularisirung derselben, mithin auch für die weiter unten eindeutig erklärte $a - b$, und werden wir ihre Geltung, so oft wir fortan eine Differenz setzen, stillschweigend angenommen denken.

Dann aber können wir sagen, dass die Gleichungen 22 und 23 einander gegenseitig bedingen, und es darf also ein Summand zunächst | nur mittelst *volldeutiger* Subtraktion transponirt, d.h. auf die andere Seite des Gleichheitszeichens als Subtrahend geschafft werden. Seite 30

Als Werth von c findet sich nun in der genannten Weise:

$$\begin{array}{ll|ll} 25\text{d.} & a \div b = ab_1 + ub & 25. & a :: b = (a + b_1)(u + b) \\ & = a(b_1 + u) & & = a + ub_1 \\ & = ab_1 + uab & & = ab + ua_1 b_1 \end{array}$$

für ein *unbestimmtes* u - woferne nämlich Rücksicht genommen wird auf die Valenzbedingung 24 [$b \subseteq a$].

So lange, als über die gesuchte Klasse c in 23 [$c = a \div b$] keine andere Relation bekannt ist, als die Gleichung 22 [$c + b = a$], ist die Klasse u natürlich anzusehen als eine völlig beliebige, *arbiträre*. Durch anderweitige Aufschlüsse, die über den gesuchten Summanden c noch ausserdem gegeben werden oder schon gegeben

---

2 Ancora una volta si parla di *nomi* di a o b. Non esistono oggetti, solo segni [*Zeichen*].

3 Queste ultime parole sembrano contraddire le precedenti, in quanto si parla di un possibile *significato* [Bedeutung] della differenza. Il fatto che la teoria tratti solo segni, non vuol dire che essi, nella loro assoluta convenzionalità, non richiedano un uso consistente e obbediente a certe regole. Si è detto che per Schröder il segno $\emptyset$ è solo un segno. Certamente, ma una volta introdotto per soddisfare certi bisogni, non si può più usare liberamente. Senza dubbio, si può indicare l'infimo di un reticolo anche con β o $\boxplus$, ma una volta che si è concordato di usare β, β non può avere altri usi. Non è suscettibile di ulteriori significazioni. Il verbo *bedeuten* non implica un riferimento ad oggetti esterni alla teoria, ad enti in qualche modo concreti. Esso equivale a *gleichzusetzen sein mit*, cioè ad un rapporto. Un simbolo *bedeutet*, sta per, simboleggia; ma il suo *stare per* può derivare da un tessuto di relazioni. In questo caso dalla struttura complessiva del calcolo. Detto in maniera brutale, un segno *significa* nel momento in cui *serve a qualcosa* e non è ambiguo. È questo a richiedere Schröder: che ogni simbolo sia consistente e univoco. Ciò è sufficiente. Per quanto riguarda le funzioni, esse devono essere sempre definite.

sind - so namentlich, wenn c von vornherein bekannt sein sollte - kann u noch weitere Bestimmungen erfahren, und in concreten Fällen seines unbestimmten Charakters sogar gänzlich entkleidet werden. So würde es falsch sein, aus $a = a + 0$ nach unseren Regeln den Schluss zu ziehen, dass $a \div a$, das ist eben ua, gleich Null sein müsse *für ein arbiträres* u; da der zu berechnende Summand c oder 0 hier absolut bestimmt ist, haben wir vielmehr zu lernen, dass u oder wenigstens ua hier $= 0$ zu nehmen ist. Wird eine anderweitig bestimmte Klasse durch Transposition einer andern isolirt, so muss auch die andere Seite der Gleichung eine völlig bestimmte Klasse vorstellen, der arbiträre Term also eine Bestimmung erfahren, dass er nach den Regeln des Logikkalkuls eingeht.

Wir haben sonach die allgemeinen Folgerungen:

26d. $\begin{cases} a \div a = ua, \\ a \div 0 = a, \end{cases}$ 26. $\begin{cases} a :: a = a + u, \\ a :: 1 = a, \end{cases}$

und ferner sind speciell hervorzuheben die Werthe:

27d. $\begin{cases} 0 \div 0 = 0, \\ 1 \div 0 = 1, \end{cases}$ 27. $\begin{cases} 1 :: 1 = 1, \\ 0 :: 1 = 0, \end{cases}$

welche durchaus eindeutig bestimmt erscheinen, sowie die:

28d. $1 \div 1 = u,$ | 28. $0 :: 0 = u,$

welche ∞ vieldeutig oder genauer ausgedrückt geradezu *alldeutig* sind.

Ausdrücke wie $0 \div 1$ und $1 :: 0$ dagegen würden als *undeutig* zu erklären sein, d.h. nicht den geringsten Sinn haben, wenn je eine Veranlassung zur Bildung derselben vorläge.

Von den in 25 zusammengefassten Partikularlösungen der Gleilchungen 22
Seite 31 sind zwei specielle besonders hervorhebenswerth, nämlich die *weiteste*, welche sich für $u = 1$, und die *engste*, welche sich für $u = 0$ ergibt - wobei indessen nicht zu übersehen ist, dass der Dualismus erfordert, dem Falle $u = 1$ bei der einen den $u = 0$ bei der andern Operation gegenüberzustellen.

Als die eine stellt sich heraus

für $u = 1$:

29d. a minus $b = a,$

d.h. die (eindeutige erklärte) *Maximaldifferenz* ist gleich ihrem Minuenden.

für $u = 0$:

29. a durch $b = a,$

der *Minimalquotient* ist einerlei mit dem Dividenden.

Es hat demnach kein Interesse, die formalen Gesetze der entsprechenden Operationen, nämlich dieser (eindeutigen) *Maximalsubtraktion* und der *Minimaldivision* weiter zu verfolgen.

Bei der andern Annahme [$u = 0$] erhalten wir dagegen:

für $u = 0$:

30d. $a - b = ab_1.$

für $u = 1$:

30. $a : b = a + b_1 = \frac{a}{b}.$

Diese Ausdrücke, nämlich die hierdurch eindeutig erklärte

Minimaldifferenz | *Maximalquotient*

- gewissermassen die *Haupt-* oder *Principalwerthe* der volldeutigen oder Generalwerthe 25 - sollen Differenz und Quotient schlechthin dargestellt werden. Als *eindutige* Subtraktion resp. Division bezeichnen wir die zu ihrer Bildung dienenden Operationen.

Insbesondere folgt nun aus 30:

31d. $1 - b = b_1,$ | 31. $\frac{0}{b} = b_1,$

und gilt daher:

$$32. \qquad 1 - a = \frac{0}{a}$$

als ein gemeinschaftlicher Ausdruck für a_1 oder für die Negation von a. Dies ist zugleich (im Grunde) *die einzige Gleichung des Logikkalkuls, welche zu sich selbst dual ist* [4].

Da die Valenzbedingung in dem vorliegenden Specialfalle sich auf eine Identität reducirt, kann von derselben hier abgesehen werden; die Subtraktion einer Klasse von der 1 ist unbedingt ausführbar u.s.w.

Mit Rücksicht auf 31 hätten die fundamentalen Sätze 7 [$aa_1 = 0$ e $a + a_1 = 1$] und 13 [$(a_1)_1 = a$] nun auch in folgenden Formen angeschrieben werden können, in deren einigen es nützlich ist, sie gesehen zu haben: |

33.	$a(1-a) = 0$	[33d.]	$a + \frac{0}{a} = 1$
[34.]	$a \cdot \frac{0}{a} = 0$	34d.	$a + (1-a) = 1$
[35.]	$0 : \frac{0}{a} = a$	35d.	$1 - (1-a) = a$
[35f.]	$\frac{0}{1-a} = a$	[35df.]	$1 - \frac{0}{a} = a$

⌈Vorrei far notare come questa sezione, quasi sperimentale, denoti una certa trascuratezza. Per esempio, a sinistra, adesso ritroviamo l'enunciato principale e a sinistra i duali. Non esiste un 34 o un 35, ma solo un 34d e un 35d. Ho aggiunto io le numerazioni mancanti. Le ultime due le ho chiamate 35f (35 - Folgerung) e 35df (35 - Dual - Folgerung) in quanto sono delle semplici riscritture di 35 e 35d, rispettivamente. Inoltre, il grafico ha l'aria di una tabella incompleta.⌋

Der Ausdruck 30, mit c bezeichnet, ist bezüglich die Auflösung des folgenden Seite 32
Paares von Gleichungen:

36d. $c + b = a, \quad cb = 0,$ | 36. $cb = a, \quad c + b = 1,$

[4] Il duale di 32 è $0 + a = 1 - a$.

⌈Adesso si torna con il duale sulla sinistra.⌋

durch welches also:

$$37\text{d.} \qquad c = a - b\,[= a(1-b)] \mid 37. \qquad c = \tfrac{a}{b}\ [= a + (1-b)]$$

volkommen unzweideutig bestimmt ist. Wie von 36 auf 37, so kann auch umgekehrt von 37 auf 36 zurückgeschlossen werden, sobald man die Valenzbedingung 24 hinzuzieht, d.h. sobald man in der Voraussetzung 37d doch sicher miteingeschlossene Annahme gelten lässt, dass die gegebenen Ausdrücke einen Sinn haben. Dies gibt uns den für einen Kalkul der inverse Operationen fundamentalen Satz:

Ein Summand der einen Seite einer logischen Gleichung darf mittelst eindeutiger Subtraktion als Subtrahend immer dann (jedoch auch nur dann) transponirt werden, wenn derselbe mit den übrigen Gliedern der vorausgesetzten Summe disjunkt ist [5], oder wenn die Summe, wie ich sagen will, eine *reducirte* ist.

Ein Subtrahend dagegen - gleichviel ob er einer eindeutigen oder einer volldeutigen Differenz angehörig - darf immer als Summand versetzt werden [6].

Speciell folgt hiernach leicht aus 9 [$a \cdot 1 = a$ e $a + 0 = a$], dass

$$38\text{d.} \qquad a - 0 = a, \quad a - a = 0 \mid 38. \qquad \tfrac{a}{1} = a, \quad \tfrac{a}{a} = 1$$

ist, theilweise im Gegensatz zu 26.

Eine Gleichung, wie $a = b$, kann nunmehr auch in der Form $a - b = 0$ geschrieben werden, weil dieses einerseits die Valenzbedingung $a_1 b = 0$ involvirt, und andrerseits direkt ausspricht, dass $ab_1 = 0$ sein solle, cf. 17 [Schröders Gesetz] [7].

Durch die Coexistenz der Gleichungen 36 und 37 findet sich unsere Definition der eindeutige Differenz, die wir oben durch Partikularisiren der volldeutigen gewannen, noch einmal selbständig ausgedrückt: Weiss man von einer Klasse c nur
Seite 33 das eine, dass ihre | Summe mit einer gegebenen b eine andere a liefert [$c+b = a$], so ist c noch nicht vollständigt bekannt; wohl aber ist der gesuchte Summand c vollkommen bestimmt, $= a - b$, wenn man ferner weiss, dass er den andern b ausschliesst, dass also bc gleichzeitig 0 ist [8].

Die in $a - b$ vorgeschriebene logische Operation besitzt einen sehr geläufigen sprachlichen Ausdruck in Gestalt der Partikel: *ausgenommen*, *ohne*, indem $a - b$

---

[5] Per esempio, sia $a + b = c$; possiamo spostare b dall'altra parte, ottenendo $a = c - b$. Questo è fattibile se e solo se $bc + ba = 0$.

[6] Se $a - b = c$, allora $a = c + b$. Il passaggio non mi è del tutto chiaro, in quanto ogni addendo può essere pensato come minuendo; infatti, come nota lo stesso autore, $+a = -(-a)$.

[7] Ovvio. Sia $a = b$; spostiamo il b. Otteniamo: $a - b = 0$, o detto altrimenti, $ab_1 = 0$ (siccome sappiamo che $-b = b_1$ [31d]); adesso, facciamo lo stesso con a, $b - a = 0$; cioè, $ba_1 = 0$. Sommando i due risultati otteniamo: $ab_1 + a_1 b = 0$ che è la legge di Schröder.

[8] Detto altrimenti, qui Schröder sta richiedendo che la somma sia disgiunta; cioè non si possano sommare classi che si intersecano, altimenti il risultato non è univoco (infatti, dipende dal modo in cui si intersecano le classi).

die Klasse der a mit Ausschluss der b vorstellt [9], und die Valenzbedingung 24d $[b \subseteq a]$ die Voraussetzung ausspricht, dass diese ganz in jener enthalten sei. Es ist darnach gerechtfertigt, dass wir die Subtraktion als eine *Exception* bezeichnet [10].

Für die logische Division hat die Sprache keinen entsprechenden Ausdruck, doch begreift man leicht, dass sie auf eine *Abstraktion* in der That hinausläuft, indem behufs Ueberganges von einer Klasse cb zu der c, man *absehen* muss von den für die Klasse b charakteristischen Merkmalen [11].

1. [Distributiongesetz und Subtraktion]

Von den nun für die eindeutige Subtraktion geltenden Gesetzen will ich das Distributionsgesetz in den Vordergrund stellen:

$$39\text{d.} \qquad a(b-c) = ab - ac.$$

[*Beweis.* $a(b-c) = abc_1$ und $ab - ac = ab(a_1 + c_1) = abc_1$] [12]; denn von diesem wird bei den Discussionen des gemeinen Lebens allgemein Gebraucht gemacht, weshalb auch Boole als auf ein Axiom sich auf dasselbe stütze [13]. Im Hinblick auf dieses erscheint ihm der Satz des Widerspruchs 7 o 33 $a(1-a) = 0$ als weiter nichts wie eine Umschreibung des *specifischen* Gesetzes 5 $a = aa$ [14]. Zu bemerken ist jedoch, dass die Valenzbedingungen für beide Seiten der Gleichung 39d verschiedene sind; für die linke Seite nämlich: $b_1c = 0$ [15] und für die rechte blos $(a_1+b_1)ac$ oder $abc_1 = 0$ [16]. Mann kann daher durch unbedachte Anwendung des Satzes in Fehler kommen und es ist z.B. $aa - a$ *nicht* $= a(a-1)$, weil die

---

[9] Ovvero, la classe $a - b$ contiene tutti gli elementi che appartengono ad a ma non a b.

[10] Ovvio. $a - b$ potrebbe essere espresso verbalmente come, la classe degli a *eccetto* i b (che si suppone per 24d essere inclusi in a). Per esempio, la classe dei *Berliner* eccetto le viole.

[11] In questo caso, può essere d'aiuto una riformulazione della divisione; dire che $a : b$ è la stessa cosa che affermare $a + b_1$; in parole, la classe degli a più la classe di tutti coloro che non sono b. Usando l'esempio precedente, la divisione dei Berliner per le *sue* viole, dà come risultato i Berliner e tutti coloro che non suonano la viola. In questo senso, Schröder parla di *astrazione*, perché si astrae, si prescinde dalla presenza dei b (dei violisti).

[12] Le parentesi sono dell'autore. La dimostrazione del lato destro di 39d non mi è chiara; sicuramente $ab - ac = 0 \rightarrow ab = a_1 + c_1$.

[13] Schröder si riferisce a [**Boo58**, pp. 33–34], ma Boole non ne parla come di assiomi ma come di leggi *Laws*: *The equations (4)* $[z(x+y) = zx + zy]$ *and (6)* $[z(x-y) = zx - zy]$ *may be considered as exemplification of a* ***single general law****, which may be stated by saying,* that the literal symbols, $x, y, z, \&, c.$ are distributive in their operation [**Boo58**, p. 34] [Le equazioni (4) e (6) si possono considerare come un'esemplificazione di una singola legge generale, che si può affermare dicendo che i simboli letterali $x, y, z, \&, c.$ sono distributivi nelle loro operazioni].

[14] Infatti, George Boole scrive: *Quell'assioma di metafisica che è chiamato 'principio di non contraddizione' e che afferma che è impossibile per qualsiasi ente possedere una qualità e allo stesso tempo non possederla è una conseguenza della legge fondamentale del pensiero, la cui espressione è* $x^2 = x$ [l'idempotenza]. *Riscriviamo questa equazione nella forma* $x - x^2 = 0$*; allora si ottiene* $x(1-x) = 0$*]* [**Boo58**, p. 49].

[15] Schröder considera solo l'espressione dentro la parentesi tonda.

[16] Infatti, 24d ci dice che $(ab)_1ac = 0 = (a_1 + b_1)ac$.

Valenzbedingung für die Differenz $a - 1$, das ist $a_1 = 0$, im allgemeinen nicht erfüllt ist, während andrerseits $aa - a$ sehr wohl einen Sinn, nämlich den Werth 0 besitzt [17].

2. [Arithmetik]

Hinsichtlich der sonstigen Gesetze der logischen Subtraktion, welche den Vergleich mit denen der arithmetischen herausfordern, will ich mich auf die Besprechung der folgenden 4 Gruppen von Formeln der *Arithmetik* beschränken, in Gestalt von welchen die auf nicht mehr als drei allgemeine Zahlen bezüglichen Gesetze der Operationen erster Stufe vollständig zusammengefasst erscheinen. |

$$\text{I.}\qquad (a-b)+b=(a+b)-b=b-(b-a)=a.$$

$$\text{II.}\qquad \begin{cases} (a+b)-c = a+(b-c)=a-(c-b)= \\ \qquad\qquad = (a-c)+b=b-(c-a) \end{cases}$$

$$\text{III.}\qquad \begin{cases} [(a+b)-c]=a-(b+c) = (a-b)-c= \\ \qquad\qquad\qquad = (a-c)-b. \end{cases}$$

$$\text{IV.}\qquad \begin{cases} a-b = (a+n)-(b+n)=(a-n)-(b-n)= \\ \qquad = (n-b)-(n-a)=(a-n)+(n-b), \\ a+b = (a+n)+(b-n)=(a+n)-(n-b)= \\ \qquad = (a-n)+(b+n)=(b+n)-(n-a). \end{cases}$$

Seite 34 Nach 30d [$a - b = ab_1$] können wir für jeden der hier einander gleichgesetzten Ausdrücke den Werth angeben, nach 24d [$a_1 b = 0$] seine Valenzbedingungen anschreiben, diese auch nach 16 [$(a+b=0)=(a=0)(b=0)$] zu einer einzigen Gleichung vereinigen; mit Rücksicht auf diese können wir endlich jeden Ausdruck nöthingenfalls entwickeln nach den Symbolen, aus welchen er aufgebaut ist.

Dabei stellt sich nun das auffallende Ergebnis heraus, dass von den durch Vergleichung der arithmetischen Ausdrücke unter sich gewonnenen Gleichungen so ziemlich die *Hälfte* auch in der Logik Geltung hat unter der Voraussetzung, dass die Ausdrücke beiderseits gleichzeitig einen Sinn besitzen, d.h. unter den aus dem Anblick der beiden Seiten selbst ersichtlichen Valenzbedingungen.

Unter Zugrundelegung derselben Annhame bedarf die andere Hälfte der Gleichungen, um in der Logik gültig zu werden, der Zufügung eines *Correktionsgliedes* auf der einen Seite derselben - welches selbst eines allgemeinen Ausdrücks fähig ist.

Es würde mich zu weit führen, wenn ich für alle Combinationen der vorstehend verglichenen Ausdrücke dies hier im einzelnen rechtfertigen wollte. Jede von den einschlägigen Untersuchungen nebst ihrer geometrischen Deutung kann als

[17] Per la comprensione di questo passagio vedi la parte italiana corrispondente.

eine interessante Uebung für den Anfänger empfohlen werden. Von den nicht unmodificirt geltenden Sätzen sei deshalb nur weniges speciell hervorgehoben. Wir haben insbesondere:

ad I. $(a + b) - b = a - ab$ oder $a - b$; Correktionsglied $-ab$ oder $-b$.

ad II. $a + (b - c) = [(a + b) - c] + ac$; Correktionsglied ac.

ad III. gelten die algebraischen Sätze ganz unverändert, was nicht Wunder nehmen wird im Hinblick darauf, dass nach meinen formalen Untersuchungen [**Sch73**, S. 284] [18] die Sätze dieser Gruppe mit den reinen Gesetzen der direkten Operationen am unmittelbarsten zusammenhängen.

ad IV. $(a + n) - (b + n) = (a - b)(1 - n)$; |

Correktionsglied $-n(a - b)$; hieraus ersieht man, dass ein übereinstimmender Seite 35
Bestandtheil von Minuend und Subtrahend einer Differenz jedenfalls dann unterdrückt, die Differenz also immer dann mit ihm gekürzt werden darf, wenn derselbe gegen die anderen Bestandtheile disjunkt, wenn nämlich $na = 0$ und $nb = 0$ ist: *Beim Subtrahiren reducirter Summen von einander sind übereinstimmende Terme unbedenklich zu streichen.*

Statt nach Gesetzen der eindeutigen kann man auch nach denen der volldeutigen Subtraktion fragen.

Es ergeben sich die Werthe der nachstehend untereinander gestellten Elementarausdrücke, wenn man die rechts neben sie gestellten Gleichungen, eventuell unter Elimination von y und z, in Anwendung der Methoden des §2 [des Kapitels 2],

[18] Ho cercato invano questo riferimento. Probabilmente si tratta di una svista dell'autore. A pagina 284 del *Lehrbuch* si parla di 'sussunzione' e di 'divisione'. Invece, il gruppo III trova riscontro sempre nel *Lehrbuch* a p. 187, in una sezione dal titolo: *Gesetze für die Verbindung der Operationen erster Stufe unter sich. Ueberblick derselben* [Leggi per la connessione delle operazioni di primo grado tra loro. Sguardo d'insieme]. Proprio all'inizio, Schröder enuncia un principio fondamentale: *Sollen drei Zahlen durch zwei Operationen erster Stufe fortschreitend verbunden werden, so müssen diese Operationen entweder beide Additionen sein, oder sie müssen in einer Verknüpfung einer Addition mit einer Subtraktion in irgend einer Folge bestehen, oder endlich in einer Verknüpfung zweier Subtractionen miteinander* [**Sch73**, p. 187] [Se tre numeri $[a, b, c]$ vengono conessi successivamente tramite due operazioni di primo grado, allora queste operazioni devono essere entrambe delle addizioni $[(a + b) + c]$, oppure questi numeri devono stare nella connessione di un'addizione con una sottrazione in una successione qualunque $[(a + b) - c = a - (b + c)]$, o infine nella connessione di due sottrazioni tra loro $[(a - b) - c]$]. Si noterà che le due ultime formule messe da me tra parentesi appartengono al gruppo III.

nach der Unbekannten x auflöst:

$$\begin{array}{lll} x=(a+b)\div c & \text{aus} & x+c=a+b, \\ x=a+(b\div c) & \text{“} & x=a+y,\ y+c=b, \\ x=a\div(c\div b) & \text{“} & x+y=a,\ y+b=c, \\ x=a\div(b+c) & \text{“} & x+b+c=a, \\ x=(a\div b)\div c & \text{“} & x+c=y,\ y+b=a, \\ x=(a+n)\div(b+n) & \text{aus} & x+b+n=a+n, \\ x=(a\div n)\div(b\div n) & \text{“} & x+y=z,\ y+n=b,\ z+n=a, \\ x=(a\div n)+(n\div b) & \text{“} & x=y+z,\ y+n=a,\ z+b=n \end{array}$$

⌈Attenzione: Schröder è ritornato alla differenza *completa* $\div$.⌋

und so weiter. Valenzbedingung ist jeweils die Resultante der Elimination von x, y, z.

Hier steht jedoch auch noch ein anderer Weg offen: man kann auch das Schema 25d eventuell wiederholt als Vorschrift benutzen, um die verlangten Ausdrücke darnach aufzubauen.

Bei dem letzteren Verfahren werden nun im Resultate oft *mehrere* von einander unabhängig beliebige Klassensymbole $v, w, \dots$ auftreten, während man nach dem ersteren Verfahren gemäss 20 [das Auflösungsproblem] nur auf einziges arbiträres Symbol u kommen kann; und doch muss Aequivalenz zwischen den beiderlei Ergebnissen bei einem jeden von unseren Ausdrücken bestehen.

Analog lässt sich sogleich allgemein behaupten, dass jede Funktion von gegebenen und von unabhängig beliebigen Symbolen $v, w, \dots$ ersetzt werden kann durch einen gewissen Funktionsausdruck, der ausser den gegebenen $a, b, \dots$ nur das einzige arbiträre Symbol u enthält.

Beispielweise ist:

$$av + bw = (a + b)u,$$

Seite 36 und kann diese Aequivalenz auch direkt nachgewiesen werden, indem | man durch die Annahme $v = w = u$ den linkseitigen Ausdruck in den rechtseitigen, und durch die Annahme $u = av + bw$ umgekehrt diesen in jenen überführen kann, sodass also beide gleich umfassend sein müssen und $av + bw$ auch nur einen beliebigen Theil des Gebietes $a + b$ vorstellt.

Aehnlich ist z.B. ferner:

$$abv_1 + (a_1 b + av)w = (a + b)u,$$

wie direkt aus den Annahmen $v = (a + b)u + u_1, w = (a + b)u$ einerseits, und $u = abv_1 + (a_1 b + av)w$ andrerseits, zu erkennen ist.

Bei den Gleichungen zwischen den volldeutigen Ausdrücken sind die *Correcktionsglieder* zum Theil anders beschaffen als bei den eindeutigen, meist jedoch frei von willkürlichen Bestandtheilen. Namentlich gelten die Formeln der Gruppe III.

auch für die volldeutige Subtraktion ohne jedes Correktionsglied [19].

Wenn man nach den solchergestalt für die Exception und Abstraktion geltenden Formeln wirklich rechnen wollte, so würde als ein sehr empfindlicher Misstand sich vor allem der Umstand fühlbar machen, dass die Regeln nicht allgemein gültig, die Transformationen nach denselben nicht allgemein zulässug sind, sondern an die von mir sogenannten Valenzbedingungen als an eine Voraussetzung geknüpft sind.

Man könnte sich allerdings hiervon befreien, indem man die, eine Differenz (z.B.) darstellende Formel als Definition derselben auch für den Fall adoptirte, wo die Valenzbedingungen versagen; auf diese Weise hätten dann die inversen Operationen ihre Erklärung als *unbedingt ausführbare* Operationen gefunden, und die so aus den früher gegebenen eindeutigen Erklärungen 30 entspringenden Operationen würden sogar *vollkommen eindutige*, d.i. solche sein, die nicht nur nie mehrdeutig, sondern auch niemals undeutig werden. Allein man hätte erstens hierbei unter *mehreren* im allgemeinen verschiedenen Ausdrücken die Wahl, die erst kraft der Valenzbedingungen einander zu decken kommen, und zweitens würde der Gegensatz der so erklärten Operationen zu den entsprechenden direkten im allgemeinen nicht bestehen, womit jene ihr hauptsächlichstes Interesse verlören. Ich habe ferner kein entscheidendes Motiv entdecken können, welches bei der genannten Wahl für die eine oder andere Festsetzung [20] den Ausschlag gäbe: wählte man etwa durchweg den umfassendsten von den zur Verfügung stehenden Ausdrücken, so würde der Dualismus zerstört. Und endlich fallen bei jeder Festsetzung die Gesetze der Operationen doch sehr viel complicirter aus als die der Algebra, sodass ihre Befolgung unstreitig weniger praktisch ist als das Verfahren nach den in §2 [Kapitel 2] auseinandergesetzen Methoden, wo von der | Subtraktion und Division Seite 37
nur der gemeinsame Specialfall der Negation in's Auge zu fassen bleibt.

⌈ Con ciò si chiude il paragrafo più esteso dell'opera. Riassumiamo brevemente le ultime cose: Schröder avrebbe potuto facilmente introdurre fin dall'inizio le operazioni inverse; per esempio con una definizione del genere: $a - b = c$ è equivalente a $c + b = a$. Non lo fa. Schröder non vuole semplicemente *introdurre* le operazioni inverse in termini di classi, vuol dar loro una spiegazione, un significato.

---

[19] Si avrà notato come nel gruppo III, Schröder abbia indicato la sottrazione con il simbolo $-$ e non con il simbolo $\div$, ad indicare che si trattava di una differenza univoca e *non* completa.

[20] Tale espressione sarà cruciale nel terzo volume delle *Lezioni* laddove si parlerà di *Festsetzungen* da cui derivare i teoremi del calcolo. Come dice la parola stessa, si tratta di qualcosa che deve star fisso e fermo, qualcosa di basilare. Personalmente, credo che questo concetto (che io tradussi con *constatazione fondamentale*) sia trasversale ai concetti di 'assioma', 'postulato' o 'definizione'. Dato il carattere non sempre evidente delle constatazioni schröderiane, dovendo scegliere fra i succitati tre termini, sceglieri 'postulato'. Una *Festsetzung* è per Schröder una sorta di ipotesi (vera o falsa che sia) basilare, nel senso che senza di lei non si può procedere. In un certo si impone. Un po' come lo fanno le condizioni di valenza che pregiudicano della possibilità di sottrarre o dividere in maniera appropriata.

Risulta così che le operazioni inverse si ottengono come soluzioni di particolari equazioni. In questo modo, il problema della soluzione risulta essere non solo il culmine del calcolo, ma il pivot, l'ingranaggio che fa funzionare tutta la struttura. Prima, avevo accennato che Schröder introdurrà il concetto di numero naturale come sotto-prodotto del problema della soluzione nel calcolo dei relativi; allo stesso modo, sottrazione e divisione risultano sottoprodotti del teorema 20. Ovviamente, ciò rende più complesso il lavoro; si pensi alla necessità delle condizioni di valenza e ai problemi sull'univocità. Infatti, se diciamo che $x = a - b$, per esempio, ci possono essere più elementi che soddisfano la differenza. Come osserva in un altro luogo Schröder, in questo caso sarebbe più esatto dire che $x \subseteq a - b$ [**Sch73**, p. 115]. Infatti, scrive: *So lange es noch dahinsteht, ob nicht vielleicht* mehrere *solche Zahlen existiren, welche zu b addirt a geben und von denen x eine vorstellen soll, so lange man also noch den Ausdruck $(a - b)$ als einen möglicherweise* vieldeutigen *(dagegen das uneingeklammerte $a - b$ als noch nicht erklärt) ansehen muss (...), sollte man allerdings besser schreiben: $x \subseteq (a - b)$*. [**Sch73**, ivi] [Fintanto che rimane in sospeso se esistano *più* numeri, che addizionati a b danno a e di cui x ne rappresenta uno qualsiasi, si deve considerare l'espressione $(a - b)$ come una potenzialmente plurivoca (al contrario l'espressione senza parentesi $a - b$ come non ancora sufficientemente chiarita) e si dovrebbe scrivere: $x \subseteq (a - b)$]. Per questo motivo, l'autore qui afferma che si potrebbero sì introdurre diversamente la divisione e la sottrazione ma perderebbero così il loro interesse [*womit jene ihr hauptsächlichstes Interesse verlören*]. Oppure, anche rinunciando a voler esplicare le operazioni inverse in base al problema della soluzione, il calcolo diventerebbe estremamente complicato e il dualismo verrebbe meno [*wählte man etwa durchweg den umfassendsten von den zur Verfügung stehenden Ausdrücken (sostitutive delle condizioni di valenza), so würde der Dualismus zerstört*], la cui messa in luce è uno degli scopi che portarono Schröder alla scrittura di questo volumetto.⌋

3. [Noch etwas über die Entwicklung eines Ausdruckes]

Es erübrigt mir noch die Bemerkung, dass das Theorem 14 $D, E, F, \ldots$ Boole's - von diesem als Analogon des Taylor'schen Satzes dargestellt - merkwürdigerweise auch für die mittelst unserer volldeutigen inversen Operationen gebildeten Elementarausdrücke richtig bleibt - jedoch in einem wesentlich von der Auffassung Boole's abweichenden Sinne, und überdies mit dem modificirenden Zusatze, *dass diejenigen Constituenten, deren Coefficienten undeutig ausfallen, für sich gleich* 0 *gesetzt werden müssen* und so die Valenzbedingung zusammen liefern. Dasselbe scheint sogar für die complicirtesten unter Beihülfe inverser Operationen aufgebauten Funktionsausdrücke Geltung zu behalten - wovon indessen Boole's aposterioristische Beweise mich nicht völlig zu überzeugen vermochten.

In der That gibt jener Satz z.B.:

40d. $\quad a \div b = (1 \div 1)ab + (1 \div 0)ab_1 + (0 \div 1)a_1b + (0 \div 0)a_1b_1,$

und hier ist der Coefficient $0 \div 1$ sinnlos [21], weshalb der zugehörige Constituent $a_1 b = 0$ zu setzen ist und so die Valenzbedingung ausdrückt.

Mit Rücksicht auf 27d und 28d $[1 \div 1 = 0]$ bleibt dann:

$$a \div b = uab + ab_1$$

in faktischer Uebereinstimmung mit 25d.

Im Gegensatz zu vorstehendem rechnet aber Boole hierbei nach *arithmetischen* Gesetzen, und indem er $1-1$ demgemäss $= 0$ setzt, findet er $c = a-b = ab_1$ als allgemeinste Auflösung nach c der Gleichung $c + b = a$.

Dies ist nur insofern richtig, als - wie dies von Boole geschieht - lediglich mit Summen aus disjunkten Gliedern (mit *reducirten* Summen) gerechnet und die Addition ganz oder theilweise übereinstimmender Terme principiell ausgeschlossen wird.

Ein solcher Ausschluss der Gebilde wie $a + a$, gegenüber der Zulassung von $a \cdot a$, ist aber gänzlich unmotivirt [22], indem das eine doch nicht ungereimter ist wie andere, indem ferner die Zulassung auch jener Gebilde von unleugbarem Nutzen für die Kürze des Ausdrucks und im gemeinen Leben in der That allgemein üblich ist, indem endlich dieselbe uns die Vortheile des Dualismus zuwendet, welchen Boole nicht mehr vollständig erschaute, dem aber Grassmann schon bedeutend näher getretren ist.

---

[21] In base alla condizione di valenza 24d: $a_1 b = 0$, o, detto in altri termini, $b \subseteq a$ e qui avremmo, invece, $1 \subseteq 0$ (falso).

[22] Infatti, un'operazione si definisce con l'altra.

Le operazioni del calcolo logico (1877)

Ernst Schröder

[Prefazione]

Malgrado sia già trascorso un quarto di secolo da quando l'ideale di Leibniz di un calcolo logico ha trovato una realizzazione nell'opera di George Boole (prima in due precedenti scritti e ora nella sua opera principale), tuttavia sembra che ad essa sia stata concessa così poca attenzione e cura, che i brevi accenni di Cayley e A.J. Ellis, così come la rielaborazione (a quanto sembra indipendente) della stessa materia ad opera di Robert Grassmann, potrebbero quasi essere gli unici scritti in cui ci si riferisca seriamente a questo lavoro booleano. pagina III

Un motivo di questo fenomeno lo scorgo nel fatto che la stessa teoria booleana soffre ancora di qualche imprecisione. Fra le più gravi lacune che ho notato in questo metodo booleano, in ogni caso degno di meraviglia ed estremamente affascinante, voglio addurre questa in anticipo: che Boole nella soluzione dei suoi problemi introduce nelle ricerche un elemento completamente *estraneo* all'essenza della cosa. Come tale, infatti, io devo introdurre l'intero bagaglio dei *numeri algebrici* [con un'eccezione a favore dei simboli $\emptyset$ e V, ai quali non si deve negare neppure nel calcolo logico il diritto di cittadinanza] [1]. L'introduzione di questi ultimi implica che si debba rinunciare in Boole all'interpretabilità di tutti i singoli passi [del calcolo] e che in generale si debba calcolare con simboli logici, non sempre interpretabili, come $2, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{0}$. Mentre rimane un compito senza speranza il portare a coscienza il significato di ognuna di queste operazioni intermedie svolte [2] ci si vede condotti in un modo sorprendente, ma non soddisfacente allo spirito, al risultato desiderato e $\langle$a suo modo$\rangle$ corretto.

È sempre possibile, perciò, evitare di comprendere qualcosa nel calcolo, dato

[1] Qui Schröder punta l'indice sul fatto che la teoria booleana, malgrado il suo fascino, sia essenzialmente incompleta. Lo vediamo fin da subito dal fatto che i numeri algebrici, al posto di essere dedotti all'interno della teoria, devono essere assunti come dati ed importati dall'esterno. Si potrebbe obiettare, come fece Frege, che anche $\emptyset$ e V non sono ottenibili con i soli metodi booleani, ma qui Schröder osserva che, data la loro importanza, bisogna fare un'eccezione. A parlare, ovviamente, nelle parentesi quadre è lo Schröder matematico, non il logico. Come logico, l'introduzione della classe vuota non è coerente in un quadro à la Boole, ma come matematico riconosce la sua indispensabilità. Una mossa, forse, poco pulita (quella di Schröder) ma estremamente pragmatica e legata all'esercizio quotidiano della *mathesis*.

[2] Rimane, cioè, senza speranza il tentativo di comprendere appieno i singoli passi del calcolo, dato che non sono sempre dotati di significato; eppure si arriva lo stesso al risultato corretto. Questo *arrivare*, non può soddisfare lo spirito in quanto non son ben chiari tutti i passi che hanno portato alla conclusione. Si arriva, ma non si sa *bene* come.

che il vantaggio principale e la facilità che questo assicura permettono di dispensare lo spirito per un momento, al fine di concentrarsi sulle cose attorno a cui ruota la ricerca.

⌈Ovvero, il calcolo permette di evitare di comprendere intuitivamente ogni singolo passaggio di un'operazione, dispensando per così dire lo spirito dall'essere sempre attento. Tuttavia, la correttezza dell'algoritmo non viene perciò meno.⌋

pagina IV In ogni caso, | bisognerà richiedere almeno la possibilità in linea di principio di controllare con l'intuizione ogni passo [del calcolo], anche quando si vorrebbe volentieri farne a meno a causa della complicazione; bisogna, quindi, richiedere ad un metodo [che voglia essere] completo, che sia capace di giustificare le sue operazioni elementari passo passo e non solamente la loro totalità attraverso il risultato.

Sebbene io non misconosca che proprio questa disciplina [3] abbia spesso richiesto di introdurre certi simboli, [almeno] all'inizio apparentemente senza significato - come è usuale nell'algebra con $\sqrt{-1}$

⌈Vale a dire i numeri complessi. In effetti, tali numeri giocano il ruolo di autentici *folletti* nella matematica, dove sembrano comparire e scomparire a comando. Per esempio, sia dato il numero complesso $z = a + ib$, dove a (la parte reale di z, Rez) e b (la parte immaginaria Imz) sono numeri reali. Facendo un semplice modulo di z, si ottiene $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z}$. Come si nota, il modulo di z è la radice della somma di due reali, i è scomparso.

Ma spostiamoci nel regno dei complessi e domandiamoci come sia *fatto* l'integrale di una funzione $f(z)$ per $z \in \mathbb{C}$; ancora una volta veniamo sopresi dal fatto che tale integrale è uguale alla somma degli integrali della parte reale e della parte immaginaria, con i, fuori dal segno d'integrale, moltiplicato per quest'ultimo; ovvero: sia data una curva K in $\mathbb{C}$:

$$K : t \mapsto z(t) = z(t) + iy(t) \qquad (t \in [a, b]).$$

Sia ora un $\mathcal{G}$ un insieme aperto e connesso [Gebiet] in $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} &f : \mathcal{G} \to \mathbb{C} && \text{continua, e} \\ &K : t \to z(t) && (t \in [a, b]) \end{aligned}$$

una curva regolare in $\mathcal{G}$, allora,

$$\int_K f(z)dz := \int_a^b f(z(t))\dot{z}dt$$

[3] La logica booleana.

indipendentemente dalla scelta della rappresentazione $z(\cdot)$ di K.

Quindi, con $f(z) = \overbrace{u(x,v)}^{\mathrm{Re}f(z)} + i\,\overbrace{v(x,y)}^{\mathrm{Im}f(z)}$ e $(z = x + iy \in \mathcal{G})$:

$$\int_a^b f(z(t))\dot{z}dt = \int_K (\langle u, -v\rangle, d\langle x,y\rangle) + i \cdot \int_K (\langle v, u\rangle, d\langle x,y\rangle)$$

[**Wüs09b**, pp. 923–924]. Non esiste un integrale *complesso,* ma due integrali definiti su funzioni *reali;* i rimane fuori dal segno di integrale.

Perciò, è condivisibile l'atteggiamento di insoddisfazione di Schröder. Certo, simboli come i hanno un ruolo importante in matematica, ma è anche vero che hanno un comportamento abbastanza bizzarro. Quello che non si vorrebbe fare in logica sarebbe l'introdurre entità strane che non possano essere ricondotte ad oggetti *intuitivamente* comprensibili.⌋

- tuttavia, io credo, nel caso presente, che nella riconduzione di astrusi simboli artificiali a [simboli] più semplici e sempre interpretabili venga compiuto un reale passo in avanti e attribuisco la non necessaria introduzione di elementi incomprensibili, storicamente, solo alla circostanza che l'autore della nuova disciplina non volle emanciparsi completamente dalle regole dell'aritmetica (che non valgono sempre per le operazioni inverse) [4].

Il mettere da parte le menzionate incompletezze e anche quelle altre che potranno occasionalmente occorrere e nel contempo esibire ad al lettore tedesco un quadro esaustivo (anche in una forma per quanto possibile completa) di tutto ciò che è degno di nota, anche in rapporto ⟨formale⟩ con la sfera operazionale, altamente interessante, della logica deduttiva è lo scopo principale del presente scritto.

Grazie al metodo qui scelto di trattare [le cose], verrà ridotta notevolmente la lunghezza e ancor più la faticosità dei calcoli intermedi richieste dai problemi stessi;

⌈Questo è un aspetto della filosofia schröderiana che occorrerà più volte nelle sue opere. In particolare, sviluppando il calcolo dei relativi, Schröder avrà modo di insistere sulla perspicuità e compattezza del suo calcolo: *(...) trotz allem unsre Darstellung der Kettentheorie an* Übersichtlichkeit *keinen andern (...) nachstehen wird* [**Sch66c**, p. 353] [(...) nonostante tutto, la nostra rappresentazione della teoria delle catene non è seconda a nessun'altra per la sua perspicuità]. E in un altro luogo: *Ich will hier nicht darauf pochen, dass es unsrer Diziplin gelingt, die Sätze eines solchen Meisters [d.h. Dedekind] knappster Darstellung dargestalt noch weiter zu comprimiren (...)* [**Sch95**, p. 157] [Non voglio qui insistere [sul

---

[4] In altre parole, Boole non ha fatto il passo ulteriore che avrebbe portato ad una logica puramente formale, i cui simboli sono sprovvisti (sempre) di significato, salvo assegnar loro una particolare interpretazione - modello. Ma vedi al proposito la sezione dedicata alle operazioni inverse e la condizione di valenza 24d che permette di tradurre in termini logici l'operazione di sottrazione.

fatto] che alla nostra disciplina riesce di comprimere ulteriormente gli enunciati di un tal maestro della concisione [i.e. Dedekind]].⌋

in particolare, l'intero apparato della teoria viene a tal punto semplificato da non presupporre i minimi prerequisiti matematici, neppure lo stesso abc. Per rendere godibile [5] questa teoria così elementare anche per quelli non versati in matematica, dovrei - come spero di essere riuscito a fare - fornirne un'esposizione che corrisponda in larga misura a quella di Boole per la ricchezza di dettagli. Riguardo, poi, al formalismo del calcolo e alla sua fondazione, io credo di poter garantire alla teoria esposta in seguito, già fin da ora una semplicità e completezza non ulterioremente raffinabili - uno scopo, il cui raggiungimento, del resto, dopo il lavoro preparatorio fornito da Boole, necessita oramai solo di pochi ovvi aggiustamenti e a cui dovrebbe essere dato il giusto peso anche solo per il suo successo. |

pagina V In ciò che segue io fornirò una panoramica sulle operazioni del calcolo logico e sulle loro leggi da un punto di vista tale che *non* verrà pressupposta la conoscenza delle opere di Boole.

⌈In altre parole, Schröder darà una sorte di veste embrionale assiomatico-formale al calcolo booleano. Assiomatica, in quanto parte da alcuni enunciati assunti come intuitivamente veri; formale, in quanto il calcolo è suscettibile di qualsiasi interpretazione. Al proposito, si veda sopra, quando Schröder contesta a Boole di non aver perseguito la formalità fino alle sue estreme conseguenze, ma di aver dovuto introdurre dei concetti esterni alla teoria (dotati di un preciso significato). Il problema riguarda le leggi di derivazione che permettono, a partire dagli assiomi di ottenere altri enunciati veri (teoremi). In Schröder non esistono delle leggi del genere. C'è una pura combinazione tra enunciati equazionali tra loro. Questo perché Schröder considerava risolto il problema della deduzione da quello della soluzione (vedi sotto i teoremi 14 e 20). In realtà, si tratta di due problemi ben *distinti*. E, tuttavia, lo scopo principale di tutta l'attività logica schröderiana si può condensare nel problema della soluzione.⌋

Il punto di vista qui adottato ha comportato che, mentre potè essere mantenuta una grossa parte degli enunciati proposti da Boole, tuttavia, le dimostrazioni

---

[5] Schröder usa qui l'espressione *geniessbar* che vale nel contesto presente 'fruibile'. Tuttavia, il verbo *geniessen* ha in sé anche un retrogusto estetico. Penso ai versi che chiudono il quarto movimento della quarta sinfonia mahleriana: *Wir geniessen die himmlische Freuden* [noi godiamo delle gioie celesti]. Questa aggettivazione mette in luce l'interesse estetico degli algebristi, in particolare di Schröder, Löwenheim e Tarksi per questo calcolo. Quest'ultimo, per esempio, scriverà nel 1941: *(...) il calcolo dei relativi ha un fascino ed una bellezza intrinseci che lo rendono una fonte di piacere [delight] intellettuale per tutti coloro che lo conoscono* [**Tar41**, p. 89]. Che bello: *delight*! Ma si legga anche questa riga di Löwenheim: *Ich bin der Überzeugung, daß in Wissenschaft und Technik das Zweckmäßige immer auch zugleich das Schöne ist* [**Löw40**, p. 1] [Io sono della convizione che nella scienza come nella tecnica il mezzo più adatto allo scopo sia nel contempo anche il più bello].

dovettero essere sostituite da altre completamente diverse, alcune delle quali si trovano simili in Rob. Grassmann [6]. Se, tuttavia, Grassmann, muovendosi da correti presupposti, ha imboccato la via giusta, è anche vero che non è andato abbastanza lontano; precisamente, non è giunto sufficientemente in là da poter risolvere i problemi posti da Boole e da rendere definitivamente superfluo il suo apparato inutilmente complicato.

Nei capitoli 1 e 2 seguenti mi limito ad una concisa presentazione di quelle ricerche che sono necessarie e sufficienti per una risoluzione comoda dei problemi principali del calcolo, per mettere poi alla prova nel quarto capitolo la potenza del metodo affrontando il più difficile dei problemi posti da Boole [7].

Tralascerò di approfondire un'altra applicazione (in ogni caso, subordinata [a quella presente]) del calcolo logico, vale a dire, la deduzione dei *sillogismi* della logica antica, per non appesantire ulteriormente la presente publicazione, evitando con ciò ritardi [8]; tuttavia, penso di ritornare sull'argomento in uno scritto appropriato [9] in cui verrà evidenziato come ad essa non sia stata ancora riservata una sufficiente e fondamentale elaborazione.

Nel quinto capitolo, infine, presenterò alcune osservazioni, che dovrebbero servire più che altro come adornamento della teoria così sviluppata ma che possono anche servire, per così dire, a collocare nei giusti binari quanto sopra detto, cioè a stabilire un collegamento tra il modo di fare di Boole e il mio. Infine, fonderò una teoria corretta di entrambe le operazioni inverse, attraverso cui le quattro specie trovano il loro completamento.

Karlsruhe, marzo 1877.

L'autore. |

---

6 Vedi S. 37.

7 Vorrei far notare, che in assenza di un teorema di completezza, un modo per provare che il calcolo è sufficientemente potente è quello di applicarlo a problemi ritenuti particolarmente insidiosi.

8 Schröder intende dire che la trattazione della sillogistica avrebbe comportato un ritardo nella pubblicazione di questo libretto. Vale, comunque, la pena di sottolineare il passaggio. Schröder *volutamente* rinuncia a trattare la logica antica in prima battuta. Al centro del suo programma c'è il problema della soluzione, non il rendere conto della logica aristotelica in termini attuali. Aristotele cessa di essere il banco di prova del pensiero logico. Siamo di fronte ad un'algebrizzazione del pensiero.

9 Evidentemente, Schröder pensa alle *Vorlesungen* nel cui secondo volume (dedicato alla logica proposizionale) verrà trattata in maniera esaustiva la sillogistica. Un modo per adempiere agli obblighi di una tradizione secolare [**Sch66d**, pp. 217–255 e pp. 350–370]. È quello che si potrebbe chiamare il *parricidio di Schröder nei confronti di Aristotele*.

[Introduzione]

§1, pagina 1 Se noi ci atteniamo alla più che diffusa divisione [della logica], secondo cui la teoria dei *concetti*, dei *giudizi* e delle *conclusioni*, costituisce l'ambito della logica (deduttiva), allora si caratterizzano la *logica matematica* o il *calcolo logico* in particolare nel fatto che in essi i concetti o anche i giudizi, generalmente, vengono rappresentati da *lettere* e le conclusioni vengono ottenute in forma di *calcoli* che si eseguono su queste lettere in base a determinati semplici principi [Gesetze].

In base a tale articolazione della teoria, il *calcolo con i concetti* costituisce una prima parte del calcolo logico; con questo calcolo si riesce a realizzare quelle deduzioni, le cui premesse e conclusioni sono *giudizi di prima classe* [1], cioè sono quei giudizi in cui viene *detto qualcosa sulle cose stesse* - in generale, questi giudizi sono categorici.

La seconda parte comprende il *calcolo con i giudizi*, dove quelle ricerche, in cui vengono *espressi giudizi sulle nostre asserzioni* in rapporto alla specie e al modo, come la verità o la falsità dell'una appaia dipendere da quella dell'altra, potrebbero trovare la loro veste appropriata - si tratta di relazioni, quindi, che di regola trovano la loro espressione linguistica negli enunciati condizionali o nei giudizi ipotetici o disgiuntivi, a cui vogliamo attribuire il nome di *giudizi di seconda classe* [2] seguendo Boole.

Mentre in entrambe le parti [3] il calcolo procede secondo i medesimi principi [4], l'interpretazione delle formule cambia in ognuna di queste parti. Pertanto, volgendo la nostra attenzione solo alla prima di queste [parti], troveremo che in questo modo anche l'altra parte [per così dire] si risolve da sé con una semplice annotazione, cioè - per dirla in anticipo - che sotto le lettere che rappresentano i giudizi, invece di questi è sufficiente porre i tempi (o le *classi di fette temporali*), in qui essi risultano veri, per contrassegnare la ricerca come una afferente alla prima parte del calcolo logico.

---

[1] I.e. di prima *intenzione*.

[2] I.e. di seconda *intenzione*. Mentre nella teoria dei concetti stabiliamo delle relazioni tra simboli di classe, nella teoria dei giudizi (logica proposizionale) connettiamo queste relazioni tra loro.

[3] Cioè, sia nella teoria dei concetti che in quella dei giudizi.

[4] Ho tradotto *Gesetze* con *principi*, ma sarebbe andato bene anche *regole*.

⌈Qui Schröder sta parlando della possibilità di ricondurre il calcolo di seconda intenzione a quello di prima intenzione. Ciò è banale, in quanto, i principi che regolano i due calcoli sono identici; a cambiare è solo il significato delle lettere. Nel primo caso, una lettera denota una cosa, un oggetto; nel secondo caso denota un enunciato. Pertanto, un calcolo valido nella prima classe è automaticamente valido anche nella seconda classe; è sufficiente avvertire del cambiamento di interpretazione [*eine einfache Bemerkung*]. Questo è il formalismo schröderiano che ammette che un medesimo calcolo possa essere interpretato in maniere diverse (avere un modello diverso). È qui che il progetto schröderiano si discosta filosoficamente da quello fregeano. Per entrambi, la logica ha un valore primario e per entrambi si deve partire dai concetti. Tuttavia, in Frege non viene messa in discussione quella che per lui è l'unica interpretazione possibile. Per la precisione, Schröder parla della possibilità di sostituire agli enunciati della prima classe, proposizioni della seconda classe, intendendo con proposizione una funzione da mondi possibili a valori di verità. Ovvero, si sostituiscono agli enunciati le situazioni, o tempi appunto, in cui essi sono veri.⌋

Oggetto delle operazioni logiche sono lettere, [5] che - nella nominata prima parte - vanno considerate come *simboli di classe*. | Con una lettera, come A, pagina 2
indicheremo sempre una *classe* o *totalità* di oggetti del pensiero. L'espressione linguistica di una tale lettera è di regola un *nome comune* e allo stesso tempo fornisce un motivo per la creazione di un *concetto*, in cui pensiamo racchiusi i tratti caratteristici essenziali che sono comuni a tutti gli oggetti appartenenti alla classe. In opposizione a questi segni caratteristici, la cosiddetta *intensione* del concetto menzionato, la classe rappresenta solo la loro *estensione*, cosicché noi calcoleremo, di fatto, nella forma di questi simboli di classe, con le estensioni dei concetti da essi rappresentati.

Gli individui, cioè, gli *elementi* di una tale classe possono essere scelti completamente a piacere dalla molteplicità degli oggetti pensabili e, a parte il fatto di essere accumunati tra loro dalla nostra scelta, non hanno nessun [altro] segno caratteristico in comune.

Il numero degli elementi contenuti in una classe può essere finito od infinito; una classe può ridursi anche ad un elemento soltanto, nel cui caso il simbolo di classe A rappresenta un *nome proprio*.

1. [Le quattro operazioni fondamentali]

Anche nel calcolo della logica ci sono, come in aritmetica, quattro *specie* o modalità di calcolo fondamentali, che, come si mostrerà, possono essere ridotte *definitivamente* a *tre* operazioni elementari diverse. *Nulla vieta, di nominare con*

[5] Questo è un po' il manifesto del formalismo di Schröder: le operazioni logiche si applicano a *lettere*, *puri segni*, spogliati di significato.

lo stesso nome[6] *e di esprimere con gli stessi segni di calcolo che vengono usati in aritmetica le quattro operazioni fondamentali.* Tuttavia, l'oggetto delle operazioni nei due casi [in logica ed in aritmetica] è completamente diverso - là [in aritmetica] si parla di numeri, qui, invece, di concetti qualsiasi! Se il calcolo logico dovesse essere applicato in maniera specifica a problemi aritmetici[7], allora i segni di operazione aritmetici dovrebbero essere distinti da quelli logici, attraverso qualche piccola modificazione, come per esempio, la messa tra parentesi.

Oltre a ciò, ogni operazione logica ha un nome che, particolarmente, in filosofia e in grammatica è già entrato nel vocabolario e io voglio, usando questa duplice denominazione [logica e filosofica], fornire uno sguardo d'insieme alle quattro operazioni fondamentali, riservandomi la facoltà di spiegarle una per volta in dettaglio; esse sono:

1. L'*intersezione*, anche chiamata *determinazione*	1d. L'*unione* o insieme collettivo (*collezione*)
2. La *divisione* o *astrazione*	2d. La *sottrazione* o *eccezione* (Esclusione).

Nell'aritmetica sussiste tra le operazioni con lo stesso nome [di quelle logi-
pagina 3 che] un preciso ordine di rango, o *successione*, e si è soliti, come noto, | indicare l'addizione e la sottrazione come operazioni di primo grado, la moltiplicazione e la divisione come operazioni di secondo grado. Tutto ciò non è affatto arbitrario [willkürlich], ma si fonda nella natura delle cose, in quanto si è in condizione di chiarire il concetto di moltiplicazione, della sua inversa e di dedurre i suoi principi, solo dopo che si é preso confidenza a sufficienza con il concetto e i principi dell'addizione e della sottrazione

⌈ Trovo incomprensibile l'intero paragrafo. È sufficiente assumere come primitiva $\cap$ e sfruttare la *sottrazione* per ottenere $\cup$, o viceversa, in base alle leggi di de Morgan. La divisione, poi, non crea problemi perché si definisce in base all'intersezione. Quindi, il fatto di assumere come più fondamentali la somma e la sottrazione, al contrario di quanto afferma Schröder nel testo, è puramente arbitrario. Quello che può voler dire il matematico tedesco è che una funzione è più fondamentale della sua inversa; quindi, la somma risulta più basilare della sottrazione e la moltiplicazione della divisione. Ma i conti non tornano ancora. Una

[6] La traduzione *nominare con lo stesso nome* cerca di imitare il gioco sonoro schröderiano *mit denselben Namen zu benennen*.

[7] Attenzione. Qui Schröder formula una sorta di programma *logicistico*. Infatti, la logica viene vista come più basilare dell'aritmetica, che costituisce semmai una sola delle possibili interpretazioni. In altre parole, è solo un caso che un segno denoti un numero piuttosto che un altro concetto. La logica è puramente formale. Quindi, non stupisce che anche le operazioni aritmetiche possano essere considerate particolari interpretazioni di quelle logiche. In questo caso, sottolinea l'autore tedesco, però, onde evitare equivoci, bisogna indicare in qualche modo che le operazioni si applicano a certi oggetti piuttosto che ad altri. Un po' come i simboli $\cap$ o $\wedge$ sono solo due delle interpretazioni possibili dell'operazione astratta reticolare di *meet*.

funzione ammette un'inversa, quando è biettiva. Ma se $f : A \to B$ è biettiva, qualè il verso fondamentale? Quello da A verso B, o da B verso A? Certamente, io posso rinominare f^{-1} come g e ottenere che la nostra $f = g^{-1}$. Quello che nessuno, ovviamente, può negare è che dal punto di vista *psicologico* appare più elementare la somma che non la sottrazione, per esempio. Ma si veda il paragrafo seguente.$\rfloor$.

Malgrado sia comodo, mantenere questa divisione delle quattro operazioni in due gradi, per fini espressivi, anche nel calcolo logico, tuttavia, qui [nel calcolo logico] un ordine preciso non è oggettivamente giustificato e io darò la precedenza alla moltiplicazione, rispetto all'addizione, proprio per evidenziare questo fatto [8].

2. [Dualismo]

Ad ogni modo, si riconosce tra le operazioni logiche di uno dei due gradi una netta analogia e più sotto [nel testo] si troverà la dimostrazione che tra entrambe le coppie di operazioni sussiste addirittura un completo *dualismo*, che noi potremmo formulare come principio (empirico) nella maniera seguente:

DUALISMO. *Da ogni formula logica valida in generale si ottiene ancora una formula corretta, se si scambiano [in essa] i segni di unione e differenza uniformemente con quelli di intersezione e divisione, rispettivamente, e i simboli $\emptyset$ e V uno con l'altro* [9].

Se si rinominano i segni $\emptyset$ e V, come *moduli* [10] di entrambe le operazioni dirette, attraverso i nomi di $\mu_\sqcap$ e $\mu_\sqcup$ e, conformemente, i segni di sottrazione e divisione con i nomi $(\divideontimes)_\sqcap$ e $(\divideontimes)_\sqcup$, allora il principio di dualità troverebbe la sua espressione in un enunciato ancora più semplice, dato che è sempre permesso scambiare i segni di intersezione e di unione uniformemente.

Io voglio evidenziare questo dualismo collocando sempre le formule e gli

---

8 Qui Schröder sembra aggiustare il tiro rispetto al paragrafo precedente. Di fatto, è indifferente assumere come primitiva l'unione, invece che l'intersezione. Quello che colpisce è che secondo l'autore tale indifferenza sia peculiare del calcolo logico rispetto a quello aritmetico.

9 Per esempio, data una formula valida $A \cup -A = V$, possiamo ottenere da essa un'altra formula parimenti valida $A \cap -A = \emptyset$, operando le sostituzioni indicate nel testo da Schröder, cioè sostituendo a $\cup$ la l'operazione duale $\cap$ e alla classe totale V, la classe vuota $\emptyset$.

10 L'espressione *modulo* verrà usata continuamente da Schröder fino ai sui ultimi lavori. Per Schröder un modulo è un elemento neutro rispetto ad un'operazione. Quindi, $\mu_\sqcup$ non è altro che $\emptyset$, poichè $A \sqcup \emptyset = A$; $\mu_\sqcap = V$, dato che $A \sqcap V = A$. Gli ultimi due moduli si ottengono prendendo le inverse di $\sqcup$ e $\sqcap$, vale a dire la divisione e la sottrazione, rispettivamente. Va da sé, che queste operazioni non aggiungono nulla di nuovo. L'elemento neutro della divisione è V e quello della sottrazione $\emptyset$. Per questo motivo, l'autore osserva che si può semplificare il principio di dualità: perché è sufficiente prendere in considerazione l'unione e l'intersezione per avere subito tutti i moduli (elementi neutri) possibili: l'insieme vuoto e la classe totale. La ragione per la quale indico l'intersezione con $\sqcap$ e l'unione con $\sqcup$ verrà chiarita in seguito.

enunciati [11] duali affiancati l'uno all'altro (tutte le volte, almeno, che riterrò meritevole di introdurli entrambi) [12]; numererò inoltre tali enunciati [duali] sempre con la stessa cifra *n*, come *n* e *nd* [per il suo duale] - tuttavia non sempre introdurrò espressamente *nd* - così che potrà comparire un enunciato numerato con una *n* solo quando è duale a sé stesso - come sarà il caso degli enunciati 7, 11, 12, 13 e 32. Tutte le volte che il pendant duale risulta troppo interessante per essere completamente trascurato, ma che però non è essenziale per gli scopi pratici del calcolo, verrà messo tra parentesi quadre. |

3. [La negazione o complemento]

pagina 4

Se ci si vuole limitare solo allo strettamente necessario, allora si può [fare a meno di considerare], come già detto, entrambe le operazioni inverse del calcolo logico (divisione e sottrazione). Ognuna di queste operazioni elementari risulta eliminabile, infatti, grazie ad una quinta operazione duale a sé stessa, che occorre nella formazione di enunciati contraddittori e potrebbe essere chiamata:

3. *opposizione* o *negazione*

Questa operazione, che più tardi considereremo alla luce di un caso speciale comune alla sottrazione e alla divisione, è di natura più semplice delle restanti, in quanto con lei bisogna presupporre solamente *un* argomento, mentre con le altre *più* di un uno [13]. Essa forma insieme con la moltiplicazione e l'addizione le *tre definitive* operazioni fondamentali [14], alla cui rappresentazione, a partire dalla disciplina del calcolo logico semplificata per quanto possibile, ora procediamo. ||

---

[11] Per il momento, traduco *Sätze* con *enunciati* in quanto si sta prescindendo dal ruolo preciso che tali enunciati hanno nella teoria (teoremi, corollari, lemmi).

[12] Di fatto, nelle *Vorlesugen* ogni teorema è sempre affiancato in ogni caso dal suo duale. Si tratta di un fatto estetico. Non è infatti necessario introdurre i duali dei teoremi, una volta espresso il principio di dualità. Lo diventa, se intendiamo lavorare sulla forma espressivo-espositiva della teoria, mettendo in luce i rapporti e le relazioni fra le parti, un po' come un musicista che inserisce una ripetizione, non per il gusto di risentire il già detto, ma per motivi di plasticità, per riaffermare la stessa cosa in una foggia diversa, mettendo in luce ora un aspetto, ora un altro. Qui, dopo aver incontrato lo Schröder logico e lo Schröder matematico, incontriamo l'esteta. Ma si veda più sopra le considerazioni a proposito dell'utilizzo del verbo *geniessen* e la citazione tarskiana.

[13] Vale a dire, la negazione è una funzione ad un solo argomento, mentre le altre sono funzioni a due argomenti (più precisamente, delle relazioni binarie).

[14] Insisto. Qui, Schröder sta sbagliando. È sufficiente prendere una sola relazione binaria e il complemento.

CAPITOLO 1

[Il calcolo logico]

Prima di raggruppare le *definizioni*, gli *assiomi* e i *teoremi* del calcolo logico insieme con le relative dimostrazioni, ritengo opportuno premettere ancora un paio di osservazioni. §2

Tutti i teoremi della nostra disciplina sono *intuitivi*; appena vengono portati alla coscienza essi appaiono come immediatamente evidenti e perciò gli enunciati qui introdotti come assiomi potrebbero essere introdotti, con una certa fondatezza anche come [semplici] conseguenze immediate delle definizioni che vengono date insieme a loro. Quegli assiomi, che (come accade talvolta in altri ambiti) non hanno sempre un carattere empirico, potrei definirli più precisamente come semplicemente *formali*, introducendo come tali [assiomi formali] solo quegli enunciati che non riesco a dedurre attraverso un calcolo formale a partire da metodi già fondati e classificati, o come conseguenze ottenute da espressioni precedenti [1]. Grazie a questo modo di fare, costituiranno la base formale dell'intera disciplina non le definizioni, ma solo i postulati ad esse eventualmente associati e gli assiomi. Se sono giunto abbastanza lontano nello sforzo di restringere il numero degli assiomi, devo lasciare giudicare agli altri [rimando a questo proposito all'osservazione in conclusione di 10]; e devo rifarmi alla stessa tendenza [2], riguardo alla giustificazione di alcune apparenti complicazioni.

Qualcuno osserverà che talvolta, tra due enunciati duali l'uno all'altro (e naturalmente, | non importa quale dei due), solo uno deve figurare come assioma e che, pagina 5
inoltre, riguardo a ciò la successione [dei passi] delle dimostrazioni dei teoremi [di una teoria] non coincide completamente con quella dei loro duali - per questo motivo, anche le dimostrazioni non sono da svolgere sempre tenendo conto della dualità.

Enumererò anche gli assiomi e i teoremi che valgono già nell'aritmetica comune, ma di regola, non li citerò.

Infine, debbo accennare (e consigliare) alla modalità (ormai da tempo consueta presso i filosofi) di visualizzazione [Versinnlichung] degli ambiti dei concetti attraverso superfici in qualche modo limitate del piano, grazie alla quale gli individui appartenenti alla categoria di un concetto vengono rappresentati da punti

---

[1] In altre parole, un assioma *formale* è un enunciato privo di una controparte empirica e che non si lascia dedurre dagli assiomi usuali.

[2] Cioè, lasciare agli altri il giudizio.

geometrici (od anche punti estesi a piacere) di detta superficie.

⌈Questo passaggio merita il nostro interesse. Qui, Schröder, usa l'espressione *Gebiet* per intendere un'area limitata nel piano. In altri luoghi, Schröder la userà come sinonimo di *insieme*. Infatti, nel terzo volume delle *Lezioni sull'algebra della logica* Schröder parlerà di individui che sono parti [Teilen] o elementi [Punkte] di un insieme. C'è una sorta di ambivalenza. Da un lato, si considera come primario il concetto di *tutto*, di *Gebiet* dal quale si deduce con un processo di continua frammentazione il concetto di individuo. In questo, caso, essendo il processo di frammentazione infinito, l'individuo viene a coincidere non con il punto geometrico ma con un *intorno*. Per cui, ha senso parlare di relazione parte-tutto, e non di relazione elemento-insieme. Questa prospettiva la chiamerei *top-down*, in quanto si scende dal tutto all'individuo. Dall'altro lato, Schröder considera gli individui come elementi-punti di un insieme. Cioè parte dagli elementi per costruire la totalià; essa è definita come l'insieme di questi elementi. Questo processo lo chiamerei, al contrario, *bottom-up*, in quanto si parte dal basso degli elementi per arrivare all'alto della totalità. Insomma, in Schröder convinve un'anima *mereologica* (che affonda le sue radici in un filone di pensiero tedesco che ha il suo apice in Hegel ed Husserl) ed un'anima *insiemistica* (vivificata dalla concreta prassi matematica e dai successi cantoriani). Quello che rimane inspiegabile è come mai Schröder non si sia mai accorto di questo dualismo nel suo pensiero e non l'abbia mai risolto. Per esempio, nel calcolo dei relativi, insiste sugli aspetti mereologici del concetto di relazione, ma poi inserisce nella teoria dall'esterno, come dati i numeri naturali e li traduce in termini relazionali. Non si accorse della possibilità o di definire i numeri naturali in termini di relazioni, sfruttando il concetto di equivalenza (alla Frege) e quello di insieme, visto come una relazione mono-dimensionale, o di definire i numeri, sempre sfruttando l'equivalenza, ma definendo gli insiemi come collezioni di individui, intesi come relazioni completamente *collassate* su un'unica coppia ordinata (vista come un tutt'uno *in*divisibile). Schröder non si rese conto che nel suo calcolo il concetto di individuo si ottiene facilmente come entità limite, mantendendo un'impostazione mereologica di fondo.⌋

Come sostrato reale delle operazioni formali del calcolo logico [3] potrebbero, - prescindendo completamente da quei processi dello spirito, che abbiamo intenzione di rappresentare - essere addotti anche certi puri processi geometrici in una molteplicità spaziale estesa bi- o tri-dimensionalmente, come viene indicato più

[3] Qui, Schröder intende dire che le astratte, formali, operazioni del calcolo logico possono essere interpretate geometricamente. Per esempio, l'operazione reticolare di *meet* può essere vista come intersezione insiemistica e l'operazione *join* come unione tra insiemi. Poco sopra, Schröder aveva parlato di una possibile interpretazione aritmetica del calcolo, osservando che avrebbe taciuto talvolta l'interpretazione aritmetica del calcolo. In quel caso, a *meet* corrispondeva il prodotto e a *join* la somma.

sotto nell'esempio del piano e come talvolta viene usato d'illustrazione (cosa utile anche per motivi tipografici) [4].

1. [Enunciati fondamentali]

Si presupponga:

> I. La *definizione di identità* di due o più simboli di classe [5]. Questi ultimi si dicono uguali tra loro, quando le classi da essi rappresentati abbracciano elementi identici, quando ogni [simbolo di classe] è solo un nome per una ed una sola classe [6]. Da ciò segue:
>
> II. L'*assioma*: ogni simbolo di classe è identico a sé stesso,
>
> III. L'*assioma*: se due simboli di classe sono identici ad un terzo, allora sono identici tra loro

- insieme agli enunciati ancora più generali che si lasciano dedurre in modo noto da questi [7].

Da questi assiomi si deducono facilmente come contenuto *essenziale* della teoria circa una ventina di enunciati perlopiù doppi, di cui [al momento solo] tredici vanno introdotti come *assiomi*. Fra questi potrebbero essere considerati come *postulati* anche gli enunciati 1, 1d e 7.

---

[4] Vedi nell'Appendice A la conclusione di [**Sch77b**] e il riferimento in essa a Boeddicker.

[5] Vorrei far notare che l'identità non sussiste tra due classi, ma tra due simboli (di classe). È una relazione puramente formale.

[6] Si veda a questo proposito [**Fre08**, p. 23], dove Frege discutendo del significato dell'uguaglianza scarta l'idea che l'identità sia una relazione tra due nomi della stessa cosa. Non si tratta del fatto che Frege sia andato più o meno nel profondo del significato di questa relazione di Schröder, quanto notare come Frege non potesse accettare la posizione schröderiana in quanto poco *contenutistica*.

[7] Vedi, per esempio, [**Sch73**, pp. 25–26]. Possiamo riscrivere i precedenti assiomi come segue:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \\ \text{II.} & A = A \\ \text{III.} & (A = C \wedge B = C) \rightarrow A = B \end{array}$$

Si noti come i nostri connettivi non siano affatto le operazioni schröderiane, ma solo una loro possibile interpretazione. Per questo motivo, noi useremo i connettivi in senso meta-linguistico per chiarire il testo originale.

2. [Unione ed intersezione logiche]

1. *Definizione* dell'*intersezione* $A \sqcap B$ di due simboli di classe.

Con $A \sqcap B$ bisogna intendere la totalità o classe, l'intera collezione degli individui che appertengono tanto alla classe A quanto alla classe B.

1d. *Definizione* dell'*unione* $A \sqcup B$ di due simboli di classe.

La classe $A \sqcup B$ indica la totalità degli individui che appartengono o alla classe | *A o alla classe B*, cioè, detto in maniera più precisa, [quegli elementi] che si annoverano o ad una [classe] o all'altra, o ad entrambe le classi contemporaneamente.

⌈In simboli moderni, per ogni $A, B \sqsubseteq V$ e ogni $x \in V$:

$$1.\ A \sqcap B =: \{x | x \in A \land x \in B\} \ \Big|\ 1d.\ A \sqcup B =: \{x | x \in A \lor x \in B\}$$

Schröder, qui, adotta una lettura *inclusiva* dell'unione fra classi, in base alla quale non è escluso che ci siano elementi che appartengano ad entrambe le classi.⌋

pagina 6 Rappresentando geometricamente le classi A e B con gli insiemi di punti di due circonferenze,

$$A \sqcap B \ \Big|\ A \sqcup B$$

rappresentano, rispettivamente, le aree tratteggiate nella figura seguente:

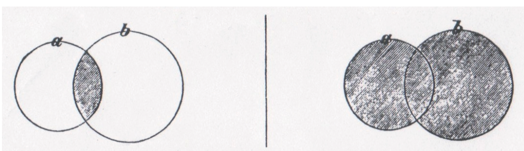

FIGURA 1

In una data molteplicità, pertanto,

$A \sqcap B$ rappresenta l'area in cui le superfici A e B s'*intersecano* a vicenda.

$A \sqcup B$ rappresenta l'area, in cui le superfici A e B si *completano* a vicenda.

L'intersezione logica serve ad evidenziare quegli elementi dell'universo di discorso che si distinguono attraverso la *comunanza* *dei loro segni caratteristici*; essa corrisponde così, essenzialmente ad una cernita, o *selezione*. I filosofi la chiamano	L'unione logica, al contrario, serve a ragruppare insieme quelle classi di cose i cui singoli gruppi si distinguono attraverso *diversi* segni caratteristici; essa corrisponde essenzialmente ad una raccolta, ad una *collezione*.

determinazione, poichè, quando si evidenziano dalla classe A quegli elementi che appartengono contemporanemante alla classe B, il concetto di A riceve una *definizione* più articolata, attraverso la richiesta che gli elementi intesi a debbano avere contemporaneamente anche i segni caratteristici dei b.

3. [Infimo e supremo]

La definizione or ora introdotta richiede un'aggiunta per il caso che

entrambe le circonferenze giacciano una fuori dall'altra	entrambe le superfici ricoprano insieme l'intero piano

e a questo scopo è necessaria l'introduzione di un nuovo simbolo [8] per il quale si sono scelti i segni [9]:

$$\emptyset \mid V$$

che, in verità, si consigliano da sé [10]. |

Il simbolo $\emptyset$ sia il segno per il *niente* - una classe a cui non appartiene nessun individuo.	La lettera V deve rappresentare la classe di *qualcosa* - una categoria, che abbraccia tutto il pensabile, la totalità di tutto ciò che generalmente può essere oggetto di discorso (l'*universo di discorso* di Boole).

[8] Ancora, Schröder osserva la necessità di introdurre un nuovo simbolo, non un nuovo ente.

[9] Nel testo originale *Zeichen*. Si tratta di puri segni grafici; macchie d'inchiostro di un'ipotetica stampante.

[10] Più precisamente, risulta che la relazione di intersezione non risulta sempre definita nel suo dominio, ma presenta delle *singolarità*. Quello che fa Schröder è di estendere l'operazione $\sqcap$, definita su un dominio $\mathcal{D}$ ad una nuova operazione $\cap$, definita su un dominio $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$ e priva di punti di singolarità, ma che per il resto si comporti come la primitiva intersezione. Vale a dire $\cap \restriction \mathcal{D} = \sqcap$: $\cap$ ridotta a $\mathcal{D}$ coincide con $\sqcap$. Detto in altre parole, viene assegnato alla operazione $\cap$ un valore puramente arbitrario in $\mathcal{D}'$ tutte le volte che $\sqcap$ presenta delle singolarità in $\mathcal{D}$. Ovviamente, nel testo Schröder non distingue mai l'intersezione dalla sua estensione. Di fatto, ad essere usata è $\cap$. Vorrei insistere sul problema di eliminare le singolarità dell'intersezione. Il valore che l'estensione dell'intersezione riceve in quel punto di singolarità è, come detto, arbitrario, poco più di uno scarabocchio. Avremmo potuto inserire in luogo di $\emptyset$, $\varDelta$, $\bowtie$, $\nsim$, $\uplus$, $\clubsuit$, ð, ecc., dando per scontato che tali simboli sono solo dei segni che non denotano niente. Non l'abbiamo fatto, perché si riconoscerà che l'introduzione di $\emptyset$ presenta degli ulteriori vantaggi. Un caso analogo vale per la duale $\cup$.

⌈Analizziamo questo passaggio per bene, partendo dalla parte sinistra: *Il simbolo* $\emptyset$ *sia il segno per il niente*. Il passo è controverso, ma per fissare le idee, diciamo che mentre gli altri simboli di classe possono avere una classe come denotato, $\emptyset$ non può in ogni caso avere un significato. Ancora, - *una classe a cui non appartiene nessun individuo*. Questo fatto, giustamente, fece montare in collera Frege. Scrhöder non è nelle condizioni di introdurre una classe vuota, perchè ha una visione *estensionale* delle classi. Cioè, le classi vengono definite come *raccolte di elementi*. In mancanza di elementi, come si può parlare ancora di *raccolta*? Si potrebbe fare, adottando un punto di vista *intensionale*, cioè considerando una classe come la totalità di quegli oggetti che soddisfano una data proprietà. Ma è quello che non fa Schröder, forse intimorito, dalla difficoltà di definire in maniera rigorosa il correlato matematico di una proprietà. Io preferirei, in questo caso, adottare come interpretazione il fatto che il simbolo della classe vuota non è un simbolo come gli altri, capace [fähig] di avere un denotato, ma un simbolo completamente [ganz] ininterpretabile (al massimo di considerare come significato di $\emptyset$ il simbolo stesso, ma non sarebbe coerente con il resto del discorso). Adesso, passiamo dall'altra parte della linea verticale: *La lettera* V *deve rappresentare la classe di qualcosa*. Qui Schröder intende dire che il denotato di V può essere una qualsiasi classe. Per cui, nel caso estremo, essa abbraccia tutti gli individui del dominio. Ancora una volta, abbiamo a che fare con un simbolo particolare. Mentre $\emptyset$ non era capace di rappresentare niente, ora V più che rappresentare una cosa piuttosto che un'altra, ne rappresenta una a piacere [beliebig]. Sarebbe più esatto dire che $V = \bigcup A$. Si noti che in questo caso sarebbe necesario quantificare sulle classi, cosa che Schröder non fa. Infine, - *una categoria, che abbraccia tutto il pensabile, la totalità di tutto ciò che generalmente può essere oggetto di discorso.* Una piccola annotazione linguistica: Schröder parlerà dell'universo di discorso usando l'espressione *Denkbereich*, letteralmente *universo del pensabile*. Da qui la domanda, un po' impertinente: per Schröder l'universo di discorso è infinito? Se sì, è numerabile o più che numerabile? Nel terzo volume delle *Vorlesungen über die Algebra der Logik* Schröder considererà insiemi più che numerabili. Dico questo, perché nel testo, l'autore usa la parola *Denkbar* [pensabile]. Si noti il suffiso *-bar* che implica una quantificazione modale. Infatti, *Denk-bar* vale *tutto ciò che è possibile pensare.*⌋

pagina 7 La motivazione di questi enunciati fondamentali, di cui precisamente l'ultimo parrà al novizio [in questa disciplina] sorprendente, si trova sotto a 9 [11].

I simboli $\emptyset$ e V sono, quindi, i limiti, gli estremi opposti dei simboli di classe, dato che nessuna classe può abbracciare meno di nessun [elemento] e nessuna più

[11] Si tratta appunto dell'infimo e del supremo che si discostano da tutti gli altri simboli di classe per o non avere un denotato, o per averne uno arbitrario.

elementi di tutti gli elementi [12].

Dobbiamo perciò porre:

$$A \cap B = \emptyset \;\Big|\; A \cup B = V$$

quando le classi A e B

non hanno nessun elemento in comune. In questo caso, le classi potrebbero essere chiamate *disgiunte*; i loro concetti si contraddicono a vicenda.	insieme comprendono tutto il pensabile. Classi di questo tipo potrebbero chiamarsi (*vicendevolmente*)-*complementari*.

Alla prima osservazione non pare superfluo aggiungerne un'altra: che in logica un'intersezione può annullarsi facilmente senza che uno dei suoi fattori debba essere $\emptyset$ - cosa che può verificarsi, come noto, in aritmetica solo in presenza di un numero infinito di fattori [13].

4. [Assiomi]

Le definizioni 1 e 1d sono da pensarsi come estendibili ad un numero arbitrario di argomenti. Il vero contenuto di entrambe queste definizioni, tuttavia, risiede in quei postulati che si appoggiano a loro e che permettono di *intersecare, rispettivamente, unire uno con l'altro i simboli di classe dati*, cioè, in altre parole, [considero come essenziali i seguenti] assiomi:

Assioma. L'intersezione | *Assioma. L'unione*

di simboli di classe è sempre ancora un simbolo di classe [14]; cioè, l'intersezione e l'unione logica sono delle operazioni *eseguibili incondizionatamente*; il risultato

[12] Ora questi simboli ricevono una caratterizzazione ulteriore. Non servono solo a eliminare delle sfortunate singolarità, ma risultano essere anche i limiti inferiore e superiore dell'universo di discorso (che, insisto, non è composto da classi, ma da simboli di classe; una sorta di alfabeto dal quale il calcolo estrae le lettere per comporre delle formule). Che noi siamo nel diritto di parlare propio di *infimo* e *supremo*, lo dobbiamo al fatto che: 1) l'universo di discorso è ben ordinabile dalla relazione $\subseteq$ definita in base all'unione ($A \subseteq B = (A \cup B = A)$) che definisce un ordine parziale su V; 2) le operazioni $\cap$ e $\cup$ sono sempre definite per ogni coppia di simboli di classe appartenenti a V. In base ad 1) e 2), V risulta essere un reticolo i cui infimo e supremo sono dati dai simboli in oggetto.

[13] Qui Schröder osserva che mentre in logica, può accadere che $A \cap B = \emptyset$, malgrado A e B denotino qualcosa (non siano l'infimo), in aritmetica non può mai accadere che $a \cdot b = 0$ se non a o b sono uguali a zero. Se accade che in aritmetica un prodotto sia uguale a zero, senza che lo sia nessuno dei suoi fattori, vuol dire che il numero dei fattori è infinito. In questo caso, diremmo che la successione composta da questi fattori *converge* a 0, quando il loro numero è infinito: $\lim_{i \to \infty} \prod a_i = 0$, per $a, i \in \mathbb{Z}$. Il che, incidentalmente, non equivale al fatto che questo prodotto sia uguale a 0, ma solo che vi converga. Cioè, che sia lì vicino, in un intorno ε-esimo. In ogni caso, non è chiaro quale sia la *prima osservazione* a cui si riferisce Schröder.

[14] Grazie alle estensioni $\cap$ e $\cup$ di cui sopra, la classe totale V risulta *chiusa* rispetto a queste operazioni.

formale (il nome del risultato) [15] di tali operazioni è, all'interno del dominio dei simboli di classe, mai sprovvisto di significato o *indefinito*. |

2. *Assioma.Commutatività dell'intersezione*: $A \cap B = B \cap A.$	2d. *Assioma. Commutatività dell'unione*: $A \cup B = B \cup A.$
3. *Assioma. Associatività dell'intersezione*: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C.$	3d. *Assioma. Associatività dell'unione*: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$

pagina 8 L'estensione di entrambi gli assiomi 2-3 ad interesezioni, rispettivamente, unioni a un numero arbitrario di argomenti (come è noto dall'aritmetica) sarebbe da introdurre qui come un *corollario*, che noi, però, non vogliamo numerare in maniera particolare [16]. In virtù di tali assiomi, la *successione* e il *ragruppamento* degli argomenti delle operazioni, addirittura l'ordine dei processi di intersezione e di unione, è indifferente per il *valore* (il significato) del risultato.

4. *Assioma*. Due simboli uguali, intersecati ad uno stesso simbolo producono intersezioni uguali. Quando $A = B$, allora vale anche $A \cap C = B \cap C$,	4d. *Assioma*. Due simboli uguali, uniti ad uno stesso simbolo producono unioni uguali. Quando $A = B$, allora vale anche $A \cup C = B \cup C$,

- un assioma che si lascia facilmente estendere ad una concatenazione operazionale di un numero arbitrario di equazioni.

In base a questo assioma, il risultato di una delle due dirette operazioni fondamentali del calcolo logico è *determinato inequivocabilmente*, dato che due intersezioni (per esempio) composte dai medesimi fattori devono essere sempre uguali [17]. Siccome queste operazioni non possono essere mai né plurivoche [mehrdeutig], né, in base ad 1, neppure indefinite, allora potremmo chiamarle *completamente univoche*.

Non è superfluo sottolineare che entrambi gli assiomi 4 *non* ammettono un'*inverso* - come quando, per esempio, dato $C \cap D = \emptyset$ è lecito [zulässig] dedurre l'equazione $(A \cup D) \cap C = A \cap C$, senza per questo che debba essere $A \cup D = A$. Si possono trovare anche ovvi esempi dalla vita quotidiana che non permettono di

[15] Si noti che il calcolo schröderiano non porta ad un risultato, ma ad un nome, un simbolo del risultato, essendo una pura manipolazione simbolica.

[16] In base all'associatività di $\cap$ e $\cup$, un'intersezione (un'unione) di un numero qualsiasi di simboli di classe può essere sempre ricondotta ad un'interesezione (unione) fra due simboli soltanto. Ciò vanifica una possibile introduzione del menzionato corollario.

[17] Ricordo, che quanto scritto nel testo rimane valido solo una volta *estese* le operazioni fondamentali, onde eliminare i loro punti di singolarità.

dedurre da $A \cap C = B \cap C$ che $A = B$ [18].

Le analogie tra le leggi delle operazioni logiche e quelle aritmetiche sembrano a questo punto venir meno; ma raggiungeranno il loro massimo punto di contrasto negli assiomi seguenti.

5. *Assioma.* Vale sempre	5d. *Assioma.*
$A \cap A = A$;	$A \cup A = A$.
cioè, *l'intersezione di una classe*	*Un simbolo di classe*
con sé stessa non cambia nulla.	*unito a sé stesso rimane invariato.* |

⌈Mi permetto un breve digressione, riallacciandomi alla nota precedente. L'assioma 5 sembra contrastare il semplice fatto aritmetico che $2 + 2 = 4$. D'altra parte, se i 2 sono solo due nomi dello stesso oggetto, allora è difficile pensare che sommando un oggetto a sé stesso, ne possa saltar fuori un altro. Cioè $2 + 2 = 2$. A meno che questi 2 non denotino due oggetti *leggermenti* diversi. Per cui, diciamo, che due banane + due banane (necessariamente altre) fa quattro banane. Un'altra possibilità è quella di considerare i due 2 come due singole istanze del concetto eterno di 2, una posizione platonica che mal si concilia con una parte del pensiero schröderiano che ha in ogni caso una visione *estensionale* (vorrei dire, nominalistica) della matematica. Sulla frase che precede questo assioma c'è molto da pensare.⌋

Io chiamerò questi enunciati (che si comprendono da sé, senza ulteriori spiegazioni) in relazione alla definizione 1, le *leggi specifiche del calcolo logico*. pagina 9

Qualcuno certamente potrebbe obiettare, che è insensato di principio eseguire operazioni come $A \cap A$ o $A \cup A$. Senza dubbio, colui che lo facesse si renderebbe colpevole di [aver emesso] una [semplice] *tautologia*. Per garantire piena generalià alle [nostre] ricerche rimane da stabilire che nelle intersezioni, o nelle unioni, con riferimento ad un numero arbitrario di classi [19], non viene escluso il caso che queste classi possano essere identiche; il vantaggio dato dal non porre limitazioni sugli argomenti di $\cap$ e $\cup$ si potrebbe facilmente illustrare con esempi e il suo uso mostrerebbe come il calcolo venga così semplificato. D'altra parte, tutto ciò che compare in maniera implicita, deve trovare posto nel sistema anche in maniera esplicita. Gli assiomi sono naturalmente da estendere ad un numero arbitrario di argomenti:

[18] Non capisco il passaggio; in aritmetica avendo un'equazione $ab = ac$, posso dividere entrambi i lati per c, ottendendo $a = b$. Quello che sembrerebbe voler dire Schröder è che sfruttando l'idempotenza di $\cap$ ottengo un controesempio a 4. Infatti, se $A \cap A = B \cap A$ quello che posso ottenere è che $A = A \cap B$, ovvero che $A \subseteq B$, non che A è identico a B. Il che rende esplicita la richiesta di una quantificazione universale su C in 4. Ad ogni modo (questo è il problema) in questo paragrafo non è ancora stata introdotta l'idempotenza (vedi sotto, l'assioma 5).

[19] Lo segnalo una volta per tutte: Schröder non è sempre consistente nell'utilizzo dei termini. Così, malgrado si parli *solo* di simboli di classe, spesse volte nel testo ci si riferisce alle classi stesse. Si tratta di un abuso di linguaggio. In realtà, anche quando Schröder parla di classi [Klassen e non Klassensymbole] tout-court si riferisce ai simboli di queste.

$A \cap A \cap A \ldots = A.$ Perciò, nel calcolo logico non può comparire nessuna potenza. Il posto per gli esponenti rimane così libero per [eventuali] indici superiori e più sotto verrà usato per questi scopi.	$A \cup A \cup A \cup \ldots = A.$ Una relazione tra intersezione e unione come quella attraverso cui definiamo in aritmetica l'usuale prodotto *non* sussiste nel calcolo logico.

⌈Un altro passaggio enigmatico. Qui Schröder afferma che la relazione che sussiste tra prodotto e moltiplicazione in aritmetica non può essere portata in logica. D'altra parte, l'aritmetica è una sola delle possibili interpretazioni del calcolo logico e più volte l'autore dà ad intendere che il dualismo logico sia da estendere a tutte quelle discipline che condividono la stessa struttura del suo calcolo. Non vale l'idempotenza in aritmetica, ma il dualismo, sì.⌋

Con gli ultimi assiomi abbiamo esaurito le leggi *pure* di entrambe le operazioni fondamentali dirette, considerando che come argomenti di queste operazioni possono occorrere solo generici simboli di classe. Io chiamo *pure* solo quelle leggi che si riferiscono ad unica operazione [20].

Al *rapporto* tra entrambe le operazioni si riferiscono, al contrario, entrambe le seguenti leggi *miste* di queste operazioni, di cui una - scegliamo la prima - deve essere introdotta come assioma e costituisce un pilastro dell'intera teoria (l'altra viene elencata solo per dualistica completezza).

6. *Assioma*. Per le operazioni logiche vale la (*prima* o *seconda*) *legge di distributività*: $A \cap (B \cup C)$ $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$ oppure: $(B \cup C) \cap A$ $= (B \cap A) \cup (C \cap A),$ questa è la regola per l'*intersezione* (di un polinomio con un monomio) e per il *ragruppamento* o l'eliminazione di un fattore comune ai membri di un'unione.	[6d. *Teorema*. Allo stesso modo vale il corrispondente duale della legge di distributività: $A \cup (B \cap C)$ $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ oppure: $(B \cap C) \cup A$ $= (B \cup A) \cap (B \cup C).$ ∣ La dimostrazione di questo assioma (che noi non useremo in maniera essenziale nel prosieguo) si trova oltre nel testo sotto 10.]

⌈Vale a dire. Leggendo da sinistra verso destra, in virtù di questo assioma possiamo intersecare un monomio A con un poliniomio $(B \cup C)$ o, leggendo da destra

[20] Riprendendo una nota precedente, in questo contesto $\subseteq$ non è pura, in quanto definita in base all'uguaglianza e all'intersezione.

verso sinistra, ragruppare un polinomio $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ rispetto ad uno dei simboli coinvolti, in questo caso A, ottendendo $A \cap (B \cup C)$. Non solo, nel membro destro di 6 possiamo dividere entrambe le intersezioni per A, eliminando questa lettera e semplificando il polinomio. Con 6 il 'nostro' reticolo risulta essere anche distributivo.⌋

La figura seguente fornisce una rappresentazione geometrica di entrambi questi assiomi, in cui la parte tratteggiata rappresenta il valore comune di entrambi i membri dell'equazione. pagina 10

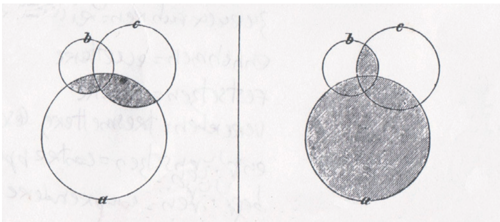

FIGURA 2

Le operazioni logiche di unione e intersezione sono l'unico esempio conosciuto di operazioni commutative che stanno tra loro in un rapporto reciproco di distributività [21], per le quali, infatti, *tutti e quattro* i principi di distributività 6 valgono contemporaneamente. Naturalmente, le leggi di distributività precedenti vanno estese ad un numero arbitrario di argomenti ed inoltre vanno generalizzate (in un modo noto all'aritmetica) alle seguenti regole [22]:

Intersezione di polinomi, | [Unione di intersezioni],

[21] Cioè, sono le uniche operazioni che si distribuiscono una sull'altra.

[22] A costo di apparire pedante, vorrei soffermarmi sul passaggio *Natürlich sind vorstehende Distributionsgesetze auch auf beliebig viele Operationsglieder auszudehnen....* La distributività va generalizzata ad un numero *arbitrario* di argomenti. Quanto arbitrario? Nel terzo volume delle *Lezioni sull'algebra della logica*, in effetti, Schröder nel contesto di una quantificazione su insiemi continui introduce una distributività generalizzata (ad un numero $\aleph_1$ di elementi). Lo notano anche von Neumann e Birkhoff nel loro epocale lavoro:$\forall_{1 \leq x \leq m} \exists_{1 \leq y \leq n} f(x, y) = \exists y_x \forall_{1 \leq x \leq m} f(x, y_x)$ [**BvN36**, p. 831], che, incidentalmente, ricorda il *teorema di Rappresentazione* di Riesz che associa ad ogni $x \in V*$ (lo spazio duale di V) in maniera *biettiva* un $y_x \in V$ [**Wüs09a**, p. 426, teorema 10.11]. Tuttavia, ad oggi, nessuno è riuscito nel comprendere il funzionamento della procedura schröderiana. In effetti, Birkhoff e von Neumann scrivono un compromesso tra la procedura schröderiana e le funzioni di Skolem. Innegabilmente, a destra dell'uguaglianza, viene introdotta una funzione skolemiana con la quale una variabile viene descritta in termini di un'altra ([**vH67**, p. 261 e segg.] e [**Sko70**, p. 112, Teorema 5]). La versione originale di Schröder è la seguente: $\exists x \forall y f(x, y) = \forall k (\forall y_k) \exists f(x, y_k)$ [**Sch66c**, p. 514]. È y_k una skolemiana (cioè, $k = x$)? Se lo domanda Badesa, al cui lavoro rimandiamo: [**Bad04**].

che nel caso più semplice vengono espresse attaverso le formule:

$$\begin{array}{r|l} (A \cup B) \cap (C \cup D) = & [(A \cap B) \cup (C \cap D) = \\ = (A \cap C) \cup (A \cap D) & = (A \cup C) \cap (A \cup D) \\ \cup (B \cap C) \cup (B \cap D), & \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)], \end{array}$$

che qui non sarebbero da enumerare come *assiomi*.

7. *Assioma.*

Per ogni simbolo di classe A esiste almeno un altro [simbolo] $-A$ dalla caratteristica che valgono tanto

7. $A \cap -A = \emptyset$ quanto 7d. $A \cup -A = V$ [23].

Chi vorrà riflettere più a fondo su questo assioma, scorgerà immediatamente che la classe $-A$ è la classe complementare (e completamente determinata) di A. Non è perciò necessario includere nelle presupposizioni assiomatiche anche l'univocità
pagina 11 di $-A$, ma solo l'ipotesi che esista | una classe con la proprietà menzionata è già sufficiente per poter dimostrare (vedi in basso) che non esiste più di una di tali classi [24]. Chiamiamo per il momento il simbolo $-A$ *un complemento* di A, allora, per simmetria, chiameremo anche A un complemento di $-A$, dato che il nostro assioma 7 ci assicura l'esistenza di un complemento (almeno uno) per ogni pensabile simbolo di classe. Come vedremo sotto 12, questo assioma implica il terzo ed ultimo postulato, su cui si basa la nostra teoria [25].

8. *Teorema.*	8d. *Teorema.*
$\emptyset \cap A = \emptyset$.	$V \cup A = V$.
9. *Assioma.*	9d. *Assioma.*
$A \cap V = A$	$A \cup \emptyset = A$.

Dimostrazione di 8. Sia A composto con una classe $-A$ in base a 7; allora:

$$A \cap \emptyset = A \cap (A \cap -A) = (A \cap A) \cap -A = A \cap -A = \emptyset,$$

Q.E.D. Allo stesso modo è da svolgere in maniera duale la

dimostrazione della 8d: $A \cup V = A \cup (A \cup -A) = (A \cup A) \cup -A = A \cup -A = V$, applicando, come si vede facilmente, solo la 7, la 4, l'associatività di 3, 5 e di nuovo 7.

Per quanto concerne la *dimostrazione* della 9, mi sembra che solo uno di questi

---

[23] Questo assioma afferma che per ogni simbolo di classe esiste il suo complemento. Tuttavia, non afferma che il complemento sia unico. Si limita a richiedere una generica esistenza [gibt es **mindstens**] del complemento di un simbolo di classe. Tuttavia, nel paragrafo che segue, Schröder afferma che ciò è sufficiente.

[24] A questo punto, dopo aver visto che la struttura algebrica che soggiace al calcolo schröderiano è un reticolo distributivo e orto-complementato (in virtù di quest'ultimo assioma), possiamo affermare che il calcolo in questione costituisce un'algebra di Boole.

[25] Schröder si riferisce agli assiomi 1 e 1d.

enunciati debba essere ricondotto all'altro, valendo, per la 7d, la distributività 6, la 5 e la 7:

$$A \cap V = A \cap (A \cup -A) = (A \cap A) \cup (A \cap -A) = A \cup \emptyset.$$

L'altro enunciato - scegliamo il 9 - deve essere assunto come assioma.

Le formule 8 e 9 forniscono un valido motivo (suggerito da Boole) per la scelta o il rifiuto del significato da noi stabilito (in maniera definitoria) per i simboli $\emptyset$ e V, dato che sembra desiderabile riportare in simboli logici le proprietà aritmetiche fondamentali che valgono per 0 ed 1 [26]. Se valgono, infatti, le equazioni 8 e 9 anche nel calcolo logico, allora,

$\emptyset$ deve denotare quella classe che ha in comune sé stessa con ogni altra classe, comprese quelle che sono con lei in contraddizione; poiché queste [classi contraddittorie tra loro] non hanno nessun elemento in comune, allora la classe $\emptyset$ non può che comprendere niente; deve essere una classe *vuota*. |	V deve rappresentare quella classe che con ogni altra classe pensabile ha in comune questa classe; V contiene tutte le classi e tutti gli elementi pensabili.

⌈Questo passaggio rimanda alla disputa con Frege sull'esistenza o meno della classe vuota. Abbiamo visto che Schröder non è in grado di esibire una tale classe, ma questo non costituisce un problema, dato che $\emptyset$ non è una classe, ma un simbolo capace più o meno di denotazione [bedeuten]. È stato introdotto per eliminare i punti di singolarità di $\sqcap$ con un gesto puramente arbitrario. Ovviamente, risulta utile aver scelto proprio $\emptyset$ invece, diciamo, di ε, perché permette di costruire un'interpretazione aritmetica per l'algebra booleana costruita da Schröder. Tutto qui. Non ci può essere nessuna lettura ontologico-contenutistica di questo gesto puramente creativo di Schröder. L'autore stesso ribadisce questo carattere arbitrario poco sopra parlando del *significato da noi stabilito* [von uns festgesetzten Bedeutung], con un ovvio accento sul *da noi*.⌋

5. [Teoremi]

I precedenti quattro enunciati, in cui occorrono simboli di classe, in parte del tutto generici, in parte particolari, e di cui quelli [appartenenti al numero] 3 sono veri anche in aritmetica, si riallacciano chiaramente alle leggi *pure* delle nostre operazioni fondamentali. pagina 12

[26] Qui sorge un problema. Come è noto, mentre le prime cinque *leggi del pensiero* di Boole valgono anche interpretate aritmeticamente, ciò non vale per la sesta: $x^n = x$ [**Boo58**, pp. 31–32]. L'unico modo di aggirare il problema è di sfruttare la bivalenza introdotta da Schröder, per cui, certamente $1^n = 1$ e $0^n = 0$. In questo modo, il calcolo booleano ammette anche un'interpretazione aritmetica.

Entrambi i teoremi seguenti (ancora una volta misti) sono estremamente caratteristici del calcolo logico e comunque importanti:

10. *Teorema*. Vale:

$$A \cup (A \cap B) = A,$$

cioè, *un termine, che contiene un altro fattore, si riduce sempre a questo fattore*, o viene per così dire da questo assorbito (*assorbimento*).

Dimostrazione. Semplificando a sinistra, si ottiene da 9, 6, 8d e 9:
$A \cup (A \cap B) = (A \cap V) \cup (A \cap B)$
$= A \cap (V \cup B) = A \cap V = A.$

[10d. *Teorema*. Analogamente,

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

Dimostrazione. Moltiplicando a sinistra, si ottiene, grazie a 6, 5 e 10:
$A \cap (A \cup B) = (A \cap A)$
$\cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = A$
[A partire da ciò, ora anche 6d si lascia dimostrare grazie a 5 e 10 come segue:
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
$= (A \cap A) \cup (A \cap B)$
$\cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$= \{(A \cap (A \cap B))\} \cup (A \cap C)$
$\cup (B \cup C)$
$= \{(A \cup (A \cap C))\} \cup (B \cap C)$
$= A \cup (B \cap C)$.]

⌈Schröder sfrutta l'idempotenza, per cui $A \cap A = A$; in questo modo $(A \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cap A) \cup (A \cap B)$ diventa: $A \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Applicando l'assorbimento una prima volta, si ottiene: $A \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Lo applichiamo una seconda volta e concludiamo: $A \cup (B \cap C)$. Le parentesi graffe indicano dove va applicato l'assorbimento. In entrambi i casi, le parentesi si riducono ad un solo simbolo A, per cui la conclusione è immediata.⌋

Mentre con [l'aggiunta de]gli enunciati 1d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6, 7 e 9 si conclude la serie dei postulati ed assiomi, a cui noi dovremo fare riferimento e nel contempo sono dimostrati anche i teoremi di complementazione 6d e 9d, posso considerare come dimostrato il principio di reciprocità enunciato nel[la sezione 2 del primo capitolo]; vale a dire l'affermazione del *completo dualismo delle operazioni logiche fondamentali* [27].

I cinque enunciati 2, 3 e 6, qui introdotti come assiomi, vennero già ricondotti da Hermann Grassmann alle loro presupposizioni più semplici riguardanti delle totalità, cosa che accade anche per 5 e 9. Alle totalità [grassmanniane] qui corrispondono gli *elementi* tra loro disgiunti, la cui unione:

$$A = a^1 \cup a^2 \cup a^3 \cup \ldots \qquad \text{(eventualmente fino a } a^n\text{)}$$

[27] Con ciò Schröder porta a termine il primo degli scopi che si era prefissato: dare completezza al calcolo booleano, mettendo in luce il principio di dualità.

si lascia chiaramente rappresentare come una classe [28].

11. *Teorema*.

Se vale allo stesso tempo tanto $A \cap C = B \cap C$ *quanto* $A \cup C = B \cup C$, *allora:* $A = B$.

Dimostrazione. L'intersezione della seconda equazione con A e B, rispettivamente, ci dà, in virtù di 5 [idempotenza]:

$$A \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (A \cap B) \cup (B \cap C) = B \cup (B \cap C).|$$

Per ipotesi, tuttavia, la seconda espressione [$A \cup C = B \cup C$] è uguale alla terza pagina 13
[$A = B$] e, di conseguenza, la prima [$A \cap C = B \cap C$] uguale all'ultima, quindi, in forza di 10 [assorbimento]

A = B,

Q.E.D. [29] O si può svolgere la dimostrazione anche nella corrispondente versione duale.

12. *Teorema*.

I complementi di un unico simbolo di classe o di più simboli di classe uguali, devono essere uguali tra loro; pertanto, se da una parte

$$A \cap -A = \emptyset, \qquad A \cup -A = V$$

e dall'altra

$$A \cap -B = \emptyset, \qquad A \cup -B = V$$

allora dobbiamo anche avere $-A = -B$ [30].

Dimostrazione. Abbiamo che:

$$A \cap -A = A \cap -B \quad \text{e} \quad A \cup -A = A \cup -B,$$

quindi, per 11 $-A = -B$. [Q.E.D.]

Se, quindi, è data una classe A, allora il suo complemento è completamente determinato. Esiste solo *un* tale complemento e questo si chiama la *negazione* o la *controparte contraddittoria* di A, cioè, *non*-A o, semplicemente $-A$.

Anche quelle operazioni del calcolo, attraverso cui, quando è data A, viene stabilita l'espressione 'non-A', si chiamano *negazione* o *opposizione*. Per 12 e

---

[28] Qui, l'autore sembra dire che una classe è un insieme tutt'al più *numerabile* di elementi. Questo perché, Schröder non radicalizza la sua visione mereologica e accetta di poter costruire delle totalità dal basso (la tecnica *bottom-up* di una nota precedente). In questa sede, Schröder non tornerà sull'argomento. Tutto ciò che ha da dire esplicitamente lo fa in questo breve passo, in cui sembra assumere come dato il concetto di individuo accanto a quello di classe [in ogni caso, Schröder qui parla di simboli di individui, non di individui]. Forse il fatto che Schröder si limiti ad una successione tutt'al più numerabile di individui deriva proprio dalla difficoltà di concepire un tutto composto da un numero più che numerabile di individui. La difficoltà può essere aggirata se adottiamo una procedura inversa e definiamo gli individui come entità limite.

[29] Si veda la parte tedesca.

[30] In altre parole, se un simbolo di classe ha più di un complemento, allora tali complementi devono coincidere tra loro.

7 [anche] questa nostra *terza operazione fondamentale* è, quindi, *completamente univoca* [31].

L'identità 7 ci sembra ora l'espressione matematica del *principio di non contraddizione*, il quale afferma che non è pensabile niente che possa essere al contempo e nello stesso senso A e non-A - quel principium contradictionis che Aristotele volle collocare sulla vetta dell'intero edificio logico.

13. *Teorema*.
Vale sempre che $-(-A) = A$, |

ovvero: *la negazione della negazione* (il complemento del complemento) *di una qualsiasi classe è proprio questa stessa classe* [32]. Attraverso la negazione della negazione i due trattini si annullano a vicenda, come i due segni meno quando si sottrare un numero negativo, o, meglio, come quando nella sottrazione della differenza da un minuendo, questo viene meno [33].

Dimostrazione da 12; per un verso:

$$A \cap -A = \emptyset, \qquad A \cup -A = V$$

e per l'altro, grazie a 7:

$$- A \cap -(-A) \quad \text{o} \quad - (-A) \cap -A = \emptyset,$$
$$- (-A) \cup -A = V. \qquad \text{[Q.E.D.]} \mid$$

pagina 14 Poichè, in particolare, $\emptyset \cap V = \emptyset$ e $\emptyset \cup V = V$, allora segue che

$$-V = \emptyset, \qquad -\emptyset = V$$

e le classi $\emptyset$ e V risultano così essere l'una la negazione dell'altra.

6. [Sviluppo di un'espressione]

14. *Teorema. Qualsiasi classe B si può esprimere in maniera lineare ed omogenea attraverso una qualsiasi altra classe A nella forma:*
(A) $B = (X \cap A) \cup (Y \cap -A)$,

[14d. *Teorema*.
Parimenti, va sempre posto:

$$B = (Y \cup A) \cap (X \cup -A).]$$

dove X e Y non rappresentano *simboli di classe* completamente determinati [34]; possono essere anche uguali ad $\emptyset$ o V [35].

---

[31] L'assioma 7 stabilisce l'esistenza del complemento, il 12 l'univocità.

[32] Vorrei far notare l'espressione schröderiana *von irgend einer Klasse* [di una qualsiasi classe]. A differenza della primitiva $\cap$ il complemento è *sempre* definito; questa operazione non ha bisogno di essere estesa.

[33] Vedi, piú sotto, il teorema 35.

[34] Vale a dire, sono variabili.

[35] Da qui in poi il testo sembra cambiare registro. Mentra fino ad ora Schröder si era sforzato di evincere da una possibile interpretazione (l'aritmetica) la sua struttura logica, adesso sembra cercare le rassomiglianze del suo calcolo logico con il calcolo algebrico. Ciò, è degno di nota, in quanto nell'apertura l'autore aveva accusato Boole di non essersi sufficientemente emancipato dalla sfera

Dal punto di vista geometrico (vedi la figura 3), il teorema è immediatamente evidente, poichè l'area di B viene divisa, intersecandosi con A, in due parti, di cui una ($X = X \cap A$) è inclusa in A, mentre l'altra ($Y = Y \cap -A$) giace al di fuori della classe A; pertanto, l'equazione (A) risulta in questo caso essere corretta [36].

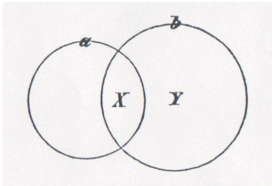

FIGURA 3

Dal punto di vista *analitico* il teorema si *dimostra* nella maniera più semplice come segue; dato che:

$$\text{(B)} \quad B = B \cap V = B \cap (A \cup -A) = (B \cap A) \cup (B \cap -A),$$

---

matematica. Ad ogni modo, il teorema 14 ha oggi un'importante controparte in algebra lineare: ogni vettore x di uno spazio V si lascia esprimere come la combinazione lineare di due vettori ortogonali tra loro qualsiasi, appartenenti alla base vettoriale di V:

> Siano $n \in \mathbb{N}$ e $\langle V, (\cdot, \cdot) \rangle$ uno spazio unitario od euclideo di dimensione n. Sia $\{b_1, \ldots, b_k\}$ una base orto-normale in V. Allora, vale per ogni $x \in V$:
>
> $$x = \sum_{k=1}^{n} (x, b_k) b_k$$
>
> [**Wüs09a**, pp. 372 e segg.].

Il teorema afferma, più precisamente, che x può essere proiettato su ogni b_j della base; dove ogni singola proiezione di x si scrive come $(x, b_j)b_j$. In questo caso, avremmo che $x = \alpha_1 a + \alpha_2 - a$, dove gli α sono i coefficienti (nel caso schröderiano X ed Y) e a e $-a$ due vettori della base ortogonali tra loro. Questo teorema è estremamente importante perché su di esso si basa il procedimento ricorsivo di Grahm-Schmidt con il quale si dimostra che ogni base vettoriale può essere orto-normalizzata. Ad ogni modo, in base a questo teorema, possiamo riscrivere la classe X come segue:

$$X = (X \cap A) \cup (X \cap -A)$$

Si vedrà, più in basso che questo è proprio il risultato a cui perviene Schröder (con un opportuno cambiamento di lettere). Egli afferma che ogni classe può esser riscritta come combinazione lineare di due classi complementari tra loro. Per questo motivo, chiamerei il teorema 14 *teorema di orto-complementazione*. Rimane da notare che l'equazione di (A) non è omogenea, bensì, *in*-omogenea. Per *omogenea* s'intende un'espressione come $f(x) = 0$; per *in-omogenea* una del tipo $f(x) = y$.

[36] Qui, mi sono dovuto discostare dal testo originale in quanto Schröder fa una differenza tra lettere minuscole e maiuscole che io non ho creduto opportuno riportare per la comprensione.

allora, il teorema 14 sotto l'ipotesi che $X = Y = B$ risulta corretto [37]. [Q.E.D.]

Che X ed Y non siano completamente determinati risulta evidente dal fatto che se X ed Y sono due appropriati coefficienti che soddisfano la (A), allora lo devono essere anche $X \cup (U \cap -A)$ e $Y \cup (W \cap A)$ [38].

In ogni caso, si riconosce facilmente la correttezza dell'identità seguente:

$$\text{(C)} \quad B = \{(A \cap B) \cup (U \cap -A)\} \cap A \cup \{(-A \cap B) \cup (W \cap A)\} \cap -A,$$

in cui U e W rappresentano delle classi puramente arbitrarie; si vorrebbe essere anche nella condizione, attraverso i metodi esposti (uno a fianco dell'altro) alla fine del presente paragrafo, di dimostrare che (C) in realtà non è altro che la forma più generale di (A), da cui si devono ottenere, in virtù di adeguate ipotesi su U e W, tutte le possibili rappresentazioni di questa specie.

Con $f(A)$ si indicherà d'ora in poi ogni espressione che contenga il simbolo A ed eventualmente anche $-A$.

Per quanto concerne le operazioni da eseguire, riguardo all'espressione appena introdotta, noi vogliamo anzitutto presupporre che i simboli A e $-A$ possano essere uniti tra loro (o con altri simboli indipendenti da questi) solo attraverso le operazioni di unione ed intersezione logiche - un caso particolarmente semplice al
pagina 15 quale | - come risulterà chiaro da ciò che segue - si lasciano ricondurre facilmente tutti i possibili casi [39].

In questa situazione tutte le espressioni di unione che compaiono come fattori si possono intersecare grazie a 6 [assioma di distributività] e si può risolvere l'intera espressione in un aggregato di monomi. Ognuno di questi monomi può contenere i simboli A e $-A$, ma mai allo stesso tempo [gleichzeitig] ed ognuno di questi può occorrere al massimo una volta soltanto come fattore grazie a 7 [principio di non-contraddizione] e 5 [idempotenza]. L'intera espressione funzionale [Funktionsausdruck] sarà detta di primo grado rispetto ad A e $-A$ [40] e potrà essere

---

[37] In verità, il teorema 14 è semplicemente una generalizzazione di (B). Facendo riferimento alla nota 35, appena sopra, si noterà la perfetta coincidenza formale con la rappresentazione di un vettore in funzione di due vettori ortogonali tra loro.

[38] Ho sostituito nel testo a V la lettera W in quanto per noi la V ha un significato particolare. Si veda più in basso una mia interpolazione al proposito.

[39] Ovvero, qualsiasi altra operazione è riconducibile a $\cap$ e $\cup$ (e al complemento, aggiungerei).

[40] Löwenheim si rifarà per questo a Schröder, ma con una differenza importante: *Einen geordneten Inbegriff von* n *Gebieten* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *werde ich kurz ein* System n^{ter} Ordnung *nennen* [**Löw69**, p. 171] [Una famiglia ordinata di n insiemi $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, la chiamerò per brevità, una famiglia di ordine n-esimo]. Se gli insiemi componenti questa famiglia sono disgiunti tra loro, si parla di *famiglia disgiuntiva*. Tuttavia, mentre per Schröder, non c'è differenza di grado tra una funzione di A e una di $-A$, per Löwenheim, la negazione aumenta il grado della funzione: *Jedes Disjunktivsystem zweiter Ordnung hat die Form* $(a, \bar{a})$, *und umgekehrt sind zwei* obverse *Gebiete* a *und* $\bar{a}$ *stets disjunktiv* [**Löw69**, p. 172] [Ogni famiglia disgiuntiva di secondo ordine ha la forma $f(A, -A)$ e, al contrario, due insiemi contraddittori tra loro A e $-A$ sono sempre disgiuntivi].

ricondotta ad una forma omogenea, intersecando a piacere il termine che con contiene né A, né $-A$, o anche intersecando l'intera espressione, con $A \cup -A$ [41]. In ogni caso, alla fine otteniamo la forma:

$$f(A) = (X \cap A) \cup (Y \cap -A),$$

dove X ed Y sono indipendenti da A e $-A$ [42]. Questi coefficienti (X ed Y) non contengono nulla di arbitrario, poiché, in virtù della richiesta di indipendenza da A a partire dall'espressione data $f(A)$ hanno trovato la loro determinazione.

⌈I coefficienti non possono essere più completamente arbitrari, in quanto devono soddisfare *almeno* una condizione: quella di essere disgiunti da $f(A)$. Mi permetto di interpolare al testo schröderiano un breve passaggio tratto da [**Boo58**] che sarà d'aiuto nel capire il passaggio seguente tanto a prima vista ingenuo, quanto criptico.

> Proposizione I.
> *Come sviluppare una qualsiasi funzione $f(x)$ in cui x è un simbolo logico.*
>
> In virtù del principio che è stato espresso in questo capitolo [43], è permesso trattare x come un simbolo quantitativo, suscettibile solo dei valori 0 ed 1.
>
> Assumiamo, quindi,
>
> $$f(x) = ax + b(1 - x),$$
>
> e ponendo $x = 1$, abbiamo che
>
> $$f(1) = a.$$
>
> Ancora, ponendo nella stessa equazione $x = 0$, abbiamo
>
> $$f(0) = b.$$
>
> Quindi, i valori di a e b sono determinati e sostituendoli nella prima equazione si ottiene:
>
> $$f(x) = f(1)x + f(0)(1 - x);$$

[41] Questo è molto importante, perché ci dice che ogni espressione del calcolo puè essere riscritta in termini equazionali nella forma $f(x) = 0$. Si tratta della cosiddetta *legge di Schröder*.

[42] Schröder mostra come lo sviluppo di una funzione non sia altro che una generalizzazione del teorema 14 su cui si basa l'intero calcolo.

[43] Ovverosia: *Noi possiamo lasciare da parte l'interpretazione logica dei simboli in una data equazione; convertirli in simboli quantitativi suscettibili solo dei valori* 0 *ed* 1*; eseguire su di essi, come tali [i.e. simboli quantitativi] tutti i processi necessari per la soluzione e, finalmente, ridare ad essi la loro interpretazione logica* [primitiva] [**Boo58**, p. 70]. Va inteso, in questo inserto booleano che x corrisponde ad un generico simbolo di classe, $1 - x$ al suo complemento, la sovrapposizione di simboli all'interesezione e la somma all'unione.

come sviluppo cercato. Il secondo membro dell'equazione rappresenta in maniera adeguata $f(x)$, qualsiasi forma la funzione possa avere. x, considerato come un simbolo quantitativo, ammette solo i valori 0 ed 1, e per ognuno di questi valori lo sviluppo

$$f(1)x + f(0)(1 - x),$$

assume lo stesso valore della funzione $f(x)$[**Boo58**, pp. 72–73].

L'idea di Boole è quella di associare ai simboli logici solo un'interpretazione in termini aritmetici. Ciò semplifica il calcolo. Alla fine, ottenuto il risultato, possiamo ri-associare ai nostri simboli l'intepretazione di partenza. Si veda più in basso per l'ascendenza di questo sviluppo dalla serie di Taylor.⌋

Il lavorìo calcolistico, a questo proposito, può spesso essere ridotto grazie ad un'osservazione di Boole, che fornisce all'enunciato [$f(A) = (X \cap A) \cup (Y \cap -A)$] la forma:

$$\text{(D)} \quad f(A) = (f(V) \cap A) \cup (f(\emptyset) \cap -A),$$

poiché, chiaramente, $f(V)$ e $f(\emptyset)$ possono essere dedotti direttamente anche dall'espressione ancora non ridotta $f(A)$, ponendo

$$A = V \text{ insieme a } -A = \emptyset, \text{ rispettivamente, } A = \emptyset \text{ e } -A = V$$

e sostituendo [questi valori] nell'espressione [$f(A)$] tenendo conto di 8 e 9 [che definiscono il comportamento di V e $\emptyset$ in rapporto all'intersezione e all'unione]. Questo si fonda sulla validità generale delle equazioni logiche, in base a cui la validità [che sussiste] tra l'espressione data di $f(A)$ e quella cercata (A) (del resto già riconosciuta come lecita) deve sussistere anche quando si pone A uguale a $\emptyset$ o V [44].

L'enunciato (D) si lascia facilmente estendere da uno a due o più argomenti:

$$\begin{aligned} \text{(E)} \quad f(A, B) = &(f(V, V) \cap (A \cap B)) \cup (f(V, \emptyset) \cap (A \cap -B)) \\ &\cup (f(\emptyset, V) \cap (-A \cap B)) \cup (f(\emptyset, \emptyset) \cap (-A \cap -B)), \end{aligned}$$

⌈Dato che i quattro coefficienti di (E) sono tutti diversi tra loro, possiamo rinominarli come $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, rispettivamente per ottenere:

$$\begin{aligned} \text{(E)} \quad f(A, B) = &(\alpha \cap (A \cap B)) \cup (\beta \cap (A \cap -B) \\ &\cup (\gamma \cap (-A \cap B)) \cup (\delta \cap (-A \cap -B)), \end{aligned}$$

Raccogliamo, rispetto alla A:

$$A \cap ((\alpha \cap B) \cup (\beta \cap -B)) \cup -A \cap ((\gamma \cap B) \cup (\delta \cap -B))$$

Come si vede facilmente, quest'ultima equazione coincide perfettamente con la (A) di cui, semmai è una generalizzazione. Si può, quindi, concludere che un

[44] In altre parole, le espressioni logiche (equazioni) si contraddistinguono per essere sempre vere, a prescindere dalle possibili interpretazioni; sono, cioè, delle *tautologie*.

equazione a due incognite si riconduce al caso di un sistema di due equazioni ad un'incognita soltanto (è ciò che accade nel caso di un'equazione differenziale di secondo grado che viene ri-espressa come un sistema di due equzioni differenziali di primo grado ciascuna [**Jän04**, pp. 89–90]). Il caso di più simboli di classe è simile. Avendo un solo simbolo di classe (per esempio A e $-A$) con due sole possibili interpretazioni ($\emptyset, V$) il numero degli addendi è 2^1, con due simboli di classe $2^2 = 4$, con tre $2^3 = 8$ e così via. Ovviamente, il caso di un'equazione con 2^n addendi è da rincondursi a quello di un'equazione con 2^{n-1} addendi. Insomma, abbiamo a che fare con un processo ricorsivo che alla fine termina con (A).⌋

$$
\text{(F)}\quad \begin{aligned} f(A,B,C) = {} & (f(V,V,V) \cap (A \cap B \cap C)) \\ & \cup (f(V,V,\emptyset) \cap (A \cap B \cap -C)) \\ & \cup (f(V,\emptyset,V) \cap (A \cap -B \cap C)) \\ & \cup (f(V,\emptyset,\emptyset) \cap (A \cap -B \cap -C)) \\ & \cup (f(\emptyset,V,V) \cap (-A \cap B \cap C)) \\ & \cup (f(\emptyset,V,\emptyset) \cap (-A \cap B \cap -C)) \\ & \cup (f(\emptyset,\emptyset,V) \cap (-A \cap -B \cap C)) \\ & \cup (f(\emptyset,\emptyset,\emptyset) \cap (-A \cap -B \cap -C)), \end{aligned}
$$

eccetera [45].

[45] Riformulo (F) come ho fatto con (E): siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta$ e θ i rispettivi coeffficienti. Raccogliamo, direttamente, rispetto alla A:

$$
\begin{aligned} & A \cap \{[(\alpha \cap (B \cap C)) \cup (\beta \cap (B \cap -C))] \\ & \quad \cup [(\gamma \cap (-B \cap C)) \cup (\delta \cap (-B \cap -C))]\} \\ \cup - {} & A \cap \{[(\epsilon \cap (B \cap C)) \cup (\zeta \cap (B \cap -C))] \\ & \quad \cup [(\eta \cap (-B \cap C)) \cup (\theta \cap (-B \cap -C))]\} \end{aligned}
$$

Come si vede, tale espressione ha la forma (A). Per calcolarla, ora dobbiamo raccogliere rispetto alla B (si notino le parentesi quadre):

$$
B \cap \{(\alpha \cap C) \cup (\beta \cap -C)\} \cup -B \cap \{(\gamma \cap C) \cup (\delta \cap -C)\}
$$

Questo per il primo addendo. Il secondo è simile ed entrambi hanno la forma (A):

$$
B \cap \{(\epsilon \cap C) \cup (\zeta \cap -C)\} \cup -B \cap \{(\eta \cap C) \cup (\theta \cap -C)\}
$$

Ad ogni punto dello sviluppo, si ha una ramificazione, a prima vista sempre più complessa, ma sempre della forma $A = (X \cap A) \cup (Y \cap -A)$. Cioè, in tutti i casi, la nostra equazione viene riscritta in termini di due classi l'una complementare all'altra e la risoluzione di un'equazione viene ricondotta a quella dell'equazione *immediatamente* precedente. Il che la dice lunga sull'importanza del teorema 14, autentico nodo di svolta dell'intero libro.

Una tale rappresentazione la chiamiamo *sviluppo* dell'espressione funzionale $[f(\cdot)]$ rispetto ai simboli A, ai simboli A, B o ai simboli A, B, C, eccetera. Per memorizzare il procedimento [Bildungsgesetz] si può formulare la regola [seguente]:

⌈Mi permetto di interpolare ancora da [**Boo58**]:

> Proposizione II.
>
> *Come espandere o sviluppare una funzione con un qualsiasi numero di simboli logici.*
>
> Iniziamo con il caso in cui abbiamo due simboli [soltanto], x ed y e rappresentiamo la funzione da svilupparsi con $f(x, y)$.
>
> Per prima cosa, considerando $f(x, y)$ come funzione di x soltanto e espandendola usando il teorema (1) [come abbiamo visto sopra], abbiamo
>
> $$f(x, y) = f(1, y)x + f(0, y)(1 - x); \tag{2}$$
>
> dove $f(1, y)$ rappresenta cosa la funzione diventa quando in essa scriviamo per x, 1 e $f(0, y)$ cosa diventa la [stessa] funzione quando in essa scriviamo per x, 0.
>
> Ora, prendendo il coefficiente $f(1, y)$ e considerandolo come una funzione di y, espandendolo di conseguenza, otteniamo
>
> $$f(1, y) = f(1, 1)y + f(1, 0)(1 - y), \tag{3}$$
>
> dove $f(1, 1)$ rappresenta cosa $f(1, y)$ diventa quando y è posto uguale ad 1 e $f(1, 0)$ cosa diventa $f(1, y)$ quando poniamo y uguale a 0.
> Alla stessa maniera, il coefficiente $f(0, y)$ dà, per espansione,
>
> $$f(0, y) = f(0, 1)y + f(0, 0)(1 - y). \tag{4}$$
>
> Si sostituiscano in (2) per $f(1, y)$, $f(0, y)$, i rispettivi valori forniti da (3) e (4); otteniamo
>
> $$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)x(1-y) + f(0, 1)(1-x)y + f(0, 0)(1-x)(1-y), \tag{5}$$
>
> come espansione richiesta. Qui $f(1, 1)$ rappresenta cosa $f(x, y)$ diviene quando poniamo in essa $x = 1, y = 1$; $f(1, 0)$ rappresenta cosa $f(x, y)$ diventa quando poniamo in essa $x = 1, y = 0$, e così via per il resto [**Boo58**, pp. 73–74].

Qual'è l'idea di Boole? Nel caso di una funzione a più variabili si considerano tutte le variabili eccetto una come parametri fissi e si sviluppa rispetto a questa variabile. Il processo, viene poi ripetuto per ogni *singola* variabile occorrente nell'espressione, mantenendo le altre sempre come parametri. Alla fine si mettono insieme tutti i risultati. In altri termini, avendo un'espressione $f(x_1, \ldots, x_n)$, si risolve per una variabile x_j per j compreso tra 1 ed n e si considerano le restanti

$n-1$ variabili come parametri. L'espressione diventa così $f(t, x_j)$ e ci siamo ricondotti allo sviluppo di una variabile soltanto.⌋

per sviluppare un'espressione funzionale rispetto ai suoi argomenti, si sostituiscano tutti gli argomenti con V e si intersechi il risultato con l'intersezione ordinata degli argomenti $[f(V,V) \cap (A \cap B)]$*; si ottiene così* | *il primo membro dello sviluppo cercato. In questo si sostituisca l'ultimo argomento V con $\emptyset$ e allo stesso tempo l'ultimo fattore dell'argomento con la sua negazione* $[f(V,\emptyset) \cap (A \cap -B)]$; *in questo modo si avrà trovato il secondo membro. In entrambi i membri precedenti, si sostituisca ancora l'argomento V trovato al penultimo passo, con $\emptyset$ e allo stesso tempo il penultimo fattore dell'argomento con la sua negazione* $[(f(\emptyset,V) \cap (-A \cap B)) \cup (f(\emptyset,\emptyset) \cap (-A \cap -B))]$; *con questa mossa risultano due ulteriori membri. Nei quattro membri ottenuti in questo modo* $[(f(V,V) \cap (A \cap B)) \cup (f(V,\emptyset) \cap (A \cap -B)) \cup (f(\emptyset,V) \cap (-A \cap B)) \cup (f(\emptyset,\emptyset) \cap (-A \cap -B))]$, *si tratti alla stessa maniera il terz'ultimo argomento,* e così via. pagina 16

I membri dell'intersezione sviluppata:

$$\text{(G).} \qquad \begin{cases} V &= A \cup -A, \qquad \text{rispettivamente} \\ V &= (A \cup -A) \cap (B \cup -B) = (A \cap B) \cup (A \cap -B) \\ & \quad \cup (-A \cap B) \cup (-A \cap -B), \\ V &= (A \cup -A) \cap (B \cup -B) \cap (C \cup -C) = \quad \text{eccetera} \end{cases}$$

si chiamano *costituenti* dello sviluppo, in contrasto ai *coefficienti* $f(V,V,V)$, $f(V,V,\emptyset)$, ecc., con i quali appaiono moltiplicati.

L'unione di tutti i costituenti è $= V$ in qualsiasi sviluppo *completo*; cioè, fintanto che si pensano anche i costituenti mancanti come dotati di coefficiente nullo.

L'intersezione di due diversi costituenti è $= \emptyset$ grazie a 7, poichè almeno due dei fattori di argomento $A, B, C, \ldots$ devono essere contraddittori tra loro; tutti i costituenti sono, per questo motivo, reciprocamente disgiunti [46].

15. *Teorema.* Per facilitare il calcolo con espressioni *sviluppate* è utile l'osservazione che non solo l'unione di due funzioni sviluppate a partire dai medesimi simboli viene trovata unendo insieme quei termini che hanno coefficienti uguali [47], ma anche per l'intersezione vale il teorema:

L'intersezione di (due) aggregati sviluppati a partire dagli stessi argomenti si ottiene spostando uno di questi aggregati sopra l'altro [48]; essa verrà sviluppata,

[46] Si vedrà, più oltre nel testo, che su questo fatto si basa il teorema principale del calcolo schröderiano.

[47] Per idempotenza.

[48] Per esempio, sia $f(A) = \alpha_1 A \cup \alpha_2 A$ e $f(B) = \beta_1 A \cup \beta_2 A$; allora, $f(A) \cap f(B) = \alpha_1\beta_1 A \cup \alpha_2\beta_2 A$.

intersecando i coefficienti dei termini con lo stesso nome; per esempio:

$$\begin{aligned}&\{(P\cap A\cap B)\cup(Q\cap A\cap -B)\cup(R\cap -A\cap B)\cup(S\cap -A\cap -B)\}\\ &\cap\{(P'\cap A\cap B)\cup(Q'\cap A\cap -B)\cup(R'\cap -A\cap B)\cup(S'\cap -A\cap -B)\}\\ &=\{(P\cap P')\cap(A\cap B)\}\cup\{(Q\cap Q')\cap(A\cap -B)\}\\ &\cup\{(R\cap R')\cap(-A\cap B)\}\cup\{(S\cap S')\cap(-A\cap -B)\}\end{aligned}$$

Questo teorema è una conseguenza immediata della regola per la moltiplicazione di polinomi, considerando l'osservazione a conclusione del numero precedente.

16. *Teorema*. Se
$$A\cup B=\emptyset,$$
allora deve essere:
$$A=\emptyset \text{ e } B=\emptyset.$$

[16d. *Teorema*. Se
$$A\cap B=V,$$
allora deve essere:
$$A=V \text{ e } B=V.]$$ |

pagina 17 *Un'unione non può che essere $\emptyset$, se tutti i i suoi membri si annullano.*

Dimostrazione. L'intersezione delle premesse con A dà, grazie a 5 [idempotenza] $A\cup(A\cap B)=\emptyset$, pertanto, in virtù di 10 [assorbimento] $A=\emptyset$. Da ciò segue anche l'altra identità $B=\emptyset$ con 9d [$A\cup\emptyset=A$], resto delle premesse, come si può dimostrare direttamente attraverso l'intersezione di quest'ultima con B più o meno allo stesso modo. [Q.E.D.]

Il teorema si lascia estendere facilmente da due ad un numero arbitrario di elementi [Glieder].

7. [Legge di Schröder]

Il precedente teorema è estremamente importante perché ci permetterà di metterci in connessione con l'enunciato seguente: *ogni sistema di equazioni logiche si può sostituire completamente da un'unica equazione: [cioè quella composta dalla riunione delle] equazioni con il membro destro portato uguale a $\emptyset$.*

17. *Teorema. Ogni equazione logica può essere portata da un lato uguale a $\emptyset$. L'equazione*
$$A=B$$
è infatti *completamente equivalente a*
$$(A\cap -B)\cup(-A\cap B)=\emptyset.$$

[17d. *Teorema*. Invece di
$$A=B$$
si può porre
$$(A\cup -B)\cap(-A\cap B)=V$$
oppure,
$$(A\cap B)\cup(-A\cap -B)=V.]$$

Dimostrazione. [da sinistra verso destra, $\Rightarrow$] Se la prima identità è corretta, allora vale comunque la seconda, poichè essa si riduce a 7 [$A\cap -A=\emptyset$] quando A viene sostituito con B [12 e 14], e si sfrutta 5d [idempotenza].

[da destra verso sinistra, $\Leftarrow$]. Al contrario, quando la seconda equazione è soddisfatta [$(A\cap -B)\cup(-A\cap B)=\emptyset$], allora deve essere per 16:

$$A\cap -B=\emptyset \qquad \text{e} \qquad -A\cap B=\emptyset.$$

Se

$$A \cup -A = B \cup -B$$

viene intersecata con A, tenuto conto dell'equazione identicamente corretta in virtù di 7d [$A \cup -A = V$], allora risulta, tenuto conto di 5 e 7:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap -B) = (A \cap B).$$

Parimenti, eseguire, intersecando [stavolta] con B:

$$(A \cap B) \cup (-A \cap B) = B \qquad \text{ossia} \qquad (A \cap B) = B;$$

da ciò e da[l postulato] III.: $A = B$. [Q.E.D.] [49]

8. [Leggi di de Morgan]

Per utilizzare appieno l'ultimo enunciato, bisogna essere nelle condizioni *di poter scrivere per ogni espressione di classe, anche se non complicata, subito la sua negazione*.

A ciò ci aiutano i tre seguenti teoremi [18, 18d e 19]:

18. *Teorema. La negazione di un'intersezione è l'unione delle negazioni dei fattori:* $-(A \cap B) = -A \cup -B$	18d. *Teorema. La negazione di un'unione è l'intersezione delle negazioni degli addendi:* $-(A \cup B) = -A \cap -B$, ⌋

⌈In questo modo le due operazioni binarie (dirette) del calcolo si lasciano interdefinire a vicenda; ovverosia:

$$A \cap B =: -(-A \cup -B)$$
$$A \cup B =: -(-A \cap -B)$$

Il che rende superflua l'introduzione di due operazioni binarie: è sufficiente una insieme al complemento. In questo senso, non ci sono motivi logici per sostenere la priorità del *meet* e *join* rispetto alla divisione e alla sottrazione. Si tratta, semplicemente di una scelta calcolistica piuttosto che un'altra. Non c'è nessun motivo ontologico che giustifichi la priorità di $\cap$ rispetto a $\cup$. Quale delle due è la duale dell'altra? Possiamo assumere $\cap$ e considerare $\cup$ la sua duale, o viceversa. Sono solo motivazioni psicologiche a preferire un'operazione piuttosto che un'altra. Penso alle algebre relazionali, dove si assume come unica operazione primitiva binaria la composizione. Ma per un motivo molto semplice. Non è facile visualizzare la somma peirceana tra relazioni. Quindi, è preferibile introdurla in base alla

---

[49] Vorrei riassumere i recenti risultati, da 14 a 17: ogni equazione è riscrivibile come composizione lineare di due classi tra loro disgiunte; ogni equazione può essere portata in forma omogenea (addirittura un insieme di equazioni); concludiamo: ogni equazione si lascia esprimere come una combinazione lineare ed omogenea di due classi disgiunte tra loro. Ciò è essenziale per capire appieno la portata del teorema 20: il culmine del calcolo logico di Schröder, non solo come presentato qui nell'*Operationskreis*, ma anche come presentato nel primo volume delle *Lezioni* [**Sch66b**, pp. 447 e segg.]. Su di esso si basa l'intero edificio logico schröderiano e dopo vederemo il perché.

composizione e al complemento.⌋

pagina 18 che, detto incidentalmente, potrebbero essere generalizzati e raggruppati nella regola [seguente]:

Per formare la negazione di un'espressione costruita attraverso le operazioni dirette, si sostituiscano in questa tutti i termini semplici [i.e. non ulteriormente decomponibili] con le loro negazioni e si traduca l'espressione [così ottenuta] in termini duali, cioè, sostituendo l'unione con l'intersezione [50].

Dimostrazione di 18d - quella di 18 è da eseguirsi in maniera completamente duale a questa.

Sia $(-A\cap -B)$ la corretta negazione di $(A\cup B)$, allora in base a 7 [$A\cup -A = V$] sussistono entrambe le relazioni:

$$(A \cup B) \cap (-A \cap -B) = \emptyset \qquad \text{e} \qquad (A \cup B) \cup (-A \cap -B) = V;$$

viceversa, se queste relazioni sono soddisfatte, allora lo è grazie a 12 [univocità del complemento] e 7 anche $(-A \cap -B) = -(A \cup B)$. [Q.E.D.]

La correttezza della prima relazione [$(A \cup B) \cap (-A \cap -B) = \emptyset$] [51] è subito evidente; per la seconda, si potrebbe addurre una dimostrazione sviluppando l'unione $A \cup B$ in termini dei suoi membri A e B. Vale a dire:

$$(A \cup B) = A \cap (B \cup -B) \cup B \cap (A \cup -A);$$

perciò, per 5d [idempotenza]:

$$\text{(H)} \qquad (A \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap -B) \cup (-A \cap B) \text{ [52]};$$

quindi, risulta $(A \cup B) \cup (-A \cap -B) = (A \cup -A) \cap (B \cup -B) = V$; vedi (G). Si potrebbe, del resto, anche concludere in questa maniera: prima si scompongono [zerlegen] i termini mediani, quindi gli estremi:

$$(A\cup B)\cup(-A\cap -B) = \langle A\cup\{(A\cap B)\rangle\cup\langle(-A\cap B)\}\cup(-A\cap -B)\rangle = A\cup -A = V.$$

Osservazione. I tre termini dell'equazione testè dimostrata (H), così come anche i quattro della scomposizione di 1 in (G), corrispondono alle tre (rispettivamente, quattro) parti in cui l'area $A \cup B$ (rispettivamente, l'intero piano) viene intersecata da A e B (vedi figura 4).

---

[50] Vale a dire, sia data l'espressione $A \cap (B \cup -C) = \emptyset$; sostituiamo tutti i termini con le loro negazioni: $-A \cap (-B \cup C) = V$; infine, dualizziamo: $-A \cup (-B \cap C) = V$.

[51] Infatti, con un semplice cambiamento di lettere, abbiamo che $A \cap -A = \emptyset$.

[52] Si tratta di semplice computazione del tipo: $x(y + z) = xy + xz$, che, detto per inciso, è la distributività, non l'idempotenza.

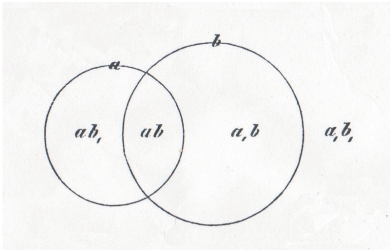

FIGURA 4

Mentre (H) rappresenta la traduzione formale di A *e* B [53], dove la particella *e* potrebbe anche essere sostituita | dall'*o* (= *oppure od anche*) *inclusiva*, si tradurrà pagina 19
l'*esclusiva o* (= *oppure ma non*), cioè, l'*o* in *o* A *o* B*, ma non entrambi*, con:

$$\text{(K)} \qquad (A \cap -B) \cup (B \cap -A)\ ^{54}.$$

A partire dai precedenti enunciati, in ultima istanza da 18d [leggi di de Morgan], si ottiene spesso la negazione sotto la forma [alquanto] scomoda di un'intersezione di espressioni di unione, che è superfluo moltiplicare. Per risparmiare questo lavoro, abbiamo bisogno di un ulteriore teorema, attraverso cui generalizzare tali espressioni.

19.*Teorema. Per formare la negazione di un'espressione sviluppata, si sostituiscano semplicemente tutti i coefficienti con le loro negazioni.* Se si ha:

$$f = P \cap (A \cap B) \cup Q \cap (A \cap -B) \cup R \cap (-A \cap B) \cup S \cap (-A \cap -B),$$

allora avremo:

$$-f = -P \cap (A \cap B) \cup -Q \cap (A \cap -B) \cup -R \cap (-A \cap B) \cup -S \cap (-A \cap -B)\ ^{55}.$$

---

[53] È quanto stiamo ribadendo da tempo: Schröder sta costruendo un calcolo formale, capace di essere interpretato in vari modi. Una di queste possibile interpretazioni è rappresentata dal *calcolo proposizionale* dove, ora le lettere non stanno più per classi, ma per enunciati di senso compiuto. Pertanto, la congiunzione di due enunciati $P \wedge Q$ sarà rappresentata formalmente da $A \cap B$, o meglio ancora da $x \sqcap y$.

[54] In altre parole, mentre nella lettura inclusiva della disgiunzione è possibile che siano veri entrambi i disgiunti (come in: *vado a Parigi* ***o*** *a Roma, ma non è escluso che vada in entrambi i luoghi*), nel caso della disgiuzione esclusiva solo uno dei due disgiunti può essere vero (come in: *vado a Parigi* ***o*** *a Roma; cioè, se vado a Parigi, allora non vado a Roma e se vado a Roma, non vado a Parigi*. Schröder non vede che (K) definisce la differenza simmetrica tra due (simboli di) classe: $A \ominus B =: \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$. Questa definizione è un'alternativa tra $A - B$ e $B - A$. Da ciò si deduce facilmente la differenza usuale. Per un libro che intende definire con precisione il significato delle operazioni inverse, questa svista non è di poco conto.

[55] Come già sottolineato nella parte tedesca, quest'espressione coincide perfettamente con la precedente, salvo per i coefficienti: al posto di P, Q, R, S abbiamo qui $-P, -Q, -R, -S$. I costituenti sono i medesimi.

La *dimostrazione* si ottiene subito attraverso la constatazione che per [le funzioni] date f e $-f$, le relazioni:

$$f \cap -f = \emptyset \qquad \text{e} \qquad f \cup -f = V,$$

sono soddisfatte identicamente, grazie alla osservazione conclusiva dopo 15 e 14. [Q.E.D.] [56]

Euristicamente, anche se in maniera non proprio così compatta [57], la giustificazione del teorema seguente è in ogni caso degna di nota, poichè in essa il teorema viene ottenuto prima per il caso di un unico argomento del suo sviluppo, in base a 18 [leggi di de Morgan]:

$$\begin{aligned}
&(X \cap A) \cup (Y \cap -A) = -(X \cap A) \cap -(Y \cap A) \\
&= (-X \cup -A) \cap (-Y \cap A) = (-X \cap -Y) \cup (-X \cap A) \cup (Y \cap -A) \\
&= (-X \cap -Y) \cap (A \cup -A) \cup (-X \cap A) \cup (-Y \cap -A) \\
&= (-X \cap A) \cap (V \cup -X) \cup (-Y \cap -A) \cap (V \cup -A) \\
&= (-X \cap A) \cup (-Y \cap -A),
\end{aligned}$$

---

[56] Considero terminata a questo punto la dimostrazione, in quanto ciè che segue è pura computazione.

[57] *...wenn nicht ganz so kurz,...* Questa frase incidentale esprime il rammarico di Schröder di doversi allontanare da una formulazione tanto precisa quanto limitata nello spazio. Abbiamo visto, fin dall'inizio come questa fosse una preoccupazione tipica di Schröder. Oserei, addirittura, affermare che il tentativo di *condensare* [condensieren] le formule nel calcolo dei relativi (eliminando le variabili ed i quantificatori ad esse connessi) rientri in questa prospettiva, formata all'eleganza ed alla perspicuità. Un esempio soltanto; si consideri la formulazione della transitività in maniera usuale e nel calcolo dei relativi: ovvero $\forall x, y, z(xRy \wedge yRz \to xRz)$ e $R \circ R \subseteq R$. Nessuno vorrà negare la maggiore eleganza della seconda formulazione. La domanda però rimane: una formula elegante e 'compressa' è *con ciò* anche più perspicua? Nel caso precedente, quale delle due formulazioni della transitività è la più chiara a prima vista? Non si tratta qui di fare una competizione; è lo stesso Schröder ad affermare questo: cioè che il suo simbolismo sta a quello peaniano come un off-shore ad una barca a vela. L'idea di creare un simbolismo capace di esprimere nella maniera piú efficace le scienze esatte è lo scopo dell'ultimo Schröder (la ricerca della *pasigrafia* come linguaggio universale; la controparte algebrica della *Begriffsschrift* fregeana a cui Schröder contestava l'uso della pagina in verticale, secondo un'impostazione giapponese...). *Verfassers [d.h. Freges] Formelsprache huldigt in der That nicht allein der japanischen Sitte einer Verticalschrift, sondern bedingt auch, dass die Seite bei ihm nur eine Zeile hat oder allenfalls, wenn wir die zur Erläuterung beigegebene Columne mitrechnen, zwei Zeilen! Diese ungeheure Raumverschwendung, welche, wie hiernach ersichtlich, der Frege'schen* Begriffsschrift *in typographischer Hinsicht eigen ist, dürfte aber (...) definitiv den Ausschlag zu Gunsten der Boole'schen Schule Geben* [**Sch80b**, pp. 90–91] [La lingua formale dell'autore [i.e. Frege] indulge non solo all'usanza giapponese di una scrittura verticale, ma implica anche che [ogni] pagina contenga una sola riga, o al massimo, se noi mettiamo nel conto anche le colonne per la spiegazione, due righe! Questo mostruoso [ungeheure] spreco di spazio che, come risulta evidente da tutto ciò, dal punto di vista tipografico è caratteristico della *Begriffsschrift* fregeana, potrebbe in definitiva risultare decisivo per scegliere la scuola booleana (...)]. Tuttavia, fuorviato dal simbolismo fregeano, Schröder mancò di vedere proprio nella *Begriffsschrift* la teoria della quantificazione per la prima volta pienamente sviluppata. Comunque, la questione resta: ciò che è compresso è anche più comprensibile?

poi per il caso di più argomenti di sviluppo, ⟨viene dedotta⟩ in maniera ricorsiva:

$$\begin{aligned}
&-\{(P\cap(A\cap B))\cup(Q\cap(A\cap -B))\\
&\qquad\cup(R\cap(-A\cap B))\cup(S\cap(-A\cap -B))\}\\
&=-\{((P\cap B)\cup(Q\cap -B))\cap A\cup((R\cap B)\cup(S\cap -B))\cap -A\}\\
&=-((P\cap B)\cup(Q\cap -B))\cap A\cup-((R\cap B)\cup(S\cap -B))\cap -A\\
&=((-P\cap B)\cup(-Q\cap -B))\cap A\cup((-R\cap B)\cup(-S\cap -B))\cap -A\\
&=-P\cap(A\cap B)\cup -Q\cap(A\cap -B)\cup -R\cap(-A\cap B)\cup -S\cap(-A\cap -B).
\end{aligned}$$

⌈Questa dimostrazione è scorretta se si utilizzano le leggi di de Morgan in maniera inopportuna: la negazione dello sviluppo $(\alpha\cap X)\cup(\beta\cap Y)$ non è $(-\alpha\cup -X)\cap(-\beta\cup -Y)$ ma $(-\alpha\cap X)\cup(-\beta\cap Y)$.⌋

L'applicazione del teorema [19] può essere un'insidiosa fonte di errori. Infatti, quando nell'espressione che si deve negare mancano fin dal principio alcuni singoli termini, non si dovrebbe [58] dimenticare che i loro costituenti, negati, devono ricevere come coefficienti V. Allo stesso modo, si devono completare sviluppi difettosi anche attraverso l'introduzione di coefficienti nulli (almeno nel pensiero) e, quindi, recuperare *tutti* i termini, negando i loro coefficienti.

Uno sviluppo, che riguardo a due argomenti, | sia difettoso nel senso [appena] indicato può essere certamente completo riguardo ad uno solo di essi e si trova anche direttamente, per esempio, che: pagina 20

$$-((A\cap -B)\cup(-A\cap B))=(A\cap B)\cup(-A\cap -B)$$

e, al contrario: $-((A\cap B)\cup(-A\cap -B))=(A\cap -B)\cup(-A\cap B)$.

I tre semplici precedenti teoremi sono essenziali, poichè aiutano a rendere superfluo l'apparato calcolistico aritmetico-logico booleano [59] - un apparato che, essenzialmente, si fonda sul mantenimento [sulla giustificazione; vedi sotto al capitolo 4, il teorema 40d] e sull'applicazione dei difficili schemi di sviluppo (D), (E), (F),... sotto 14 per tutte le espressioni ottenute attraverso la soluzione di equazioni *in base a regole aritmetiche* [60].

---

[58] Data l'importanza del passaggio e che nello sviluppo non manchi nessun termine, trovo un po' debole l'utilizzo del verbo *dürfen* da parte di Schröder. *Es ist nicht überzusehen...* Comunque, si tratta di questo: i costituenti mancanti vengono sostituiti da costituenti nulli che nella negazione assumono come coefficienti V.

[59] *arithmetisch-logischen Rechenapparat*. Infatti, ed è il rimprovero che Schröder muove a Boole, nella teoria booleana convivono elementi logici ed elementi matematici. Boole non è stato in grado di rendere superflua la componente matematica, mancando di creare un calcolo completamente logico. Riparare a questo difetto è lo scopo del presente libretto schröderiano.

[60] Come abbiamo visto, lo sviluppo booleano è un caso particolare di 14. Ma si noti l'espressione corsivata da Schröder: *nach arithmetischen Regeln*. Le soluzioni booleane vengono ottenute mediante l'ausilio di regole aritmetiche, senza affidarsi unicamente alla logica.

CAPITOLO 2

[Il problema della soluzione]

20. *Teorema, L'equazione*

$$(X \cap A) \cup (Y \cap -A) = \emptyset$$

è completamente equivalente ad entrambe le equazioni seguenti:

$$X \cap Y = \emptyset \quad \text{e} \quad A = (U \cap -X) \cup Y$$

- dove per U s'intende una classe arbitraria [1].

⌈Su questo teorema culmina tutto il lavoro logico di Schröder. Esso verrà ripreso nel secondo volume delle *Lezioni* [**Sch66b**, pp. 447–466] per essere poi tradotto nel calcolo dei relativi [**Sch66c**, pp. 150–200], laddove troverà una sezione dedicata, *Das Auflösungsproblem in der Algebra der binären Relative* [Il problema della soluzione nell'algebra dei relativi binari]. L'importanza è data dal fatto che questo teorema ci permette di risolvere il problema dell'eliminazione dei coefficienti. Infatti, tutto sta a portare un'equzione nella forma $(X \cap A) \cup (Y \cap -A) = \emptyset$, perchè allora sappiamo che $X \cap Y = \emptyset$. Comunque, riguardo all'interesse per il problema della soluzione, non dimentichiamoci del background algebrico di Schröder:

> Schröder, come altri matematici in questa disciplina, consideravano il problema della soluzione delle equazioni logiche come uno dei problemi centrali dell'algebra logica [2].

Del resto, prima di lui, anche altri algebristi si erano occupati della faccenda. Ma non è solo una ragione di tipo formativo a spiegare questa inclinazione di Schröder verso il problema della soluzione. Come si è potuto notare, la logica schröderiana è una logica equazionale in cui il calcolo avviene mediante la manipolazione di equazioni. Così, diciamo, il teorema x deriva dall'utilizzo dei teoremi y e z. Manca, cioè, una regola di *derivazione* che applicata a delle formule (vere) produca delle formule vere. In Schröder, in un certo senso, ogni teorema è al tempo stesso teorema e regola di derivazione. È chiaro che in questo modo non si può andare distanti.

---

[1] Chiamerò queste due ultime equazioni del teorema *condizioni aggiuntive* [adventive Anforderungen], in conformità a quanto farà lo stesso Schröder nel terzo volume delle *Lezioni* [**Sch66c**, p. 163 e segg.].

[2] [**KY01**, p. 29].

Ciò risulta evidente quando siamo interessati a conoscere le possibili conseguenze di alcune ipotesi. Siamo lontani dal concetto moderno di *teoria* come il più piccolo insieme contenente gli assiomi e chiuso rispetto all'operazione di conseguenza logica $\models$. Mi permetto di citare van Hejneoort al proposito, sottolineando che quanto lui scrive a proposito di Löwenheim vale a maggior ragione per Schröder:

> Per Peirce, Schröder e i loro seguaci, d'altra parte, le formule quantificazionali sono sì al centro della loro attenzione, ma ora quello che manca è proprio la nozione di sistema formale. Così, nel suo fondamentale [**Löw15**], Löwenheim tratta con formule quantificazionali con identità, ma il suo approccio è puramente modellistico, cioè semantico: egli non ha assiomi formali o regole di inferenza per la teoria della quantificazione. Il suo concetto fondamentale è quello di verità di una formula in una data interpretazione in un dominio dato e con esso egli tratta validità e soddisfacibilità [3].

Infatti, ciò che manca al calcolo logico di Schröder è una regola di deduzione. A questo punto entra in gioco il problema della soluzione. Risolvere un'equazione, significa non solo trovare i valori delle incognite in gioco, ma anche recuperare tutte le sue (possibili) conseguenze. Infatti, la soluzione di un'equazione è una sua conseguenza:

> (...) Poretskiĭ intendeva con *soluzione di un'equazione* la deduzione di conseguenze dall'informazione primaria [4].

Ancora,

> Poretskiĭ considerava un'equazione logica, non come una condizione da soddisfare, ma come una premessa dalla quale fosse necessario derivare tutte o qualche conclusione logica di un certo tipo [5].

Ecco il problema, dato un certo numero di premesse (espresse in forma equazionale) dedurre le loro conseguenze. Dalla legge di Schröder, noi sappiamo che ogni insieme di equazioni può essere ridotto ad un'unica equazione con al membro destro $\emptyset$. Così, abbiamo compresso tutte le nostre premesse in un'unica soltanto. Adesso si tratta di risolvere quest'ultima per ottenerne le conseguenze.

Data l'estrema generalità in cui l'autore tedesco si vuol collocare, si tratta non di derivare qualche, magari anche interessante, conseguenza da delle premesse, ma di derivarle tutte. Se mi si consente un certo abuso di linguaggio, Schröder sta simulando le moderne teorie assiomatiche nel cercare che il suo calcolo sia chiuso rispetto all'operazione di soluzione. Mi rendo conto che nel caso in esame, non ha

[3] [**Göd99**, p. 48].

[4] [**KY01**, p. 33]. Ovviamente, quanto detto a proposito di Poretskiĭ vale anche per Schröder.

[5] [**KY01**, p. 31].

alcun senso di parlare di *chiusura*. Volevo solo esplicitare meglio la similitudine tra la moderna operazione di deduzione e il problema della soluzione.

Qui nascono i problemi. Non è che puntando a quest'estrema generalità si perda di vista lo scopo primario? Se io, per esempio, ho delle premesse che mi caratterizzano le condizioni iniziali di un'esperimento e voglio vedere come si comporta il sistema con il passare del tempo, non ho nessun interesse a conoscere quale possa essere la soluzione più generale del mio problema, ma quale sia la soluzione specifica del problema che mi sono posto.

Ovvero:

> Sia *data* una quantità (molto grande) di atomi suscettibili di decadimento. Sia n_0 il numero degli atomi presenti al tempo $t = 0$ (non ancora decaduti [zerfallenen]), $n(t)$ il numero di quelli al tempo t; allora - è il cosiddetto *principio di decadimento* - la perdita $(n(t_1) - n(t))$ degli atomi è proporzionale a $(t_1 - t) \cdot (\tilde{t})$ ($\tilde{t} =$ tempo *medio*); così, per un appropriato $\lambda > 0$
>
> $$n(t_1) - n(t) = -\lambda(t_1 - t)n(\tilde{t}) \qquad (t_1, t \geq 0).$$
>
> Si divida per $t_1 - t$ e si passi al limite $t_1 \longrightarrow t$ (al momento ci si *dimentichi* che $n(t)$ può avere solo valori interi e, quindi, in quanto *funzione a scale* non è affatto differenziabile!), si ottiene allora:
>
> $$\begin{aligned} n'(t) &= -\lambda n(t) \qquad\qquad t \geq 0 \\ n(0) &= n_0 \end{aligned}$$
>
> Cioè, $n(\cdot)$ è soluzione del problema del valor iniziale $y' = -\lambda y, y(0) = n_0$ [6].

In questa citazione, ovviamente, l'accento indica la derivata. Per esempio, y' è la derivata prima di y.

Così ragiona chi si aspetta *qualcosa* di concreto dalla risoluzione di un'equazione (in questo caso il numero di atomi ad un certo istante) e non si accontenta di sapere quale forma tale soluzione debba avere (rimando a questo proposito al mio [**Bon07**, pp. 53 e segg.]). Non si confonda il problema schröderiano con quello dei moderni sistemi assiomatici-formali. Lì, la completezza ha un ruolo assai significativo e per nulla astratto.

Ma passiamo in esame il teorema 20. Vederlo è molto semplice: s'immagini una classe B divisa in due parti disgiunte X e $B - X$; allora, potremmo dire che $B = X \cup (B - X)$. Ma $X = X \cap V$ e $(B - X) = (B - X) \cap -X$; quindi: $B = (X \cap V) \cup ((B - X) \cap -X)$. Basta fare un disegno per rendersene conto. Adesso, operiamo un cambiamento letterale: sostituiamo ad X, A e rinominiamo

[6] [**Wüs09a**, p. 162].

i due coefficienti $V = X$ e $(B - X) = Y$; infine, poniamo $B = \emptyset$. Abbiamo ottenuto la formula del teorema 20:

$$(X \cap A) \cup (Y \cap -A) = \emptyset$$

Come già osservato in precedenza, il teorema di orto-complementazione ci dice che ogni classe può essere espressa come la combinazione lineare di due classi complementari tra loro; o se si preferisce, come l'unione delle proiezioni di questa classe su due classi complementari tra loro. Questo risultato rafforza il precedente; anzitutto, richiede che i coefficienti siano indipendenti tra loro; cioè, se $(X \cap A) \cup (Y \cap -A) = \emptyset \rightarrow X \cap Y = \emptyset$. È a questo che serve la clausola $X \cap Y = \emptyset$ a richiedere che almeno uno dei due coefficienti sia uguale a $\emptyset$. Che ciò sia vero, lo dimostriamo subito:

$$(X \cap A) \cup (Y \cap -A) = \emptyset.$$

Sostituiamo il valore di A, fornito da Schröder, con la seconda condizione aggiuntiva:

$$(X \cap ((U \cap -X) \cup Y)) \cup (Y \cap -((U \cap -X) \cup Y)) = \emptyset$$
$$(X \cap U \cap -X) \cup (X \cap Y) \cup (Y \cap (-U \cap X \cap -Y)) = \emptyset$$
$$\emptyset \cup (X \cap Y) \cup \emptyset = X \cap Y = \emptyset$$

In questo modo, dal teorema e dalla seconda condizione aggiuntiva, abbiamo ottenuto la prima condizione aggiuntiva. Vorrei far notare, che senza la richiesta che i coefficienti siano disgiunti non c'è modo di concludere. Ma possiamo fare anche il contrario: cioè, dedurre la validità del teorema a partire dalla prima condizione. Infatti essa afferma che $X \cap Y = \emptyset$; per le leggi di de Morgan, uno degli addendi deve essere uguale a $\emptyset$. Scegliamo X. Avremo così che:

$$\emptyset \cup (Y \cap -A) = \emptyset$$

Ma noi sappiamo già che, una volta sostituito il valore di A dato dalla seconda condizione [$A = (U \cap -X) \cup Y$], $(Y \cap -A)$ si annulla [es verschwindet, direbbe Schröder]. Quindi, concludiamo che $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

Passiamo alla seconda clausola aggiuntiva: $A = (U \cap -X) \cup Y$ dove Schröder richiede che U sia completamente arbitraria. In base alla prima clausola si aprono due casi: 1) $X = \emptyset$; 2) $Y = \emptyset$. Partiamo con 1). Se $(X = \emptyset) \rightarrow (A = (U \cap X) \cup Y)$; in questo caso (disegnare per credere) non può che essere $A = Y \cup X$ e $U = -Y$. In questo caso, U non è affatto indeterminata. Passiamo al caso 2): $(Y = \emptyset) \rightarrow (A = (U \cap -X))$. Stavolta, X può essere una classe disgiunta da A; ma allora $U = -X$ e $A = A \cap U$. Anche in questo secondo caso, U risulta determinata.

Ma a parte queste considerazioni incidentali, ha senso domandarsi quali sono le conseguenze di un'equazione senza tener conto che si può sconfinare facilmente nell'astratto, nell'esageratamente generico? Lo noterà Peirce in una situazione analoga:

> Per quanto riguarda, poi, le soluzioni generali, esse sono nella maggior parte dei casi banali [7].

Infatti,

> Questa [soluzione particolare] solo raramente è difficile da trovare. Di solito, infatti, si assume $\emptyset$, o V, o qualche altra soluzione banale [8].

Insomma,

> Si può star certi [it is safe to say] che lo stesso professor Schröder dichiarerebbe che un pretendente al potere algebrico che parlasse in quel modo sarebbe un soggetto bisognoso di *sorveglianza* se non addirittura di un ricovero in ospedale psichiatrico [9].

Per curiosità indico il problema della soluzione come esposto nel terzo volume delle *Lezioni*; si troverà una corrispondenza totale con il teorema 20 (o 14):

$$(f(S) = 0) \to (f(R) = 0)$$
$$\leftrightarrow \exists T\{R = S \cap \overbrace{(V^2 \circ f(R) \circ V^2)}^{\alpha} \cup T \cap \overbrace{(\Lambda^2 \bullet -f(R) \bullet \Lambda^2)}^{-\alpha}\}$$

[**Sch66c**, p. 166]. Dove R, S, T sono relazioni binarie qualunque, $f(\cdot)$ un'espressione relativa, V^2 la relazione *totale* e Λ^2 la relazione *vuota*. Come si vede facilmente, una qualsiasi espressione relativa, diciamo $f(R)$ è esprimibile come la composizione lineare di due relazioni complementari tra loro (α e $-\alpha$). Questo lo scriveva Schröder nel 1895; quindi per quasi vent'anni continuò a portare avanti lo stesso progetto. Ad ogni modo, chiudiamo per il momento questa lunga parentesi per continuare a leggere Schröder stesso.⌋

L'ultima di queste equazioni si lascia ri-scrivere anche nelle seguenti forme:

$$A = (U \cup Y) \cap -X, \quad A = ((U \cap -Y) \cup Y) \cap -X, \quad A = (U \cap -X \cap -Y) \cup Y,$$

che, a seconda degli scopi che uno persegue, posseggono diversi pregi.

Per ricondurre queste formule diverse una all'altra, per prima cosa, bisogna stare attenti da un lato che

$$(U \cup Y) = U \cap (-Y \cup Y) \cup Y = (U \cap -Y) \cup (U \cap Y) \cup Y = (U \cap -Y) \cup Y,$$

poiché il penultimo termine [$(U \cap Y)$] in virtù di 10 [assorbimento] viene assorbito dall'ultimo [Y] - così come, dall'altro lato, che quando l'identità $X \cap Y = \emptyset$ è

7 [**Bon07**, p. 58].

8 [**Bon07**, p. 57].

9 [**HW60**, p. 519].

corretta, allora lo deve essere anche

$$(-X \cap Y) = (-X \cap Y) \cup (X \cap Y) = (-X \cup X) \cap Y = Y$$ [10].

Rimane da indicare per quanto riguarda la *dimostrazione* che dalla prima identità del teorema scendono entrambe le altre, così come, al contrario, queste ultime assieme portano alla prima. Il tutto si scompone, quindi, in più dimostrazioni parziali [Theilbeweise] [11].

Dimostrazione I. [$\alpha \Rightarrow \beta$] Intersechiamo la prima equazione con X [$X \cap (X \cap A) \cup X \cap (Y \cap -A) = (X \cap A) \cup (X \cap Y \cap A)$]; lo facciamo anche con Y [$Y \cap (X \cap A) \cup Y \cap (Y \cap -A) = (Y \cap X \cap A) \cup (Y \cap -A)$] e uniamo i risultati ottenuti; risulta così da 5 [idempotenza]:

$$(X \cap A) \cup (X \cap Y \cap -A) \cup (Y \cap X \cap A) \cup (Y \cap -A)) = \emptyset,$$

e, siccome per ipotesi entrambi i termini estremi *si annullano* [sich wegheben] (cioè, insieme danno $\emptyset$), rimane solo: $(X \cap Y) \cap (A \cup -A) = \emptyset$, vale a dire $X \cap Y = \emptyset$, come si voleva dimostrare. [Q.E.D. I.]

Per la deduzione della seconda identità abbiamo bisogno di un

Lemma. Se $A \cap B = \emptyset$, allora si può porre $A = (U \cap -B)$, | *dove U è indeterminata.* Entrambe queste equazioni sono equivalenti l'una con l'altra. pagina 21

Dimostrazione. [del lemma] In ogni caso, in virtù di 14 [teorema di ortocomplementazione] si può porre $A = (W \cap B) \cup (U \cap -B)$ per certe classi U e W al momento ancora indeterminate [12]. Intersechiamo questa identità con B [$(B \cap A) = (W \cap B) \cap B \cup (U \cap -B) \cap B$]; allora otteniamo, considerando l'ipotesi che $W \cap B = \emptyset$ e che questo termine può essere eliminato, $A = (U \cap -B)$. Che, quindi, U attraverso i dati del problema non è determinato ulteriormente, anzi, rimane completamente arbitrario, segue dall'ultima equazione [$A = (U \cap -B)$]; infatti, attravero l'intersezione con B possiamo ricondurci alla prima $A \cap B = \emptyset$, qualsiasi significato U possa avere. [Q.E.D.]

Il lemma appena dimostrato si dimostra essere un caso speciale del teorema principale 20, quando in esso viene posto $X = B$ e $Y = \emptyset$.

Dimostrazione II. [$\alpha \Rightarrow \gamma$] A partire da 16 [$A \cup B = \emptyset \leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$] l'ipotesi [$\alpha$] si scompone in $X \cap A = \emptyset$ e $Y \cap -A = \emptyset$. La prima di queste equazioni è identica, in forza del lemma [appena dimostrato], a $A = U \cap -X$, dove U non è completamente arbitrario, in quanto deve essere determinato per soddisfare anche

[10] Qui Schröder usa la prima ipotesi aggiuntiva in maniera essenziale per poi concludere per distributività.

[11] A scopo illustrativo, riscrivo le tre equazioni che il teorema 20 afferma essere equivalenti:

$\alpha.\quad (X \cap A) \cup (Y \cap -A) = \emptyset$

$\beta.\quad X \cap Y = \emptyset$

$\gamma.\quad A = (U \cap -X) \cup Y \rfloor$

[12] Sostituisco le v schröderiane con le W, dato che per noi V ha un altro significato.

la seconda identità. Abbiamo per 18 [leggi di de Morgan] e 13 $[-(-A)) = A]$ che $-A = -U \cup X$ e questo, intersecato con Y dà: $\emptyset = (-U \cap Y) \cup (X \cap Y)$, o grazie a $X \cap Y = \emptyset$, addirittura: $\emptyset = -U \cap Y$. Da ciò, segue in virtù del lemma: $-U = W \cap -Y$ o $U = -W \cup Y$ e l'introduzione di questo valore [in $A = U \cap -X$] dà: $A = (-W \cup Y) \cap -X$, dove ora tanto $-W$ quanto W sono completamente arbitrari e possono essere sostituiti dal segno U, che (indipendentemente da ciò che è stato preso in considerazione) può essere pensato come arbitrario. Con ciò abbiamo ottenuto anche l'equazione conclusiva (che bisognava dimostrare) nella seconda delle quattro forme indicate, già ricondotte una all'altra. [Q.E.D. II.]

Che U possa rimanere completamente arbitrario, segue ancora una volta dalla

Dimostrazione III. $[\gamma \wedge \beta \Rightarrow \alpha]$ Se, al contrario, $A = (U \cap -X) \cup Y$ e $X \cap Y = \emptyset$, abbiamo: $-A = (-U \cup X) \cap -Y$ [13]; quindi:

$$(X \cap A) \cup (Y \cap -A) = X \cap ((U \cap -X) \cup Y) \cup (Y \cap -Y) \cap (-U \cap X) = X \cap Y = \emptyset,$$

perciò, vale anche l'equazione di partenza $(X \cap A) \cup (Y \cap -A) = \emptyset$, che potrebbe sempre indicare il significato di U. [Q.E.D. III.]

Annotazione. Non è raro il caso che nel risultato finale $A = (U \cap -X) \cup Y$, il termine $U \cap -X$ che contiene U venga annullato completamente e si possa scrivere direttamente $A = Y$. Come condizione sufficiente di questo assorbimento del termine arbitrario $[U]$ si riconosce l'ipotesi $-X \cap -Y = \emptyset$ dalla quarta forma dell'equazione finale [di 20]. Questa condizione è anche necessaria, affinché da |
pagina 22 $(U \cap -X) \cup Y = Y$ segua, attraverso l'intersezione con $-Y$, che $U \cap -X \cap -Y = \emptyset$ *per ogni* U, quindi anche per $U = V$.

Pertanto, *tutte le volte che abbiamo* oltre a $X \cap Y = \emptyset$ anche $-X \cap -Y = \emptyset$, *abbiamo semplicemente che* $A = Y$ *e viceversa* [14].

1. [Osservazioni sul teorema fondamentale 20]

Il teorema 20 è ora il *teorema principale* in cui culmina l'intero calcolo logico.

Esso ci mette in condizione di *eliminare* una qualsiasi classe A da un'equazione arbitraria [15]. Come abbiamo visto a proposito del teorema 14, ogni equazione è

---

[13] Si tratta semplicemente di negare l'equazione sfruttando le leggi di de Morgan.

[14] Si sostituisca in $A = (U \cap -X \cap -Y) \cup Y$ (che è la quarta forma nella quale si può porre la seconda condizione aggiuntiva) U con V e $-X \cap -Y$ con $\emptyset$; avremo che $A = (V \cap \emptyset) \cup Y = \emptyset \cup Y = Y$.

[15] È questo il punto. Il teorema, permettendo di eliminare un'incognita da un'equazione, permette di ottenere tutte le possibili conseguenze di quest'equazione. Che siano veramente *tutte* ce lo garantisce il teorema in cui l'incognita è puramente arbitraria. Dato poi che questo ragionamento vale per *ogni* equazione del calcolo (in forma appropriata), possiamo affermare che il teorema 20 di Schröder, permette di ottenere tutte le possibili conseguenze del calcolo logico. Ovvero: non c'è in esso problema che non possa essere risolto. Questa è una sorta di *completezza debole* o *naïf*, in base alla quale si ottengono tutte le possibili conseguenze del calcolo via il teorema 20. Purtroppo, non si è in grado di dimostrare che non ci siano altri enunciati veri generabili dal calcolo (con una manipolazione simbolica) non ottenibili dal calcolo mediante 20. In altre parole: le conseguenze del calcolo traibili con 20 sono *tutte e sole* le conseguenze del calcolo? A questa domanda Schröder,

riscrivibile sempre nella forma $(X \cap A) \cup (Y \cap -A) = \emptyset$, dove $X \cap Y = \emptyset$ è il risultante dell'eliminazione di A.

Inoltre, possiamo *calcolare* qualsiasi classe A a partire da 14, *risolvendo* l'equazione a partire da questa incognita - un esercizio che in generale non è sempre completamente determinato [16]; esso comprende tutte le *radici* [17] A dell'equazione, per l'incognita U (che varia da $\emptyset$ a V) appartenente all'espressione $A = (U \cap -X) \cup Y$.

Ciò che è detto di *una* equazione, vale anche *per ogni insieme di equazioni (logiche)* [18], poiché un tale insieme a partire da 16 e 17 è sempre equivalente ad un'unica identità, che contiene i simboli di classe (con le loro [eventuali] negazioni) delle singole equazioni come membri di intersezione o di unione [19]. Io voglio chiamare tale equazione, equazione *rappresentante* o *totale* dell'intero sistema. L'enunciato, che di solito si introduce assiomaticamente, ovvero, che *la successione e l'associazione delle premesse è indifferente per la conclusione*, corrisponde semplicemente all'utilizzo della commutazione e della associatività (2d e 3d) [applicata ai] ⟨per i⟩ termini dell'equazione totale.

Come si lascia eliminare dall'insieme delle equazioni, cioè dall'equazione totale, un singolo simbolo di classe, poi due, tre, eccetera, così [si lascia eliminare] un intero *insieme di simboli di classe* [20]. Si pensi al polinomio dell'equazione totale sviluppato a partire dai simboli da eliminare, allora è facile dimostrare l'enunciato che in generale *si trova il risultante dell'eliminazione di un qualsivoglia insieme di classi a partire da un insieme di equazioni, ponendo* $= \emptyset$ *l'intersezione di tutti i coefficienti* (di questa equazione totale sviluppata a partire dall'eliminazione) [21].

Così, infatti, $P \cap Q \cap R \cap S = \emptyset$ è il risultante dell'eliminazione di A e B dall'equazione:

$$(P \cap A \cap B) \cup (Q \cap A \cap -B) \cup (R \cap -A \cap B) \cup (S \cap -A \cap -B) = \emptyset,$$

e così via. | Si può dinostrare che è *irrilevante la successione e il raggruppamento delle singole o parziali eliminazioni successive* di classi o di loro sotto-insiemi, pagina 23

non avendo il nostro concetto di sistema assiomatico-formale, non poteva rispondere.

[16] Vale a dire, non ha un'unica soluzione, ma potenzialmente infinite (almeno fino a $\aleph_0$).

[17] O soluzioni.

[18] Sempre contraibili ad una soltanto per la legge di Schröder. Si ricordi anche che l'insieme di queste equazioni deve avere una cardinalità tutt'al più numerabile. Non fosse altro per il fatto che la procedura di condensazione di più formule in una è ricorsiva.

[19] Per esempio: date le equazioni $X = \emptyset$ e $Y = \emptyset$, possiamo formare una sola equaione $X \cup Y = \emptyset$. Come si nota, in quest'ultima i simboli originari di classe qui compaiono come membri di un'unione.

[20] Non nascondo una certa libertà nella traduzione del passo precedente. È funzionale ad una maggior comprensione.

[21] Se l'equazione totale è, per esempio, $\alpha_1 a_1 \cup \alpha_2 a_2 \cup \alpha_3 a_3 \cup \ldots \cup \alpha_n a_n = \emptyset$, allora il risultante sarà: $\bigcap_{1 \leq i \leq n} \alpha_i = \emptyset$. Che, ribadisco, equivale ad affermare che i coefficienti sono indipendenti tra loro. Per semplicità, ho scritto $\alpha_i a_i$ in luogo di $(\alpha_i \cap a_i)$.

che si possono eseguire invece di compiere una simultanea eliminazione in tutto l'insieme [22].

Tra l'altro, per evitare di eseguire il lavoro di sviluppo dell'equazione totale fino alla fine, può rivelarsi vantaggioso introdurre ulteriori lemmi - della cui esposizione io qui non voglio occuparmi. Mi accontento di accennare al fatto che già con *un solo* eliminando, non è necessario portare l'equazione in forma omogenea, potendo prendere come risultato dell'eliminazione di A dall'equazione $(X \cap A) \cup (Y \cap -A) \cup Z = \emptyset$, $(X \cap Y) \cup Z = \emptyset$ [23], in base al fatto che il termine costante (cioè, quello indipendente da A) [24] si può separare e poi riaggiungere all'identità, formata in base alle precedenti regole [25].
Per esempio, sia $(P \cap Q) \cup (R \cap S) = \emptyset$ il risultato dell'eliminazione di A e B dall'equazione $(P \cap A) \cup (Q \cap -A) \cup (R \cap B) \cup (S \cap -B) = \emptyset$ [26].

Importante è invece l'osservazione che i risultati dell'eliminazione di un simbolo A da più equazioni disgiunte, che noi vogliamo pensare come raggruppate insieme per una singola ricognizione, sono meno generali dei risultanti dell'eliminazione di A nell'equazione totale. Per esempio, A venga eliminata separatamente da ognuna delle equazioni seguenti:

$$(X \cap A) \cup (X \cap -A) = \emptyset \qquad \text{e} \qquad (P \cap A) \cup (Q \cap -A) = \emptyset;$$

Così suonerebbe la composizione dei due risultati dell'eliminazione:

$$(X \cap Y) \cup (P \cap Q) = \emptyset.$$

- proprio così come suonerebbe se nella seconda equazione [$(P \cap A) \cup (Q \cap -A) = \emptyset$] ci fossero B e $-B$, invece di A e $-A$ e si fossero eliminate queste quattro grandezze; al contrario, il risultante dell'eliminazione di A dall'equazione totale

$$(X \cup P) \cap (Y \cup Q) = (X \cap Y) \cup (X \cap Q) \cup (Y \cap P) \cup (Y \cap Q) = \emptyset$$

è più generale del precedente, in quanto esso oltre a $X \cap Y = \emptyset$ e $P \cap Q = \emptyset$ dice anche - cosa che non si potrebbe dedurre da sola - che deve essere $X \cap Q = \emptyset$ e $Y \cap P = \emptyset$.

Non è quindi indifferente, se si prima si unisce e dopo si elimina, o se prima si elimina e dopo si unisce. Per ottenere il risultante *completo* dell'eliminazione, si

[22] Qui, Schröder osserva che si possono unire tutte le equazioni nella equazione totale e in essa eseguire un'unica eliminazione, oppure che si possono compiere tante piccole eliminazioni nelle equazioni prima di unirle. In ogni caso il risultato non cambia.

[23] Vale a dire il prodotto dei coefficienti unito alla costante Z.

[24] In questo caso, Z.

[25] In questo caso, si separa il termine costante Z dall'identità di partenza; si elimina la A dall'equazione $(X \cap A) \cup (Y \cap -A) = \emptyset$ (che porta al risultante $X \cap Y = \emptyset$) e vi si aggiunge semplicemente Z. Questo in quanto, essendo Z costante, non richiede di fare nulla.

[26] Come notato sopra, il risultante è il prodotto dei coefficienti. In questo caso, l'unione del prodotto dei coefficienti di A con quello dei coefficienti di B.

deve mantenere il primo ordine nelle operazioni [27]. Solo in presenza di equazioni che non contengono proprio nessun eliminando è permesso prima eliminare e poi unire: $(X \cap A) \cup (Y \cap -A) = \emptyset$ e $Z = \emptyset$ portano in entrambi i casi a $(X \cap Y) \cup Z = \emptyset$ [28]. |

Con i semplici mezzi del teorema 20 siamo non solo *nella condizione di calcolare* un unico simbolo di classe, ma *qualsiasi funzione logica* $f(A, B, C, \ldots)$ *di un dato insieme* $A, B, C, \ldots$ *di tali simboli di classe*; cioè, di esprimerli attraverso un insieme arbitrario di altri simboli di classe [29]. pagina 24

Alla fine si elimini dall'insieme dato di equazioni in ogni caso per primi i simboli rimasti senza considerazione, che né appartengono agli ultimi, né occorrono nell'espressione funzionale f [30]. Quindi, si indichi la sopramezionata espressione funzionale con il nome di un nuovo simbolo di classe - diciamo con ω. Con ciò, si aggiunga all'insieme dato l'equazione $\omega = f(A, B, C)$, o all'ultimo risultante, e il nostro compito si riduce a risolvere questo nuovo insieme equazionale a partire dall'incognita ω, eliminando $A, B, C, \ldots$; si tratta ora di calcolare una funzione data con un'incognita soltanto, un esercizio già svolto col teorema 20 [31]. Qualsiasi esercizio che comporti il trovare una funzione di più simboli di incognite [32] è perciò nella sfera del calcolo logico solo apparentemente più generale del compito di

[27] Cioè, *prima* unire e *dopo* eliminare. Della cosa ci si rende conto facilmente; compiendo prima le eliminazioni e poi componendo l'equazione totale vengono a mancare alcuni simboli in quest'ultima, suscettibili di intersezione od unione tra loro. L'eliminazione va svolta solo nell'equazione totale, in quanto solo allora si ha di fronte la totalità di *tutti* i simboli occorrenti nelle singole equazioni. Se si svolgesse per prima l'eliminazione, verrebbero a mancare alcuni componenti nell'equazione totale (anche se poi verrebbero eliminati comunque). Da notare che ciò contraddice palesemente quanto Schröder scrisse una pagina precedente: *Die Reihenfolge und Gruppierung der successiven partiellen oder Einzeleliminationen von Klassen (...) kann (...) als eine irrilevante nachgewiesen werden.*

[28] Infatti, in $Z = \emptyset$ non c'è niente da fare, mancando le incognite.

[29] Vale a dire. Ogni simbolo di classe può essere pensato come funzione di un altro simbolo di classe. Mal che vada questa funzione sarà l'identità. Ovverosia: $\forall B \exists A (B = f(A))$.

[30] Vorrei insistere sul fatto che Schröder non parla di *Funktion* o di *Abbildung*, ma di *Funktionsausdruck*. Abbiamo, quindi, a che fare non con funzioni, ma con simboli di funzioni, esattamente come non abbiamo a che fare con classi ma con simboli di classe. Una tale filosofia della matematica nominalista troverà un sostenitore nel novecento in Alfred Tarksi che considerava la funzione $f(x)$ scritta nell'angolo sinistro della lavagna *equiforme* alla funzione $f(x)$ scritta nell'angolo destro. Questo, perché uno stesso oggetto non può occupare nel medesimo istante e secondo lo stesso punto di vista due posti diversi tra loro. Si veda più sopra la mia interpolazione sul significato di $2 + 2 = 4$ e [**Lus62**, p. 59 e segg.].

[31] ω non è una *funzione* né un *simbolo funzionale*, ma un *funzionale*, cioè, una funzione di funzioni, analogamente a $\int$ o alla cosiddetta *funzione* δ di Dirac [**Wüs09a**, p. 315 e p. 425 e segg.]. Ad una funzione f a *più* argomenti $A, B, C \ldots$ abbiamo sostituito un funzionale ω ad *un solo* argomento $f(\cdot)$.

[32] Anche qui: *simboli di incognite* [unbekannten Symbolen] e non *incognite tout-court*. Stiamo sempre e solo lavorando con dei segni privi di significato.

trovare una funzione ad *una sola* incognita [33]; pertanto, questo esercizio è teoreticamente risolto in ogni caso.

Mentre in aritmetica il numero delle incognite da calcolare o eliminare è proporzionale al numero delle equazioni in causa, *nel calcolo logico*, come si può vedere, *tanto il problema di eliminazione, quanto quello della soluzione sono indipendenti dal numero delle equazioni date* e questa disciplina possiede anche il raro pregio che l'esercizio più generale, che possa essere pensato all'interno dei suoi rami, è anche realmente risolto. Questa nostra disciplina potrebbe essere considerata, da questo punto di vista, come la più completa, e non di meno, la più elementare.

Con le osservazioni precedenti, mi sembra che tutto ciò che è d'importanza per la *tecnica* del calcolo sia stato svolto a dovere [con l'eccezione delle considerazioni riguardanti la sua *interpretazione*] [34].

Tuttavia, mi permetterò di aggiungere ancora qualche considerazione nel capitolo 4 - con numeri progressivi rispetto al presente - che secondo la mia modesta opinione meritano un certo interesse teoretico e termino la presente successione di enunciati con l'introduzione di un teorema di Robert Grassmann [**Gra72a**, p. 13] che (prescindendo da un cambio letterale) corrisponde dualmente al suo stesso opposto. Tale teorema suona: |

2. [Un teorema di R. Grassmann]

21. *Teorema*. Se $A \cap B = \emptyset$, allora anche $A \cup B = B$.

Dimostrazione. $A \cup B = (A \cap B) \cup B = B$ in virtù di 10. [Q.E.D.]

21d. *Teorema*. Al contrario, quando $A \cup B = B$, allora anche $A \cap B = A$.

Dimostrazione. $A \cap B = A \cap (A \cup B) = A$ per 10d. [Q.E.D.]

pagina 25 Questi due teoremi che si implicano reciprocamente, come si vede facilmente, sono equivalenti a:

$$A \cap -B = \emptyset,$$

ed esprimono il rapporto di *inclusione* del concetto A in B [35]. ||

[33] Si veda sotto a S. 35, al paragrafo *Analog lässt sich sogleich. . . .*

[34] Le parentesi sono dell'autore. Si noti, come per l'ennesima volta Schröder ribadisca la pura sintatticità del suo lavoro. Ovviamente, è proprio questa estrema formalità a suggerire la ricerca di interpretazioni (noi, oggi, diremmo, *modelli*), ma di questo si tace. Schröder fornirà un'interpretazione proposizionale di questo calcolo (qui, brevemente, abbozzato) nel secondo volume delle *Lezioni*.

[35] L'avevamo già notato che in virtù dell'intersezione o dell'unione si poteva stabilire un ordine parziale.

CAPITOLO 3

[A proposito di un problema di Boole]

Per illustrare ed appplicare la precedente teoria mi voglio occupare della soluzione di un *problema* posto da Boole [**Boo58**, pp. 146-149] con tutti i calcoli intermedi [1]. §3

Problema. Si supponga che l'osservazione di una classe di fenomeni (prodotti dalla natura o artificialmente; per esempio, sostanze) abbia condotto ai seguenti risultati generali.

$\boldsymbol{\alpha}$**.** Che, in tutti quei fenomeni in cui i segni caratteristici o le proprietà A e C sono assenti contemporanemante $[-A \cap -C]$ [2], è presente il segno caratteristico E insieme con uno dei segni caratteristici B e D, ma non contemporanemante $[E \cap ((B \cap -D) \cup (-B \cap D))]$.

$\boldsymbol{\beta}$**.** Che, dovunque i segni caratterestici A e D compaiono in assenza di E $[(A \cap D) \cap -E]$, i segni caratteristici B e C o sono presenti comtemporaneamente o sono assenti contemporanemante $[(B \cap C) \cup (-B \cap -C)]$.

$\boldsymbol{\gamma}$**.** Che, ovunque il segno caratteristico A compare con B o E, o con entrambi contemporaneamente $[A \cap (B \cup E)]$, anche i segni caratteristici C e D sono presenti, ma non contemporaneamente $[(C \cap -D) \cup (D \cap -C)]$. Viceversa, dovunque viene percepito uno senza l'altro dei segni caratteristici C o D $[(C \cap -D) \cup (D \cap -C)]$, dev'essere presente anche il segno caratteristico A contemporaneamente in connessione con B o con E, o con entrambi $[A \cap (B \cup E)]$ [3].

Viene ora richiesto di trovare:

primo, cosa si può concludere, in ognuno dei tre casi, dalla provata presenza del segno caratteristico A in rapporto ai segni caratteristici B, C e D [4],

secondo, di stabilire, se sussiste qualche rapporto tra i segni caratteristici B, C, D indipendente dalla presenza o meno dei restanti segni caratteristici (in caso di risposta affermativa, quale?),

terzo, di rispondere in maniera simile a cosa segue dalla presenza del segno caratteristico B in rapporto a A, C, D e, infine,

---

[1] Al proposito, si veda l'appendice E, dove abbiamo tradotto la parte di [**Boo58**] relativa alla formulazione e soluzione di questo problema.

[2] La negazione di un segno di classe indica la sua assenza; cioè se $-A$, allora A è assente. Se, al contrario, A, allora A è presente. La presenza congiunta di due segni di classe è data dalla loro intersezione. E così via.

[3] Vedi la nota relativa al testo tedesco.

[4] In altre parole, dato A e le tre premesse, che ne è dei segni caratteristici B, C, D?

quarto, di constatare cosa segue di per sé per A, C, D. |

⌈Prima di volgerci alla soluzione del problema, qualche breve annotazione. Anzi tutto, Schröder non applica il suo calcolo alla risoluzione di un problema *esterno* alla teoria, per cui si può tranquillamente affermare che il problema giustifica quei procedimenti con il quale è stato concepito: cioè, siamo in presenza di un circolo vizioso. È lo stesso calcolo a permettere la posizione di un tale problema; non ci si deve stupire, pertanto, che lo risolvi anche. Più che di *problema*, io parlerei di *esercizio* particolarmente spinoso da risolvere.

Inoltre, si badi alla formulazione del problema: esso implica una classe E di cui non si vuol sapere nulla. Quindi, E è un'incognita da eliminare. La presenza di E trasforma quello che potrebbe essere (ma *non* è) un problema di deduzione, in un problema di eliminazione algebrico. Inoltre, le prime due ipotesi del teorema sono *volutamente* condizionali; il che implica, per dar loro una veste equazionale, l'introduzione di due ulteriori incognite X ed Y.

Infatti, α ha la forma $P \to C$; nel caso di Schröder che non distingue tra connettivi ed operazioni, α è della forma $P \subseteq C$; quindi, $P = X \cap C$ (mal che vada, $X = P$). Lo stesso discorso vale per β che implica l'introduzione della variabile Y ($P = Y \cap C$). Insomma, il problema mal mescola un lavoro di soluzione con uno di deduzione. Se si guarda al testo citato di Frege [**Fre86**, pp. 120–128], si noterà che per Frege questo è un problema *puramente* deduttivo: date delle premesse e delle leggi di derivazione, estrarre delle conclusioni. Schröder non ha leggi di derivazione se non il teorema 20; ma questo implica che s'intenda per *deduzione*, *soluzione*. Questo è sempre vero? Come si comporterebbe il calcolo schröderiano in assenza di E, X ed Y? Infine, non resta da aggiungere che il problema confondendo (ed equiparando) soluzione e deduzione, introduce delle difficoltà non necessarie.⌋

pagina 26 Si noti che in ognuno dei tre dati α, β, γ, l'informazione riguardante i segni caratteristici A, B, C, D compare insieme ad un altro elemento E, di cui nelle nostre conclusioni finali non vogliamo sapere niente. Sarà, quindi, necessario eliminare il simbolo corrispondente alla proprietà E dall'insieme delle equazioni, in cui i dati si lasciano formulare.

⟨L'intera classe dei casi fenomenici, in cui si trova uno dei segni caratteristici $A, B, C \ldots$, verrà ora contrassegnata con la corrispondente lettera minuscola dell'alfabeto latino⟩ [5].

Per non dovermi impegolare in una vasta area di considerazioni, rinuncerò, in questa sede, a formulare dei principi generali, concernenti l'*interpretazione*, cioè l'espressione dei dati in formule [appropriate] e riguardanti la riconduzione dei risultati formali nel linguaggio naturale - tanto più, che credo di poter lasciare le

[5] Ho cassato questo paragrafo, in quanto noi continueremo ad usare delle lettere maiuscole, confidando che non ci saranno confusioni nel lettore.

questioni in materia all'intuizione [6] del lettore senza problemi e di dovermi dedicare, per prima cosa, all'esposizione del funzionamento del calcolo, dato che si rivela ora più semplice a partire dal punto di vista da noi adottato, in contrasto a quello booleano.

Con estrema fedeltà al testo [originale], i nostri dati α, β, γ si traducono rispettivamente nelle tre equazioni seguenti:

$$\alpha.\quad (-A \cap -C) = (X \cap E) \cap ((B \cap -D) \cup (-B \cap D)),$$
$$\beta.\quad (-E \cap A \cap D) = Y \cap ((B \cap C) \cup (-B \cap -C)),$$
$$\gamma.\quad A \cap (B \cup E) = (C \cap -D) \cup (-C \cap D),$$

$$\alpha'.\quad (-A \cap -C) \cap (-E \cup (B \cap D) \cup (-B \cap -D)) = \emptyset,$$
$$\beta'.\quad (A \cap D) \cap ((B \cap -C) \cup (-B \cap C)) \cap E = \emptyset,$$
$$\gamma'.\quad A \cap (B \cup E) \cap ((C \cap D) \cup (-C \cap -D)) \cup ((C \cap -D) \cup (-C \cap D)) \cap (-A \cup (-B \cap -E)) = \emptyset,$$

in cui X, Y rappresentano delle classi indeterminate [7]. Le equazioni α', β', γ' sono le corrispondenti equazioni portate a $\emptyset$ [8], dove nelle prime due questa operazione è stata legata all'eliminazione di ogni simbolo di classe indeterminato X, Y in base al lemma sotto 20 [9].

1. [Seconda risposta]

Il risultato dell'eliminazione di E consiste (vedi pagina 23) nel membro non contentente né E, né $-E$ appartenente all'unione di queste ultime tre equazioni:

$$\{(-A \cap -C) \cap ((B \cap D) \cup (-B \cap -D))\}$$
$$\cup \{(A \cap B) \cap ((C \cap D) \cup (-C \cap -D))\}$$
$$\cup \{-A \cap ((C \cap -D) \cup (-C \cap D))\},$$

il cui primo termine $-A \cap -C \cap D \cap B$ viene assorbito dall'ultimo $-A \cap -C \cap D$, accresciuto dal prodotto dei coefficienti di E e $-E$ - il tutto posto uguale a $\emptyset$. Il coefficiente di E è uguale a $A \cap ((C \cap D) \cup (-C \cap -D))$, quello di $-E$ è uguale a |

$$(-A \cap -C) \cup (A \cap D) \cap ((B \cap -C) \cup (-B \cup C)) \cup -B \cap ((C \cap -D) \cup (-C \cap D));$$

6 Ho tradotto liberamente *Divination* con 'intuizione', dato che è questo che viene richiesto al lettore: di intuire da sè come dare una veste formale a dei contenuti informali, come tradurre le equazioni nel linguaggio di tutti i giorni e come assegnare ad una formula un'interpretazione appropriata.

7 Sono, cioè delle incognite. Ovviamente, sono *simboli* di classe. Per questo motivo, non abbiamo creduto opportuno discostarci dall'usuale simbologia.

8 In forma omogenea.

9 Vedi L1 nell'elenco dei risultati a fondo libro.

pagina 27 l'intersezione di entrambi è uguale a $A \cap -B \cap C \cap D$ e il risultante è

$$\begin{aligned} &- A \cap ((C \cap -D) \cup (-C \cap D) \cup (-B \cap -C \cap -D)) \\ &\cup A \cap ((B \cap C \cap D) \cup (B \cap -C \cap -D) \cup (-B \cap C \cap D)) = \emptyset, \end{aligned}$$

⌈Si noti in tutte queste formule lo schema ricorrente $(\alpha \cap a) \cup (-\alpha \cap b) = \emptyset$ derivante dall'uso del teorema di orto-complementazione 14 e del teorema (l'*Haupttheorem*) 20.⌋

o, fondendo insieme due termini [$(B \cap C \cap D)$ e $(-B \cap C \cap D)$ nel secondo addendo della formula precedente]:

$$\begin{aligned} \delta. \qquad & A \cap ((C \cap D) \cup (B \cap -C \cap -D)) \\ & \cup -A \cap ((C \cap -D) \cup (-C \cap D) \cap (-B \cap -C \cap -D)) = \emptyset. \end{aligned}$$

L'intersezione dei coefficienti di A e $-A$ in questa equazione si annulla [10] identicamente grazie a 7 [$A \cap -A = \emptyset$]; l'eliminazione di A da δ conduce così a $\emptyset = \emptyset$, dove, in risposta alla *seconda* domanda si dimostra che *tra i segni caratteristici B, C e D*, riguardo alla loro presenza o assenza, *non sussiste alcuna relazione di indipendenza*.

2. [Prima risposta]

L'identità δ è, pertanto, equivalente alla sua soluzione rispetto ad A. Come tale [cioè, come soluzione] si trova addirittura:

$$\varepsilon. \qquad A = (C \cap -D) \cup (-C \cap D) \cup (-B \cap -C \cap -D),$$

poiché anche le negazioni dei coefficienti di A e $-A$ sono disgiunte tra loro in δ [vedi l'*annotazione* al teorema 20], considerato come sviluppato rispetto ai simboli C, D un coefficiente appare addirittura come la negazione dell'altro.

Il risultato ε, che, incidentalmente, potrebbe essere scritto anche nelle forme equivalenti:

$$\begin{aligned} A &= (C \cap -D) \cup (-C \cap D) \cup (-B \cap -C) \\ &= (C \cap -D) \cup (-C \cap D) \cup (-B \cap -D) \\ &= (C \cap -D) \cup (-C \cap D) \cup (-B \cap (-C \cup -D)) \end{aligned}$$

risponde così alla *prima* delle domande poste, e cioè in questo modo: *quando si trova sempre il segno caratteristico A, deve trovarsi anche il segno caratteristico C o D, ma non entrambi contemporaneamente, oppure mancano entrambi insieme al*

[10] Nell'originale *verschwindet*. Ho già avuto modo di notare la fattura di quest'espressione. Mi sia consentito citare al proposito i celebri versi di Simon nelle *Stagioni* di Haydn: *Wo sind sie nun, die Wonnetage, verschwelgt in Üppigkeit? Und wo die frohen Nächte, im Taumel durchgewacht? Verschwunden sind sie wie ein Traum* [Dove sono ora i giorni del rapimento, dissipati nella tracotanza? E dove le notti felici, insonni per l'ebrezza? Sono svaniti come un sogno].

segno caratteristico B, e viceversa: *quando tutti e tre i segni caratteristici* B, C, D *sono assenti e quando dei segni caratteristici* C, D *l'uno è presente senza l'altro, deve trovarsi anche il segno caratteristico* A.

3. [Terza risposta]

Ora dev'essere eliminata B dal risultante δ; è immediato:

$$\zeta. \qquad (A \cap C \cap D) \cup (-A \cap C \cap -D) \cup (-A \cap -C \cap D) = \emptyset,$$

in base al quale, l'identità δ si semplifica in $B \cap (A \cap -C \cap -D) \cup -B \cap (-A \cap -C \cap -D) = \emptyset$ e da ciò, in base al quarto schema risolutorio sotto 20 [$A = (U \cap -X \cap -Y) \cup Y$] si trova: $B = \{(-A \cup C \cup D) \cap (A \cup C \cup D)\} \cap W \cup (-A \cap -C \cap -D)$, ovvero

$$\eta. \qquad B = (C \cup D) \cap W \cup (-A \cap -C \cap -D)$$

per una classe indeterminata W. Si noterà che questo risultato è più semplice che non quello indicato da Boole, come anche, in questa prospettiva, è dimostrabile che il nostro modo di operare sia più vantaggioso che non quello booleano. Per ultimo si trova:

$$B = \{(-A \cap C \cap D) \cup (A \cap C \cap -D) \cup (A \cap -C \cap D)\} \cap W \cup (-A \cap -C \cap -D), |$$

una forma che potrebbe essere dedotta dall'equazione η, sviluppando a partire dai simboli A, C, D, tenendo conto di ζ; ma che si ottiene nella maniera più rapida se si negano i coefficienti di B nel risultante δ reso omogeneo (semplicemente considerandolo come la negazione di un aggregato sviluppato a partire da C, D) e si assorbe la parte ottenuta dal secondo termine nel termine reso libero da W. pagina 28

Nel linguaggio ordinario si risponde alla nostra *terza* domanda, a partire da η come segue: *se è presente il segno caratteristico B, allora devono essere presenti anche C o D, oppure C e D devono mancare contemporaneamente ad A.* Viceversa: *se* A, C, D *mancano contemporaneamente, allora si trova B.*

4. [Quarta risposta]

Il risultato ζ è infine equivalente alla sua soluzione a partire da A:

$$\begin{aligned} \vartheta. \qquad A &= W \cap (-C \cup -D) \cup (C \cap -D) \cup (-C \cap D) \\ &= W \cap (-C \cap -D) \cup (C \cap -D) \cup (-C \cap D) \end{aligned}$$

⌈La formula non tragga in inganno. La seconda riga è diversa dalla prima, in quanto il suo secondo fattore è un'intersezione [$-C \cap -D$], invece che un'unione [$-C \cup -D$].⌋

- per W intesa come classe indeterminata - e ci dice, *che dalla presenza di A si può concludere all'assenza di almeno uno dei segni caratteristici* C, D e, viceversa, *che dall'occorrenza di uno solo (senza l'altro) dei segni caratteristici C e D si* *può dedurre la presenza di* A - in risposta all'ultima delle nostre domande.

Il contrasto tra il lavoro calcolistico booleano e il nostro è ancora più evidente se prendiamo in esame un altro problema trattato da lui in [**Boo58**, pp. 118–120] e in [**Boo58**, pp. 128–129], dove si tratta di tirare dalle [seguenti] premesse:

$$A \cap B = X \cap ((C \cap -D) \cup (-C \cap D)),$$
$$B \cap C = Y \cap ((A \cap D) \cup (-A \cap -D)),$$
$$-A \cap -B = -C \cap -D,$$

le conclusioni:

$$(-A \cap -B \cap C) = \emptyset, \qquad A = (U \cap -C) \cup (-B \cap C),$$
$$[B = (W \cap -C) \cup (-A \cap C)], \qquad C = Z \cap ((A \cap -B) \cup (-A \cap B)),$$

un problema, che, però, non offre molte situazioni interessanti. ||

CAPITOLO 4

[Le operazioni inverse]

⌈Mi permetto di inserire qui una breve interpolazione che sarà d'aiuto nel comprendere ciò che segue. Per come abbiamo introdotto l'unione, essa può essere costituita anche da insiemi che si intersecano tra loro. Questo, però, genera problemi nel momento in cui vogliamo rapprensentare con l'unione la somma aritmetica. Infatti, potremmo avere risultati diversi a seconda del tipo di intersezione. Ma adesso, occupiamoci della sottrazione. Siano dati due insiemi $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $B = \{f, g, h\}$. Indichiamo con $|A|$ la cardinalità dell'insieme A. In questo caso, abbiamo che $|A| = 7$ e $|B| = 3$. B si interseca con A. Facciamo la sottrazione $A - B = C$, $|A| - |B| = 7 - 3 = 5 = |C|$. Adesso, immaginando che questi insiemi siano dischi che si possono muovere a piacere su un piano limitato, spostiamo verso destra B; otteniamo un $B' = \{g, h, i\}$. Ovviamente, dal punto di vista della cardinalità, questo nuovo insieme è indistinguibile da B, è a lui *equipotente*. Quindi, $|A| - |B'| = 7 - 3 = 6 = |C|$. Questo risulta dal fatto, che B' pur avendo la stessa cardinalità di B si interseca diversamente con A, con il quale ha solo un elemento in comune. Prendiamo, infine, un $B'' = \{h, i, j\}$; ancora B'' è equipotente a B, perciò, $|A| - |B''| = 7 - 3 = 7 = |C|$. In questo caso, B'' è disgiunto da A e, quindi, non dobbiamo portare via niente ad A. Se ne conclude che, la stessa differenza $A - B = C$ ha tre risultati differenti, $5, 6, 7$ corrispondenti a C differenti. Pertanto questa differenza verrà detta *completa*, in quanto spostando a piacere B in rapporto ad A otteniamo tutte le possibili differenze di $A - B$.

Imponiamo, adesso, che $B \subseteq A$. Come prima $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; supponiamo che $B = \{b, c, d\}$; allora, la differenza di $|A| - |B| = 7 - 3 = 4 = |C|$. Ora, spostiamo, di nuovo, a piacere B, ma rimanendo entro i confini di A. Potremmo avere, allora, un $B' = \{d, g, f\}$; quindi $|A| - |B'| = 7 - 3 = 4 = |C|$; oppure, potremmo avere un $B'' = \{a, f, g\}$ e una differenza $|A| - |B''| = 7 - 3 = 4 = |C|$, eccetera.

Riassumendo, se il minuendo e il sottraendo si intersecano, la loro differenza avrà più risultati, tanti quanti le loro possibili intersezioni; se invece, il sottraendo è incluso nel minuendo, allora la differenza potrà avere un *unico e solo* risultato e sarà detta *univoca* o *completamente determinata*, nel senso che non si può determinare, precisare, maggiormente.

Bene, la richiesta che il sottraendo sia incluso nel minuendo è la condizione di valenza 24d di Schröder.⌋

§4 Passo ora a completare la teoria delle quattro specie di calcolo e a rispondere alle questioni circa il concetto e le leggi *di entrambe le operazioni inverse*. Grazie al dualismo, è necessario prenderne in esame una soltanto e qui io voglio dare la precedenza alla sottrazione rispetto alla divisione, ovvero al primo grado rispetto al secondo. Tuttavia, laddove vorrò istituire un paragone tra entrambe queste operazioni, o laddove si tratti della loro fondazione, le prenderò entrambe in esame.

In conformità all'usanza [da noi stabilita] nelle altre occasioni, queste operazioni sono da introdursi come opposte a quelle dirette, | vale a dire, la differenza e il quoziente sono da definirsi come soluzioni delle rispettive equazioni:

pagina 29

$$\text{22d.} \qquad C \cup B = A, \;\Big|\; \text{22.} \qquad Q \cap B = A,$$

a partire dall'incognita $C[Q]$ [1].

Il metodo di questa risoluzione è stato spiegato nel capitolo 2 e da questo noi sappiamo che le radici di queste equazioni possono essere infinitamente $\langle\infty\rangle$ plurivoche [2]. Riservandomi le espressioni $A - B$ e $A \div B = \frac{A}{B}$ per una soluzione specifica e completamente determinata (che verrà chiarita più sotto) dell'equazione in oggetto, io voglio indicare la soluzione *completa* o *generale* dell'equazione 22 con:

$$\text{23d.} \qquad C = A \boxminus B \;\Big|\; \text{23.} \qquad Q = A \divideontimes B$$

$\lceil A \divideontimes B$ sta per la divisione *completa* di A per B; ovvero, $X \subseteq A \divideontimes B$. In questo caso, il quoziente non è *univoco*. Analogamente, $A \boxminus B$ sta per A meno B, con un risultato eventualmente plurivoco. In ciò che segue si abbia cura di distinguere tra *completo* e *completamente determinato*. Queste espressioni non solo non sono sinonime, ma sono l'una il contrario dell'altra. Una differenza completa è una differenza che nasce da una somma che può avere infinite soluzioni (da cui la completezza); una differenza completamente determinata, invece, trae origine da un'equazione con una sola radice (è determinata al massimo, senza equivoci, è univoca); questa è completamente determinata nel senso che non è suscettibile di ulteriori determinazioni. Dualmente per la divisione.$\rfloor$

e chiamarla in contrapposizione a qualche soluzione particolare

la differenza *completa* | il quoziente *completo*.

[1] Introduco la variabile Q per ricordare al lettore che si tratta del quoziente.

[2] Qui Schröder intende dire che tali equazioni possono avere un numero infinito di soluzioni, perché la variabile U che era stata introdotta in 20 era completamente arbitraria (vedi sopra, p. 22: *eine Aufgabe* [i.e. quello della soluzione] *die im allgemein nicht völlig bestimmt ist*; nel senso che può avere più di una soluzione). Nel caso specifico, come si vedrà più sotto, data l'equazione $a - b = x$ ci possono essere infinite soluzioni per x. Dobbiamo, perciò, in prima battuta, introdurre le operazioni inverse come infinitamente risolubili, per poi aggiustare il tiro e trovare il minimo valore per x che soddisfi l'equazione appena scritta. Dualmente per la divisione.

Nelle espressioni 23, le classi A e B, del resto, non sarebbero da considerarsi come del tutto arbitrarie o introdotte a caso [3], poiché le equazioni 22 formulate in precedenza come assunzioni preliminari per la formazione di qualsiasi espressione [inversa], implicano delle condizioni che queste classi devono soddisfare [4]. Queste condizioni si ottengono attraverso l'eliminazione del simbolo C [Q] da 22 e, cioè saltano fuori come loro risultante:

$$\text{24d.} \qquad -A \cap B = \emptyset. \;\Big|\; \text{24.} \qquad A \cap -B = \emptyset.$$

⌈La prima di queste equazioni significa che $B \subseteq A$; questa è una condizione necessaria per non avere una classe per così dire *negativa*. Ovvero, tutte le volte che abbiamo un'espressione del tipo $A \boxminus B$, dobbiamo richiedere che A estenda B. La seconda di queste equazioni desta qualche perplessità, in quanto richiede, al contrario, che $A \subseteq B$. Ora, come tutti noi sappiamo B è un divisore di A quando intersecato con il quoziente di A restituisce A e quando $B \subseteq A$. Per la precisione:

$$A \divideontimes B = Q \leftrightarrow A = (Q \cap B) \cup R$$

dove R è l'eventuale resto della divisione. Per amor di precisione, come osserverà fra poco l'autore, si ha che:

$$A \div B = Q \leftrightarrow \bigcap_{0 \leq i \leq n} \{(Q \cap B) \cup R_i\}$$

Ovvero, il quoziente è la classe più grande che interesecata a B dà A.⌋

Come adesso si vedrà, entrambe le specie inverse del calcolo logico sono operazioni *non eseguibili incondizionatamente*; la loro eseguibilità è anzi legata ad una delle condizioni 24 e in connessione con questa equazione la 23 potrebbe completamente sostituire la 22.

L'equazione 24 - la parte sinistra, per esempio - che costituisce una condizione aggiuntiva o preliminare per introdurre la 22d, affinché si possa parlare di una differenza di A e B, voglio chiamarla *condizione di valenza*, in quanto essa deve essere soddisfatta se il nome $A \boxminus B$ deve avere un senso e la differenza un significato o un valore. Questa condizione di valenza deve essere la stessa sia per la differenza completa sia per ogni sua particolarizzazione, quindi anche per la differenza $A - B$, chiarita più sotto in maniera univoca e noi presupporremo che la sua validità sia tacitamente soddisfatta, tutte le volte che introdurremo una differenza.

---

[3] A e B non possono essere pensate come arbitrarie perché nel caso della differenza il minuendo dev'essere minore o uguale al sottraendo (dualmente per la divisione).

[4] In virtù di 22, le operazioni di sottrazione e di divisione vengono introdotte come le inverse dell'unione e del prodotto rispettivamente; cioè $C = (A \boxminus B)[23d] \leftrightarrow C \cup B = A[22d]$ e $Q = (A \divideontimes B)[23] \leftrightarrow (Q \cap B) = A[22]$. La 23, in particolare ci di dice che Q è un quoziente di A *sse* è un multiplo del divisore di A. Parlo di *un* e non *del* quoziente, perché questa nozione richiede ancora qualcosa.

Allora, possiamo dire che le equazioni 22 e 23 si condizionano a vicenda e pagina 30 un addendo può essere trasposto | per il momento solo attraverso una sottrazione *completa* [5], cioè, essere portato dall'altra parte del segno di uguaglianza come sottraendo.

Come valore di $C[Q]$ si trova secondo il metodo menzionato:

$$\begin{array}{l|l} \text{25d. } A \boxminus B = (A \cap -B) \cup (U \cap B) & \text{25. } A \divideontimes B = (A \cup -B) \cap (U \cup B) \\ = A \cap (-B \cup U) & = A \cup (U \cap -B) \\ = (A \cap -B) \cup (U \cap A \cap B) & = (A \cap B) \cup (U \cap -A \cap -B) \end{array}$$

⌈Partiamo dalla sottrazione, la prima riga ci dice che $A \boxminus B = C \leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge \exists R(= (U \cap B))$; cioè, ha senso parlare della differenza di A meno B se e solo se, B è contenuto in A ed esiste un resto (R) possibilmente uguale ad $\emptyset$. Nel caso della divisione, invece, $A \divideontimes B = Q \leftrightarrow (B \subseteq A) \wedge (\exists R(= (U \cup B)))$; ovvero, B divide A se e solo se B è incluso in A ed esiste un possibile resto della divisione R. In altre parole: $\lim_{R \to \emptyset} A \divideontimes B = Q \cup R$.⌋

per una *non determinata* classe U - qualora, cioè, venga presa in considerazione la condizione di valenza 24 [$B \subseteq A$].

Fintantoché, riguardo alla classe C [rispettivamente, Q] che cerchiamo, in 23 [$C = A \boxminus B$ e $Q = A \divideontimes B$] non è conosciuta nessun'altra relazione a parte l'identità 22 [$C \cup B = A$ e $Q \cap B = A$], la classe U si deve considerare, naturalmente, come completamente a piacere, *arbitraria* [6]. Attraverso ulteriori informazioni, che riguardo l'addendo cercato C verrano fornite o sono già state date - vale a dire, se C debba essere noto fin dall'inizio - U può essere suscettibile di ulteriori determinazioni e in casi concreti può essere addirittura spogliata completamente del suo carattere indeterminato [7]. Così, sarebbe falso, da $A = A \cup \emptyset$, secondo le nostre regole, tirare la conclusione che $A \boxminus A$, addirittura $U \cap A$, sia uguale all'insieme vuoto *per un'arbitraria* U; poiché l'addendo C o $\emptyset$ da calcolare è qui assolutamente determinato, dobbiamo piuttosto imparare che U o almeno $U \cap A$ devono essere posti $= \emptyset$ [8]. Se una classe determinata viene isolata, trasponendo un'altra classe [dall'altra parte del segno d'identità], allora anche l'altra parte dell'equazione deve rappresentare una classe determinata [9]; il termine arbitrario deve ricevere

[5] Cioè, attraverso una sottrazione ottenuta da un'equazione con più soluzioni.

[6] Infatti, non entrando in gioco la condizione di valenza, potremmo avere che $A \boxminus B = C$ e $B \supset A$, con $B \cap A = \emptyset$.

[7] Per esempio, dato $A \boxminus B = C$, se richiediamo che C sia non negativo, questo pone delle condizioni su U che cessa di essere così *totalmente* arbitrario.

[8] A scanso di equivoci, qui Schröder non sta affermando che è sbagliato $A \boxminus A = \emptyset$, bensì che se poniamo $A \boxminus A = U$, allora U non può essere più una variabile ma una classe ben determinata. In questo caso, U deve coincidere solo con $\emptyset$.

[9] Ovvero, sia $A \cup B = C$; isoliamo A: $A = C \boxminus B$. Siccome A è determinata, allora anche la classe $(C \boxminus B)$ lo dovrà essere, essendo uguale ad A. Si veda il primo assioma.

una determinazione, come richiesto dalle regole del calcolo logico.

Abbiamo, quindi, le conseguenze generali:

$$26d. \begin{cases} A \boxminus A = (U \cap A), \\ A \boxminus \emptyset = A, \end{cases} \qquad 26. \begin{cases} A \divideontimes A = A \cup U, \\ A \divideontimes V = A, \end{cases}$$

e, inoltre sono specialmente da evidenziare i valori:

$$27d. \begin{cases} \emptyset \boxminus \emptyset = \emptyset, \\ V \boxminus \emptyset = V, \end{cases} \qquad 27. \begin{cases} V \divideontimes V = V, \\ \emptyset \divideontimes V = \emptyset, \end{cases}$$

che appaiono sempre univocamente determinati; così come:

$$28d. \qquad V \boxminus V = U, \;\Big|\; 28. \qquad \emptyset \divideontimes \emptyset = U,$$

che sono $\langle\infty\rangle$ infinitamente plurivoche o, detto meglio, addirittura *capaci di qualsiasi valore* [10].

Espressioni come $\emptyset \boxminus V$ e $V \divideontimes \emptyset$, al contrario, sono *incapaci di assumere alcun valore* [11], cioè, non hanno il minimo senso, anche se si presentasse un motivo per la loro formazione.

Delle soluzioni particolari dell'equazione 22 raccolte in 25 | due in particolare sono da mettere in evideza, vale a dire, la *più generale*, che risulta ponendo $U = V$, e la *più specifica*, per $U = \emptyset$ - a proposito di tutto ciò, non bisogna trascurare che il dualismo richiede di contrapporre al caso $U = V$, nella prima operazione, il caso $U = \emptyset$, nell'altra operazione. pagina 31

Come prima operazione risulta:

per $U = V$:	per $U = \emptyset$:
29d. A meno $B = A$,	29. A diviso $B = A$,
cioè, la *differenza massimale*	*il quoziente minimale*
(univocamente determinata)	è identico al dividendo.
è identica al suo minuendo.	

Non ha, quindi, nessun interesse investigare ulteriormente le leggi formali delle relative operazioni, cioè di questa (univoca) *sottrazione massimale* e di [questa] *divisione minimale* [12].

Supponendo, invece, che $U = \emptyset$, otteniamo:

per $U = \emptyset$:	per $U = V$:
30d. $\quad A - B = (A \cap -B).$	30. $\quad A \div B = (A \cup -B) = \frac{A}{B}.$

⌈Ad essere sinceri, nella parte destra del segno d'identità, in entrambi i casi di 30, avremmo dovuto porre i connettivi $\wedge$ e $\vee$, rispettivamente. Abbiamo preferito

[10] Per il discorso fatto in precedenza; cioè che $A \cup B = X$ può avere infinite soluzioni (dualmente per la divisione). Infatti, non possiamo essere certi che $V \boxminus V = \emptyset$; per questo motivo, dobbiamo introdurre la variabile U.

[11] Nel primo caso, avremmo una classe negativa (cosa esclusa dalla 24d [$B \subseteq A$]; in questo caso $V \subseteq \emptyset$, falso), nel secondo una frazione con al denominatore la classe vuota.

[12] In quanto sono solo dei casi particolari di operazioni più ampie.

mantenere l'ambiguità schröderiana. Ora, finalmente, Schröder identifica il sottraendo con una classe complementata. Si parla solo ora di *differenza* e *divisione* in senso autentico, in quanto solo adesso il risultato di una differenza o di una divisione sono *univoci*. Sostituendo in 25 e 25d, rispettivamente, $U = \emptyset$ e $U = V$, otteniamo la condizione di valenza 24.⌋

Queste espressioni, vale a dire, la

la *differenza minimale* | il *quoziente massimale*

qui introddotte univocamente - in opposizione ai valori generali forniti dalla 25 - dovrebbero essere chiamate 'differenza' e 'quoziente' tout-court. Come sottrazione o divisione *univoche* noi chiameremo quelle operazioni necessarie alla loro formazione.

In particolare, segue ora da 30:

31d. $V - B = -B,$ | 31. $\frac{\emptyset}{B} = -B,$

e, a partire da ciò, vale:

$$32. \qquad V - A = \frac{\emptyset}{A}$$

come usuale espressione per $-A$ o per la negazione di A. Questa è, nel contempo, *l'unica equazione del calcolo logico che è duale a sé stessa.*

Poiché la condizione di valenza [24] nel caso specifico precedente si riduce ad un'identità, se ne può prescindere; la sottrazione di una classe da V è incondizionatamente eseguibile. Ecc. [13]

In riferimento a 31, avremmo potuto anche scrivere gli enunciati fondamentali 7 [$A \cap -A = \emptyset$ e $A \cup -A = V$] e 13 [$-(-A) = A$] nelle forme seguenti, in alcune delle quali risulta utile considerarle: |

33.	$A \cap (V - A) = \emptyset$	[33d.]	$A \cup \frac{\emptyset}{A} = V$
[34.]	$A \cap \frac{\emptyset}{A} = \emptyset$	34d.	$A \cup (V - A) = V$
[35.]	$\emptyset \div \frac{\emptyset}{A} = A$	35d.	$V - (V - A) = A$
[35c.]	$\frac{\emptyset}{V-A} = A$	[35dc.]	$V - \frac{\emptyset}{A} = A$

⌈A proposito di questa tabella, vedi la nota relativa nella parte tedesca. [35c] sta per '35 - conseguenza' e [35dc] per '35 - conseguenza duale' in conformità a quanto deciso nel testo originale.⌋

pagina 32 L'espressione 30, contraddistinta dalla C [Q], è, relativamente alla soluzione della seguente coppia di equazioni:

[13] Poiché non esiste una classe maggiore di V che possa essere sottratta da V.

36d. $C \cup B = A, \quad C \cap B = \emptyset, \Big|$ 36. $Q \cap B = A, \quad Q \cup V = V,$
attraverso cui:
37d. $C = A - B\, [= A \cap (V - B)] \Big|$ 37. $Q = \frac{A}{B}\, [= A \cup (V - B)]$
inequivocabilmente completamente determinata. Come si può concludere da 36 a 37, così, al contrario, si può concludere anche da 37 a 36, non appena viene soddisfatta la condizione di valenza 24, cioè, non appena si lascia valere nella condizione 37 l'ipotesi compresa in essa, ovvero che le espressioni date abbiano un senso. Questo ci fornisce un enunciato fondamentale per un qualsiasi calcolo che voglia trattare le operazioni inverse:

Un addendo di una parte di un'equazione logica $[A \cup B = C]$ *può, attraverso una sottrazione univoca, essere sempre trasposto come minuendo* $[A = C - B]$ *se (e solo se) è disgiunto dai restanti membri dell'unione in oggetto* $[B \cap A = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset]$, o quando l'unione, come mi piace dire, è *ridotta*.

Un minuendo, invece, - poco importa se appartenente ad una differenza univoca o completa - può sempre essere trasposto come addendo.

In particolare, da ciò segue facilmente, grazie a 9 $[A \cap V = A$ e $A \cup \emptyset = A]$ che

38d. $A - \emptyset = A, \quad A - A = \emptyset \Big|$ 38. $\frac{A}{V} = A, \quad \frac{A}{A} = V$

⌈Introdotte le operazioni inverse, ora Schröder sta, per così dire, modulando sul tema, riproponendo teoremi già visti applicati alle operazioni inverse o guardando cosa succede sustituendo in una sottrazione o in una divisione delle classi speciali. Per questo motivo, mi è sembrato opportuno sottolineare il carattere *sperimentale* e per certi versi *caotico* di questa sezione, in contrasto alla pulizia delle prime parti. Qui, infatti, non abbiamo distinzione tra assioma, definizione, teorema o quant'altro. Le formule vengono sì numerate, ma non proseguono la lista dei teoremi che si è chiusa con il teorema fondamentale di soluzione. La numerazione è semplicemente un modo per catalogare dei risultati ottenuti alla rinfusa. Per esempio, si noti che Schröder introduce delle espressioni che sono delle semplici conseguenze (non dimostrate), talvolta risultanti da un gioco combinatorio con i simboli [14]. Invece, nella sezione principale, Schröder evita di tirare la giusta conclusione dal teorema di Grassmann che fornisce un ordine parziale, necessario per fare della struttura algebrica soggiacente al calcolo un reticolo e, poi, un'algebra booleana. Robert Grassmann, nel testo citato da Schröder scrive: *Jedes Stück ist der Summe gleich oder untergeordnet.* $[a + b = b] = [a \leq b]$ [**Gra72a**, p. 13] [Ogni parte

[14] Per uno Schröder puramente (o quasi) *combinatorio* si vedano almeno [**Sch87a**] e [**Sch81**]. Per esempio: *Von den beiläufig 1008 (oder - 18 Identitäten abgerechnet - 990) denkbare Gleichungen des gennanten Formelgebietes, sowie von allen erdenklichen Combinationen derselben, sind* S_{45} *und* S_{54} *die beiden einzige Algorithmen,* welche einer zweigliedrigen Art angehören, *eine solche zusammen ausmachen* [**Sch81**, p. 196] [Delle 1008 (o - detraendo 18 identità - solo 990) possibili equazioni del citato insieme, così come di tutte le loro possibili combinazioni, gli [insiemi di equazioni] S_{45} e S_{54} sono gli unici algoritmi contenenti 2 distinti algoritmi individuali].

di una somma è uguale o sussunta alla somma stessa]. Come si vede, Grassmann introduce anche un simbolo apposta; non nascondo che tale introduzione anche in questo testo avrebbe semplificato notevolmente il problema della soluzione.⌋

in parziale opposizione a 26 [15].

Un'equazione come $A = B$ può ora essere scritta anche nella forma $A - B = \emptyset$, poiché, quest'ultima da un lato implica la condizione di valenza [30d] $-A \cap B = \emptyset$ e dall'altro richiede espressamente che debba essere $A \cap -B = \emptyset$; vedi la 17 [la legge di Schröder].

Attraverso la coesistenza delle equazioni 36 e 37 si trova la nostra definizione di differenza univoca (che noi sopra ottenemmo particolarizzando la definizione completa) ancora una volta in maniera indipendente, così espressa: se si sa di una
pagina 33 classe C solo una cosa, che la sua | unione con una classe data B fornisce come risultato un'altra classe A [$C \cup B = A$], allora C non è ancora completamente conosciuto; l'addendo cercato C è completamente determinato, quando si sa inoltre che esclude la classe B, che $B \cap C$ è contemporaneamente uguale a $\emptyset$ [16].

L'operazione logica $A - B$ appena descritta presenta una controparte linguistica molto comune, nella forma della particella: *escluso*, *senza*, per cui $A - B$ rappresenta la classe degli a con esclusione dei b e la condizione di valenza 24d [$B \subseteq A$] esprime la richiesta che [la classe sottratta] sia inclusa in quella [da cui si sottrae]. Pertanto, è giustificato che noi indichiamo la sottrazione come *eccezione*.

Per la divisione logica, il linguaggio [comune] non ha nessuna espressione corrispondente, ma si comprende facilmente che in realtà essa corrisponde ad un'*astrazione*, poiché, attraverso il passaggio dalla classe $Q \cap B$ alla classe Q, si deve *prescindere* dai segni caratteristici della classe B.

1. [Distributività e sottrazione]

Dai principi validi per la sottrazione univoca, voglio mettere in primo piano la distributività:

$$39d. \qquad A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

[*Dimostrazione.* $A \cap (B - C) = (A \cap B \cap -C)$ e $(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (-A \cup -C) = (A \cap B \cap -C)$]; di questa viene fatto ampio uso nelle discussioni della vita di tutti i giorni, tanto che lo stesso Boole si appoggiò alla distributività come ad un assioma [17]. In considerazione di ciò, parve a lui che il principio di non contraddizione 7 o 33, $A \cap (V - A) = \emptyset$, non fosse altro che

[15] Infatti, in base a 26d, avremmo che $A - A = U \cap A$; qui, invece, $A - A = \emptyset$. Anzitutto, bisogna tenere conto che si tratta di due differenze diverse. Inoltre la 38d segue semplicemente dalla 26d con $U = \emptyset$. Quindi, il contrasto è solo apparente.

[16] Come osservato nella parte tedesca, qui Schröder intende per unione completa, un'unione completamente determinata, cioè univoca, un'unione tra classi disgiunte.

[17] Fra gli esempi tratti dalla vita comune forniti da Boole, indichiamo almeno questo: *Rappresenti ancora U la classe 'uomo' e A 'asiatico'; B rappresenti l'aggettivo 'bianco'. Allora, applicare*

una riscrittura della legge *specifica* 5 $A = A \cap A$. Bisogna notare, tuttavia, che le condizioni di valenza per entrambi i lati dell'equazione 39d sono diverse; per la parte sinistra cioè: $-B \cap C = \emptyset$ e per la parte destra $(-A \cup -B) \cap (A \cap C)$ oppure $(A \cap -B \cap C) = \emptyset$. Pertanto, si può cadere in errore applicando inavvertitamente l'enunciato e, per esempio, si ha che $(A \cap A) - A$ *non è* $= A \cap (A - V)$, dato che la condizione di valenza per la differenza $A - V$, cioè $-A = \emptyset$ non è in generale soddisfatta [18], mentre, dall'altra parte, $(A \cap A) - A$ certamente ha un senso; precisamente, ha il valore $\emptyset$.

2. [Aritmetica]

Per quanto concerne le altre leggi della sottrazione logica, che richiedono un confronto con quelle della sottrazione aritmetica, io mi voglio limitare alla discussione dei 4 gruppi seguenti di formule dell'*aritmetica*, nella cui forma le leggi delle operazioni di primo grado che riguardano non più di tre numeri dati sono raggruppate in maniera completa. |

$$\text{I.} \qquad (A - B) \cup B = (A \cup B) - B = B - (B - A) = A.$$

$$\text{II.} \quad \begin{cases} (A \cup B) - C & = A \cup (B - C) = A - (C - B) = \\ & = (A - C) \cup B = B - (C - A) \end{cases}$$

$$\text{III.} \quad \begin{cases} [(A \cup B) - C] = A - (B \cup C) & = (A - B) - C = \\ & = (A - C) - B. \end{cases}$$

$$\text{IV.} \quad \begin{cases} A - B & = (A \cup N) - (B \cup N) = (A - N) - (A - N) = \\ & = (N - B) - (N - A) = (A - N) \cup (N - B), \\ A \cup B & = (A \cup N) \cup (B - N) = (A \cup N) - (N - B) = \\ & = (A - N) \cup (B \cup N) = (B \cup N) - (N - A). \end{cases}$$

⌈Qui Schröder non fa altro che applicare il principio esposto nel *Lehrbuch*: esplora tutti i modi di connettere tre classi tra loro usando solo l'unione e la differenza (e sfruttando il passaggio da una parte all'altra del segno di uguaglianza).⌋

In virtù di 30d $[A - B = (A \cap -B)]$ noi possiamo indicare per ognuna delle espressioni qui eguagliate l'una con l'altra il [loro rispettivo] valore, grazie a 24d $[(-A \cap B) = \emptyset]$ scrivere le loro condizioni di valenza, [infine] sfruttando 16 pagina 34

l'aggettivo 'bianco' alla collezione di tutti gli uomini espressa dal sintagma 'uomini eccetto gli asiatici' $[B \cap (U - A)]$ *è lo stesso che dire 'uomini bianchi, eccetto asiatici bianchi'* $[(B \cap U) - (B \cap A)]$ [**Boo58**, p. 34].

[18] Infatti, la condizione di valenza richiederebbe che $V \subseteq A$. Ciò è valido solo in un caso: quando $V = A$. O, come scrive Schröder nel testo, $-A = \emptyset$.

$[(A \cup B) = \emptyset \leftrightarrow (A = \emptyset) \wedge (B = \emptyset)]$ unirle in unica equazione [19]; in riferimento ad essa, potremmo sviluppare all'occorrenza ogni espressione a partire dai simboli dei quali è composta.

Con ciò salta fuori un risultato sorprendente, che dalle equazioni, ottenute tra di loro mediante un raffronto con le espressioni aritmetiche, quasi la *metà* valgono anche in logica con la condizione che le espressioni abbiano un senso da entrambi i lati, cioè con le condizioni di valenza, evidenti a uno sguardo di entrambi i membri.

Basandosi sulla stessa ipotesi, l'altra metà delle equazioni, per diventare valida in logica, necessiterebbe dell'aggiunta di un *membro correttivo* in uno dei lati - membro che è capace, lui stesso, di [avere] un'espressione generale.

Mi condurrebbe troppo lontano, per ogni combinazione delle precedenti espressioni confrontate, il volerla qui giustificare singolarmente. Ognuna delle pertinenti ricerche con il suo significato geometrico può essere consigliata come interessante esercizio per il principiante. Degli enunciati validi non modificati, siano perciò messi in evidenza solo qualcuno di speciale. Abbiamo in particolare:

ad I. $(A \cup B) - B = A - (A \cap B)$ o $A - B$; il membro correttivo è $-A \cap B$ o $-B$ [20].

ad II. $A \cup (B - C) = [(A \cup B) - C] \cup (A \cap C)$; il membro correttivo è $A \cap C$ [21].

ad III. gli enunciati algebrici valgono senza alcuna modifica, cosa che non deve destare meraviglia, considerando che a partire dalle mie ricerche formali [**Sch73**, p. 284] [22] gli enunciati [23] di questo gruppo sono in una relazione più che immediata con le leggi pure delle operazioni dirette.

ad IV. $(A \cup N) - (B \cup N) = (A - B) \cap (V - N)$; |
pagina 35 membro correttivo $-N \cap (A - B)$; da ciò si può vedere, che una parte comune di minuendo e sottraendo di una differenza può essere sempre eliminata, così come può essere accorciata la differenza con essa se è disgiunta dagli altri membri; se, cioè, $N \cap A = \emptyset$ e $N \cap B = \emptyset$: *sottraendo somme ridotte, bisogna eliminare senza*

[19] Curiosamente, Schröder non cita 17. Forse perché troppo macchinoso?

[20] Schröder sembra indicare come membro correttivo la condizione di valenza 24d $[B \subseteq A]$. Sinceramente, non capisco. Nel caso in questione il sottraendo può essere minore del minuendo. Per esempio, $(A \cup V) - V = A \cup V - V = A \cup (V - V) = A \cup \emptyset = A$.

[21] In questo caso, Schröder deve aver dubitato della distributività. L'espressione nel testo potrebbe essere riscritta come: $A \cup (B - C) \subseteq (A \cup B) - C$; tenuto conto che l'inclusione qui è un connettivo, si ha $A \cup (B - C) \rightarrow (A \cup B) - C$. Il viceversa vale se e solo se il membro correttivo è uguale alla classe vuota. Ricordo che a pagina 33 del presente testo, Schröder aveva dimostrato la distributività e tale risultato era da lui già stato ottenuto nel *Lehrbuch* [**Sch73**, pp. 84–85].

[22] Si veda la parte tedesca per questo riferimento.

[23] Si sarà notato che adesso continuo a tradurre *Satz* con 'enunciato'. D'altra parte, la caoticità di quest'ultima parte non permette grandi possibilità. Scrivendo *enunciato* non escludo che a seconda dei casi possa essere un postulato, un teorema o addirittura una definizione. Semplicemente, l'autore non sembra essere qui interessato a queste distinzioni. Personalmente, avrei messo gli enunciati introducenti la differenza e la divisione tra gli assiomi come conseguenza delle condizioni di valenza, cioè in forma condizionale.

problemi i termini che coincidono tra loro [24].

Invece di domandare le leggi delle divisioni univoche si possono richiedere quelle delle divisioni complete.

Si ottengono i valori delle seguenti espressioni, messe una sotto l'altra, risolvendo in termini della X le equazioni poste alla loro destra, utilizzando i metodi del capitolo 2, eventualmente eliminando anche la Y e la Z:

$$
\begin{array}{lll}
X = (A \cup B) \boxminus C & \text{da} & X \cup C = A \cup B, \\
X = A \cup (B \boxminus C) & \text{“} & X = A \cup Y, Y \cup C = B, \\
X = A \boxminus (C \boxminus B) & \text{“} & X \cup Y = A, Y \cup B = C, \\
X = A \boxminus (B \cup C) & \text{“} & X \cup B \cup C = A, \\
X = (A \boxminus B) \boxminus C & \text{“} & X \cup C = Y, Y \cup B = A, \\
X = (A \cup N) \boxminus (B \cup N) & \text{da} & X \cup B \cup N = A \cup N, \\
X = (A \boxminus N) \boxminus (B \boxminus N) & \text{“} & X \cup Y = Z, Y \cup N = B, Z \cup N = A, \\
X = (A \boxminus N) \cup (N \boxminus B) & \text{“} & X = Y \cup Z, Y \cup N = A, Z \cup B = N
\end{array}
$$

⌈Per la risoluzione di queste equazioni, si veda la parte tedesca.⌋

e così via. La condizione di valenza è sempre il risultante dell'eliminazione di X, Y, Z.

Qui si apre, però, anche un'altra via: si può usare lo schema 25d, eventualmente ripetuto come condizione preliminare, per costruire le espressioni desiderate.

Usando questo processo, compariranno nel risultato spesso *più* di un simbolo di classe arbitrario $W, Z, \ldots$ indipendente l'uno dall'altro, mentre utilizzando il primo processo, in base a 20 [il problema della soluzione], si giunge ad unico simbolo arbitrario U; tuttavia, deve sussistere un'equivalenza tra entrambi i risultati in ogni espressione [considerata].

Analogamente, si può sostenere in generale che ogni funzione di dati simboli $W, Z \ldots$ indipendenti [tra loro], può essere sostituita da una particolare espressione funzionale che, oltre ai simboli $A, B, \ldots$ contiene solo il simbolo arbitrario U [25].

---

[24] Questo per idempotenza.

[25] Qui Schröder sta affermando in maniera disinvolta un grande risultato. Data un'espressione $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ (t è un parametro generico), essa può essere *sempre* riscritta come un'espressione contenente un'unica variabile; per esempio, $h(t, g(y))$ dove $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. In pratica, Schröder sta affermando la possibilità di eliminare le variabili da un'espressione funzionale. Questa pratica, avrà un nome apposta nel terzo volume delle *Lezioni*: *condensieren*. Ovviamente, qui non si giunge a tanto, cioè all'eliminazione completa delle variabili, perché almeno una deve rimanere.

A mo' di esempio si ha:

$$(A \cap W) \cup (B \cap Z) = (A \cup B) \cap U \; [26],$$

pagina 36 e questa equivalenza si può dimostrare anche direttamente, | trasportando, sotto l'ipotesi che $W = Z = U$, l'espressione della parte sinistra in quella della parte destra e, sotto l'ipotesi che $U = (A \cap W) \cup (B \cap Z)$, al contrario, l'espressione della parte destra in quella della parte sinistra, così che entrambe debbano risultare uguali e $(A \cap W) \cup (B \cap Z)$ rappresenti una parte arbitraria della classe $A \cup B$.

Similmente abbiamo inoltre che:

$$(A \cap B \cap -W) \cup \{(-A \cap B) \cup (A \cap W)\} \cap Z = (A \cup B) \cap U \; [27],$$

come si riconosce direttamente a partire dalle ipotesi $W = \{(A \cup B) \cap U\} \cup -U$ e $Z = (A \cup B) \cap U$ da un lato e $U = (A \cap B \cap -W) \cup \{(-A \cap B) \cup (A \cap W)\} \cap Z$ dall'altro.

Nel caso di equazioni tra espressioni complete i *membri correttivi* sono diversi in parte da quelli presenti in espressioni univoche, per lo più liberi da elementi arbitrari. In particolare, le formule del gruppo III valgono anche per la sottrazione completa, senza bisogno di alcun elemento correttivo.

Se si volesse realmente calcolare a partire dalla formule valide in tal modo per l'eccezione e l'astrazione, allora bisognerebbe, prima di tutto rendersi conto che le regole in generale non sono valide, le trasformazioni in base ad esse non sono in generale permesse, ma sono connesse a quelle condizioni, da me chiamate di valenza, quasi pressupposti ineliminabili.

Ci si potrebbe liberare in ogni caso da tutto ciò, se si adottasse una formula rappresentante una differenza (per esempio) come definizione anche per i casi in cui la condizione di valenza non è soddisfatta; in questo modo, le operazioni inverse avrebbero trovato la loro spiegazione come operazioni *assolutamente eseguibili* e le operazioni che nacquero dalle spiegazioni 30 date in precedenza sarebbero addirittura *completamente univoche*; cioè, tali che non sarebbero mai non solo plurivoche, ma neanche indefinite. Solo, per prima cosa, si avrebbe da scegliere a riguardo fra *più* espressioni, normalmente diverse tra loro, che, in forza delle condizioni di valenza verrebbero a soddisfarsi a vicenda e, per seconda cosa, non sussisterebbe più il rapporto di complementarità fra le operazioni così introdotte e le corrispodenti dirette, per cui perderebbero il loro principale interesse [28]. Io non

---

[26] Il procedimento di Schröder sembra essere il seguente: distributività $(A \cup B) \cap (W \cup Z)$ $\to$ sostituzione $U = (W \cup Z) \to$ risultato $(A \cup B) \cap U$.

[27] Si noti la parte dentro le parentesi graffe. Coincide con il teorema di orto-complementazione 14 e ci dice che è la combinazione lineare di una classe opportuna nei termini di due classi complementari tra loro (A e $-A$).

[28] In altre parole, non è necessario introdurre le operazioni inverse come soluzioni di particolari equazioni costruite con le operazioni dirette. D'altra parte, non facendo così, la sottrazione e la divisione perderebbero quel significato che Schröder vuole loro ascrivere.

sono stato in grado di trovare alcun motivo decisivo per dare la precedenza, seguendo questa scelta, ad una condizione preliminare, piuttosto che ad un'altra: se si scegliesse sempre la più generale delle espressioni a disposizione verrebbe meno il dualismo. Ed infine, le leggi delle operazioni, qualunque sia la nostra scelta della condizione preliminare, risulterebbero molto più complicate che quelle dell'algebra, cosicché la loro osservanza è incontestabilmente meno pratica del processo [costruito] a partire dai metodi illustrati nel capitolo 2, dove | ora rimarrebbe ancora da considerare la negazione come caso speciale comune alla sottrazione e alla divisione [29]. pagina 37

3. [Ancora qualcosa sullo sviluppo di un'espressione]

Mi rimane solo da compiere un'[ulteriore] osservazione, che il teorema 14 di Boole $D, E, F \ldots$ [30] - che rappresenta un analogo del teorema di Taylor

⌈Qui si riferisce al fatto che lo sviluppo di un'espressione funzionale booleana è il corrispettivo 'logico' della serie di Taylor; ovvero:

> **(Formula di Taylor con resto di Lagrange)** Siano $n \in \mathbb{N}, a > 0, x_0 \in \mathbb{R}, f$ una funzione con $I_a(x_0) = (x_0 - a, x_0 + a) \subset \mathcal{D}(f)$ [$I_a(x_0)$ è l'intorno di x_0 di raggio a; $\mathcal{D}(f)$ è il dominio della funzione f], ed f sia nell'intorno $I_a(x_0)$ $(n+1)$ volte differenziabile. Allora, vale per ogni $x \in I_a(x_0)$ [per ogni x dell'intorno in questione]:
>
> Esiste un t tra x_0 ed x [cioè, esiste un t appartente all'intorno] tale che:
>
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$
>
> [**Wüs09a**, p. 214], ma si veda anche [**Gil01**, p. 185 e segg.].

Dove il secondo addendo è il resto di Lagrange; per $n = 0$, si ottiene: $f(x) - f(x_0) = f'(t)(x - x_0)$, per t soddifacente le condizioni del teorema. La formula di Taylor diventa così, un caso speciale del *teorema del valor medio*. Boole in [**Boo47**, p. 60] osserva come il suo sviluppo delle espressioni funzionali non sia altro che un caso speciale del teorema di MacLaurin: *(...) usando il teorema di MacLaurin, possiamo espandere una data funzione $\phi(x)$ in termini di potenze ascendenti di x*, a sua volta un caso speciale della formula di Taylor.

---

[29] Vorrei far notare l'ossimoro: *der gemeinsame Specialfall* [il caso speciale comune].

[30] Schröder nel testo si riferisce al suo teorema 14 [$B = (X \cap A) \cup (Y \cap -A)$] e le lettere $D, E, F \ldots$ si riferiscono allo sviluppo di una espressione funzionale di una sola variabile, di due variabili e di tre variabili (vedi appendice). Il riferimento booleano deve essere [**Boo58**, pp. 72–76], da noi parzialmente tradotto.

Questo non significa che lo sviluppo booleano sia l'equivalente logico della serie di Taylor. Diciamo che vi allude, vi rassomiglia. Al proposito si veda quanto scrive il Mugnai in [**Boo93**, p. xxxvii, nota 69] e più oltre a fine del testo, dopo le appendici.⌋

- stranamente rimane valido anche per le espressioni elementari costruite attraverso le nostre operazioni inverse e complete - però in un senso che si discosta essenzialmente dalla concezione di Boole e, oltre a ciò, con un'aggiunta sostanziale, *che quei costituenti i cui coefficienti risultano indefiniti* [31], *devono essere uguagliati a* $\emptyset$, fornendo così la condizione di valenza. Lo stesso vale addirittura per le espressioni funzionali più complicate costruite con l'ausilio delle operazioni inverse - le cui dimostrazioni a posteriori di Boole non mi convincono completamente.

Infatti, ogni enunciato, per esempio, dà:

$$\text{40d.}\qquad \begin{aligned} A \boxminus B = {} & (V \boxminus V) \cap (A \cap B) \cup (V \boxminus \emptyset) \cap (A \cap -B) \\ & \cup (\emptyset \boxminus V) \cap (-A \cap B) \cup (\emptyset \boxminus \emptyset) \cap (-A \cap -B); \end{aligned}$$

qui, il coefficiente $(\emptyset \boxminus V)$ non ha senso [32], pertanto il costituente relativo $(-A \cap B)$ è da porre $= \emptyset$ e in questa guisa esprime la condizione di valenza.

In riferimento a 27 e a 28d [$V \boxminus V = \emptyset$] rimane:

$$A \boxminus B = (U \cap A \cap B) \cup (A \cap -B) \;^{33}$$

in reale coincidenza con 25d [$(A \cap -B) \cup (U \cap A \cap B)$].

In opposizione a quanto sopra, Boole calcola al proposito a partire da leggi

---

[31] Cioè, non sono né *pluri*voci, né *uni*voci.

[32] In quanto il sottraendo è più grande del minuendo. Ma si legga attentamente: Schröder non sta affermando che tale sottrazione sia falsa, ma che non abbia senso. In altre parole, espressioni siffatte non sono espressioni ben formate, o se si preferisce, non hanno diritto di cittadinanza nel calcolo schröderiano, per usare le parole dell'autore. Non mi è chiaro se l'estensione di quest'operazione (sul modello del passaggio da $\sqcap$ a $\cap$) presenti dei vantaggi. In ogni caso, il punto è chiaro. Mi si permetta una similitudine. Il nostro dominio è il regno dei numeri naturali interi positivi. In esso si introducono facilmente la somma e il prodotto, ma non la sottrazione o la divisione. Qui i casi sono due: o ampliamo il dominio e rendiamo sempre definite anche queste operazioni (come si fa di solito), o introduciamo delle restrizioni sui possibili argomenti delle operazioni inverse. Schröder sceglie la seconda strada. Però, non risolve ancora un problema: il suo calcolo permette di scrivere un'espresione del genere $\frac{A}{\emptyset}$. Cosa vuol dire? Non sarebbe meglio escludere espressioni del genere con qualche clausola?

[33] A costo di essere pedante, vorrei mettere ancora una volta in luce l'onnipresenza del teorema 14. Infatti, l'ultima espressione è un caso particolare di quel teorema: essa afferma che la differenza tra due classi è riscrivibile come la combinazione lineare di due classi complementari tra loro: $\overbrace{(A - B)}^{\alpha} = \overbrace{(U \cap A)}^{\beta} \cap B \cup \overbrace{A}^{\gamma} \cap - B$.

arimetiche e, ponendo $V \boxminus V$ uguale a $\emptyset$, trova che la soluzione più generale dell'equazione $C \cup B = A$, risolta a partire da C, è $C = A \boxminus B = (A \cap -B)$ [34].

Questo è corretto solo finché - come viene permesso da Boole - si calcola unicamente con unioni di membri disgiunti (con unioni *ridotte*) e finché l'unione fra termini che coincidono, più o meno parzialmente, tra loro viene esclusa [35].

Una tale esclusione della forma come $A \cup A$, contrariamente all'accettazione di $A \cap A$ è completamente immotivata, dato che l'una non è meno pura dell'altra [36], dato, inoltre, che l'ammissibilità di entrambe è di innegabile vantagio per accorciare le espressioni e nella vita di tutti i giorni sono in generali utili, dato che, infine, ci mette a disposizione i vantaggi del dualismo, che Boole scorse non compiutamente e a cui Grassmann si avvicinò in maniera significativa.

⌈*dem aber Grassmann schon bedeutend näher getreten ist.* Con queste parole si chiude l'*Operationskreis* con un rimando a quegli autori che in un modo o nell'altro l'avevano ispirato. A conclusione di tutto ciò non posso che far notare come Schröder non discuta in maniera esaustiva l'*universo di discorso* [Denkbereich], essenziale, per esempio, per stabilire l'univocità del complemento. In effetti, Schröder lo dà per scontato sullo sfondo, salvo che esplicitarlo in qualche caso, come il teorema 8: $V \cup V = V$, cioè V non è suscettibile di essere ampliato. È il massimo del pensabile e del dicibile. Non mi è però chiaro che dal fatto che V non possa essere ampliato segua che sia rigorosamente delimitato. E se V non lo è, allora una data classe A potrebbe avere infiniti complementi diversi tra loro. Non credo, tuttavia, che ciò costituisca un problema in questa sede, in quanto è evidente che lo dà per scontato. Nel primo volume delle *Lezioni* lo introdurrà per bene.⌋

---

[34] Come si nota facilmente, in Boole manca l'eventuale resto. La differenza di cui qui parla Schröder non è quella *univoca*, ma quella *completa* (in un certo senso *ambigua*).

[35] Il *resto* schröderiano nella divisione include proprio quella parte comune alle classi A e B.

[36] Infatti, ragionando booleanamente, dovremmo escludere l'unione (che per lui può essere solo *completa*); d'altra parte, non avremmo limitazioni nell'accettare l'intersezione. Ma come si fa ad accettare una e rifiutare l'altra, se sono duali tra loro? Inoltre, Schröder riprende il discorso sulla presunta purezza dell'unione e dell'intersezione. A parte che ognuna delle operazioni dirette può essere definita in base all'altra e al complemento, rendendo così dubbio quale delle due sia più pura, in ogni caso, un'operazione diretta non può essere più pura della sua inversa, in quanto non è possibile stabilire con le leggi del calcolo cosa sia diretto e cosa no. Ogni operazione inversa, si può considerare come diretta e da essa dedurre come indiretta (attraverso il problema della soluzione) la corrispondente inversa. Schröder avrebbe fatto meglio a dire che, per consuetudine si usa ritenere che $\cup$ e $\cap$ siano dirette, o che psicologicamente parlando sono più intuitive delle loro inverse. Ma, appunto, è una questione psicologica, non calcolistica.

Appendici

Appendice A

Ernst Schröder - *Alcune note sulle 'Operazioni del calcolo logico'* [**Sch77b**]

Già Leibniz aveva rivolto i suoi sforzi approfonditi tanto alla creazione di un *calculus philosophicus* o *calc. ratiocinator*, quanto alla fondazione di una lingua segnica generale [Zeichensprache], di una *lingua characteristica universalis* (sive *realis*), di un alfabeto dei concetti umani, per così dire - *questa* [lingua], oggetto o sostrato reale da formare per *ogni* disciplina, attraverso cui l'essenza dell'operazioni mentali umane [menschlichen Geistesoperationen] vengono portate alla luce, dovrebbe essere definita [con precisione], compresa a partire dalla sua leggittimazione ed essere portata ad espressione in una maniera più adeguata. In rapporto al secondo di questi scopi - all'idea della formazione di una caratteristica universale - Leibniz aveva avuto già come predecessori Descartes e altri.

Fino a quando tra i numerosi inediti manoscripti leibniziani, che si trovano archiviati ad Hannover, non viene alla luce ulteriore materiale, finora nascosto, che potrebbe essere rilevante per la questione, tutti i contributi storici e tutte le dimostrazioni riguardanti questi sforzi ⟨dei tempi trascorsi⟩ dovrebbero trovarsi nelle prime 62 pagine del terzo volume degli *Historische Beiträge zur Philosophie* [Contributi storici alla filosofia] di Adolf Trendelenburg (Berlino 1867) [**Tre67**], di cui il signor Hermann Lotze ebbe la bontà di mettermi a conoscenza.

Degli ideali appena menzionati, ha almeno il primo trovato una realizzazione in tempi recenti grazie all'inglese George Boole, famoso anche in altri campi per i suoi risultati matematici, che ha creato una disciplina, in base alla quale a partire da premesse date le conclusioni possono essere tratte deduttivamente, anche con *dimostrata completezza*, in maniera [puramente] calcolistica.

I risultati delle sue ricerche sono stati pubblicati in maniera esaustiva da Boole stesso nel suo scritto: *An investigation of the laws of thought* [1], su cui sono fondate le teorie matematiche della logica e della probabilità, Londra, 1854 (424 pagine) [**Boo58**]. In occasione delle ricerche logiche compiute nel mio *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende* [Manuale di aritmetica ed algebra per docenti e studenti], Lipsia, 1873 [**Sch73**], venni per la prima volta a conoscenza dell'esistenza di questo fondamentale lavoro, per lungo tempo, mi sembra, non debitamente preso in considerazione.

Sebbene, in realtà, del compito che lui stesso si pose, Boole disse *that he never doubted that it was worthy of his best efforts* [che non ebbe mai a dubitare che fosse degno dei suoi migliori sforzi], tuttavia questo campo, dopo di lui, ebbe solo una esigua rielaborazione da parte di altri autori, fra cui Cayley, A.J. Ellis e specialmente Robert Grassmann [2].

---

[1] Nel testo, Schröder scrive erroneamente *law's*.

[2] Betreffs der genanerenen [così nel testo; ma dovrebbe essere *genauren*] Angaben vergl. meine weiter unten angeführte Schrift [per delle indicazioni più precise, vedi più sotto il mio testo]. NdA.

Lo studio dell'opera booleana mi fece scorgere il motivo di questa messa da parte, almeno in parte, in alcune incompletezze, di cui il metodo booleano ancora soffre e mi spinse a pubblicare presso Teubner un testo già apparso in stampa dal titolo *Der Operationskreis des Logikkalkuls* [Le operazioni del calcolo logico] [**Sch66a**], in cui, come credo, la fondazione e la tecnica del calcolo sono portati al massimo completamento possibile [thunlichsten Vollendung]. Portare a conoscenza il pubblico matematico del contenuto di questo scritto è lo scopo principale della presente nota.

A paragone delle proporzioni dell'opera di Boole, di cui nel mio scritto *non* viene presupposta [in alcun modo] la conoscenza, io riesco a collocare nel solo spazio di 37 pagine tutti i metodi essenziali e il cuore [Kern] del calcolo logico; i passi avanti compiuti in esso [rispetto a Boole] sono condensati nei seguenti quattro punti.

1) I metodi vengono purificati da tutte le aggiunte estranee alla materia; sono così esclusi i numeri algebrici (che giocano ancora un grande ruolo in Boole), che in verità nell'ambito del calcolo logico non permettono una ragionevole interpretazione. Nel mio scritto si calcola unicamente con adeguati *simboli di classe*, ai quali appartengono anche lo 0 e l'1. La disciplina riceve così una forma completa e [allo stesso tempo] *elementare*, che - in contrasto con il sistema booleano, che richiede la conoscenza preliminare dell'algebra fino alle equazioni di primo grado a più incognite - necessita di nessuna preparazione matematica. A ciò è legata una non indifferente semplificazione dell'apparato calcolistico, in Boole ancora troppo difficile da maneggiare. Essendo molte le espressioni simboliche usate in matematica, che in *entrambe* le discipline trovano un regolare utilizzo e che sarebbero state da chiarire in maniera esaustiva, io ho presupposto nel mio scritto un pubblico formato matematicamente in maniera adeguata.

In questa direzione, da me qui abbozzata, Robert ed Hermann Grassmann, che sembrano del resto non conoscere Boole, hanno imboccato la via giusta. Essi, però, non sono andati abbastanza distanti; per la precisione, non sono andati sufficientemente distanti da poter risolvere il problema generale posto da Boole e da poter fare a meno definitivamente del suo disagevole apparato aritmetico-logico.

2) Nel mio scritto viene dimostrato un completo *dualismo* tra le operazioni di primo grado (addizione e sottrazione) e quelle del secondo (moltiplicazione e divisione), in conseguenza del quale l'intero edificio ottiene una [sua propria] simmetria, che manca all'aritmetica. Per esemplificare in questa sede [3] il dualismo, l'addizione e la moltiplicazione logiche costituiscono un esempio curioso di due operazioni commutative e associative che si distribuiscono una sull'altra, per le quali non solo vale in generale che:

[3] Nel testo *hierob*; un errore per *hierbei*?

$(b+c)\cdot a = (b\cdot a)+(c\cdot a)$ [4] ma anche $(b\cdot c)+a = (b+a)\cdot(c+a)$ [5].

3) Insieme a queste operazioni ($+$ e $\cdot$), che si chiamano altrove anche *collezione* e *determinazione*, c'è una terza, la *negazione*, la cui introduzione viene dimostrata come sufficiente per la soluzione del problema più generale del calcolo logico.

In rapporto a quest'ultima, potrebbe essere utile menzionare anche l'enunciato da me proposto: che la negazione di un'espressione funzionale a più argomenti viene trovata negando tutti i suoi coefficienti, sfruttando gli enunciati sulla negazione di prodotto e somma introdotti già da Grassmann.

4) Inoltre, viene esposta una teoria esatta di entrambe le operazioni inverse di sottrazione (o *eccezione*) e divisione (o *astrazione*) e con ciò viene fatta luce sull'oscurità in cui erano avvolte.

Di queste operazioni, in fondo rese inessenziali dalla negazione, viene dimostrato come la negazione sia un caso speciale comune [ad entrambe] e si mostra che la negazione di a è rappresentabile come

$$1-a=\frac{0}{a}.$$

Incidentalmente, si dimostra che questa equivalenza è al tempo stesso l'unica equazione del calcolo logico che è duale a sé stessa, finché cioè si prescinde da identità come queste:

$$1-(1-a)=0:(0:a), \qquad 1-\frac{0}{a}=\frac{0}{1-a}$$

ecc., che risultano da una reiterata applicazione dell'equazione precedente a sé stessa.

Le regole del calcolo qui coincidono, come si può vedere, solo parzialmente con quelle dell'aritmetica.

Per ulteriori approfondimenti, come l'applicazione del calcolo, devo rimandare al mio scritto.

Per concludere, vorrei far notare come ci siano anche operazioni *metriche*, che

---

[4] Mi sono permesso di sostituire alla grafia originale $b.a$, $b\cdot a$,

[5] Anche nell'ambito delle *sostituzioni* riesce facile scoprire simili operazioni reciprocamente distributive [gegenseitig distributive Operationen], ma queste mancano di soddisfare la commutatività e l'associatività. Si definisca come prodotto e somma *simbolici*:

$$a\cdot b=a^{\alpha}ba^{-\alpha}, \qquad a+b=a^{\beta}b^{\gamma}a^{-\beta},$$

dove la moltiplicazione simbolica indicata con il segno $\cdot$ già a sufficienza evidenzia il contrasto con la *vera e propria* moltiplicazione delle sostituzioni, che rimane espressa dal semplice accostamento dei fattori; così vale la legge di distributività *dell'aritmetica*:

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c),$$

dove entrambi i lati di questa equazione rappresentano la stessa espressione $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}b^{-\beta}a^{-\alpha}$ e vale anche l'opposto; cioè, vale $a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$, sotto l'ipotesi che $\gamma=1$.

C'è da meravigliarsi che nel campo della teoria delle sostituzioni, così ampiamente sviluppata, finora non siano state presi in considerazione i rapporti *distributivi*. NdA.

offrono per loro stessa natura interessanti analogie con quelle logiche. Come si può vedere in uno scritto di Otto Boeddicker [**Boe76**, p. 22] [6], la grandezza $A(\cdot)B$ della superficie che è comune a due superfici bi- o pluridimensionali limitate A e B si lascia esprimere [come il prodotto degli integrali di superficie di A e B] e quindi anche la misura $A(+)B$ della superficie, alla cui composizione A e B contribuiscono, si lascia facilmente comporre secondo lo schema:

$$A(+)B = A + B - A(\cdot)B.$$

Porre l'attenzione su questa circostanza, come su quanto detto nella nota in alto a proposito delle sostituzioni, è stato uno degli scopi [secondari] di questa nota.

Karlsruhe, il 7 luglio 1877.

[6] Per questo riferimento, vedi la postilla.

Postilla all'Appendice A

Otto Boeddicker - estratto da *Estensione della teoria gaussiana dei nodi, con applicazioni in elettrodinamica* [**Boe76**, p. 22]

Sia S' una curva chiusa contenunta in S, allora potremmo descrivere il punto di intersezione della normale a $P_{S'}$ e la superficie $P_{S'}$ racchiusa da S'. Formiamo, quindi, per ogni punto di detta superficie il nostro integrale e sommiamo tutti i valori; risulta così:

$$\int \mathrm{d}P_{S'} \int \frac{\mathrm{d}\log\frac{1}{r}}{\mathrm{d}N} dS = 2\pi \cdot P_{S'}.$$

Entrambe le curve chiuse S e S' si intersecano [durchkreuzen sich] e $P^*_{S'}$ è il pezzo che giace all'interno della superficie $P_{S'}$; allora segue immediatamente:

$$\int \mathrm{d}P_{S'} \int \frac{\mathrm{d}\log\frac{1}{r}}{\mathrm{d}N} dS = 2\pi \cdot P^*_{S'}.$$

Possiamo quindi in generale affermare:

$P_{S'}$ indichi la superficie racchiusa in una curva S', r la distanza di ogni elemento di S' da ogni elemento di un'altra curva chiusa S,

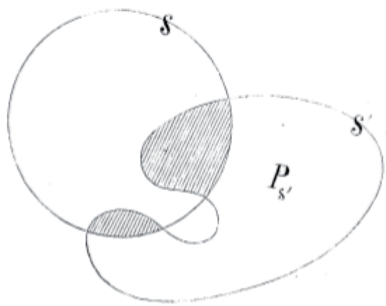

FIGURA 1

infine N sia la normale diretta verso l'interno di S; allora la parte di $P_{S'}$ che si trova all'interno di S [7] *si può esprimere attraverso l'integrale:*

$$\frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}P_{S'} \cdot \int \frac{\mathrm{d}\log\frac{1}{r}}{\mathrm{d}N} dS.$$

7 Si tratta dell'intersezione di S con S'. Vedi il testo precedente di Schröder.

Appendice B

R. Adamson - recensione di *Alcune note sulle operazioni del calcolo logico* del dt. Ernst Schröder, professore ordinario di matematica al politecnico di Karlsruhe [**Ada77**]

Questo trattato, di sole 37 pagine, contiene l'esposizione più chiara ed elegante mai data della dottrina matematica, o algebrica, del ragionamento logico. Essenzialmente, l'autore concorda con Boole e il suo lavoro può essere visto in molti punti come una semplificazione, in altri una rettificazione, degli elaborati processi per la prima volta esposti completamente nelle *Leggi del pensiero* [**Boo58**]. Al metodo di Boole Schröder rimprovera che i molti passi nei processi simbolici non sono in sé stessi interpretabili o intelleggibili e che certi elementi vengono introdotti ed usati, seppure estranei totalmente alla natura dell'inferenza logica. Al posto del metodo algebrico booleano, egli vorrebbe, quindi, sostituire delle formule capaci di essere enunciate simbolicamente e soggette a leggi simboliche ben definite, ma dedotte accuratamente dalla natura delle quantità simboleggiate e ad ogni passo intuitivamente interpretabili.

Schröder, come Boole e tutti coloro che hanno adottato la visione quasi-matematica dei processi logici, parte dalla considerazione delle classi come gli elementi del ragionamento. Classi di cose sono le uniche quantità logiche e le leggi delle operazioni simboliche sono immediate espressione delle varie relazioni tra classi. Restringendo in questo modo l'attenzione alle relazioni quantitative delle classi, Schröder concorda nelle linee essenziali con R. Grassmann al quale si riferisce e al quale sono dovuti alcuni dei teoremi nel suo lavoro. La *Begriffsslehre oder Logik* [Teoria dei concetti o logica] [1] di Grassmann, la seconda parte di un trattato più comprensivo sul ragionamento quantitativo in generale (*Die Formenlehre oder Mathematik* [La dottrina delle forme o matematica]) [**Gra72b**], merita attenzione. Egli sembra aver scritto all'oscuro di ogni tentativo precedente di rappresentare simbolicamente il ragionamento e sarebbe troppo affermare che sviluppò i suoi principi fino al loro limite. Molti dei teoremi enunciati nella *Logica* con considerevole dispiego di dimostrazioni matematiche, sono semplicemente traduzioni in simboli delle leggi dell'ordinaria logica delle relazioni tra nozioni estensionali. Quando lo stesso metodo quantitativo è applicato al contenuto, i risultati generalmente non sono di molto valore. Grassmann non espone alcun teorema generale di eliminazione che può risultare utile nella soluzione di problemi complicati e, sebbene egli abbia trattato la sillogistica, i risultati non sono di particolare importanza.

Assumendo come fondamento per il suo calcolo logico la concezione dei simboli come rappresentanti classi, le leggi simboliche e i processi sono con Schröder dipendenti dalla natura delle relazioni tra classi. Nelle prima sezione i processi

---

[1] [**Gra72a**].

specificatamente logici sono esposti in quattro enunciati: due diretti - la moltiplicazione o determinazione e l'addizione o collezione; due indiretti o inversi - la divisione o astrazione e la sottrazione o eccezione. I processi inversi, comunque, possono essere sostituiti attraverso l'operazione di un quinto processo, l'opposizione o negazione. Nella seconda sezione, la più lunga delle quattro, i principi del calcolo, per quanto sono coinvolti i processi diretti, sono enunciati con le necessarie definizioni, postulari ed assiomi. La spiegazione della somma $(a + b)$ e della moltiplicazione simboliche (ab), insieme con le dimostrazioni delle leggi commutativa $(ab = ba; a{+}b = b{+}a)$ e associativa $[a(bc) = ab(c); a{+}(b{+}c) = (a{+}b){+}c]$ di questi due processi non differisce essenzialmente da quella di Boole. A pagina 12, tuttavia, viene esposto un teorema che non è usato direttamente da Boole; quest'omissione è una delle peculiarità del sistema booleano. Esso è un'evidente deduzione dalla relazione delle nozioni di estensione ed inclusione e può essere enunciato simbolicamente così: $a = a + ab$.

L'introduzione della negazione di qualsiasi termine porta all'affermazione di un principio utile, vale a dire che i complementi dello stesso simbolo di classe o di equivalenti simboli di classe sono equivalenti; il complemento essendo quel simbolo di classe che addizionato ad ogni altro dà il risultato 1 o l'universo delle cose pensabili, o che moltiplicato con ogni altro dà il risultato 0 o il non-esistente. Segue che di ogni termine esiste una sola negazione; così $a + a_1 = 1$; $aa_1 = 0$.

Il teorema 14 (S. 14) è sostanzialmente la formula di Boole per lo sviluppo di ogni funzione logica, ma riceve una formulazione in qualche modo differente; così: *ogni classe b può essere espressa in maniera omogenea rispetto ad ogni altra classe a nella forma $b = xa + ya_1$,* per x ed y simboli di classe indeterminati che possono assumere il valore 0 o 1. La prova fornita è elegante e da esso viene dedotta una utile forma equazionale $b = (ab + ua_1)a + (a_1b + va)a_1$.

Il teorema 15 fornisce una spiegazione molto semplice della regola per moltiplicare gli sviluppi [di funzione] in base ai loro argomenti. Il risultato di una moltiplicazione si trova moltiplicando i coefficienti dei termini simili.

I teoremi 17 e 20 sono i più originali del lavoro di Schröder. Nel 17 si mostra che ogni equazione logica $a = b$ è capace di essere risolta nella forma

$$ab_1 + a_1b = 0; ab + a_1b_1 = 1; (a + b_1)(a_1 + b) = 1.$$

Grazie a questo teorema, Schröder è in grado di fare a meno del processo di trasposizione, che può essere impiegato solo con delle condizioni definite.

Nel risolvere queste equazioni, le negazioni di termini complessi sono costantemente implicate. I teoremi 18 e 19 contengono dei metodi per trovare queste negazioni. *La negazione di un prodotto è la somma delle negazioni dei fattori,* $(ab)_1 = a_1 + b_1$; *la negazione di una somma è il prodotto delle negazioni degli addendi,* $(a + b)_1 = a_1b_1$. Similmente, la negazione di un termine sviluppato si trova sostituendo *ogni* coefficiente con la sua negazione; così $(ab_1 + a_1b)_1 = ab + a_1b_1$; dato che il primo membro può essere considerato completamente sviluppato rispetto ad *una* delle quantità, sebbene non sia sviluppato rispetto ad entrambe.

Queste proposizioni conducono al teorema fondamentale di eliminazione e semplificando questo processo rendono superfluo molto dell'apparato algebrico introdotto da Boole. Il teorema 20 è così enunciato: *l'equazione* $xa + ya_1 = 0$ *è equivalente alle due equazioni* $xy = 0$ *e* $a = ux_1 + y$*, con* u *classe arbitraria.* Poiché $u+y = u(y_1+y)+y = uy_1+uy+y = uy_1+y$ e poiché, se $xy = 0$, [allora] $x_1y = y$, la seconda equazione può essere scritta nelle forme $a = (u+y)x_1$, o $a = u(y_1 + y)x_1$, o $a = ux_1y_1 + y$.

Un'analisi di questo teorema ci mostra che grazie ad esso noi possiamo eliminare qualsiasi termine da ogni equazione ($xy = 0$ essendo il risultato dell'eliminazione di a) della forma data; i.e. poiché in virtù del teorema 17 ogni equazione può essere riscritta in questa forma, possiamo eliminare qualsiasi termine da qualsiasi equazione logica. Nella stessa maniera possiamo definire qualsiasi quantità logica in termini di tutte le altre implicate nell'equazione originaria. La stretta relazione tra questo metodo di eliminazione e quello di Boole non richiede di essere esplicitata.

La terza sezione del lavoro applica il metodo ad uno dei più complicati esempi risolti da Boole. La superiorità in intelligibilità logica della soluzione di Schröder va ammessa; la sua superiorità in brevità non è così chiara.

La quarta sezione si occupa dei processi inversi di sottrazione e divisione, mostra come queste siano capaci di essere portate sotto le stesse forme di soluzione di quelle esposte per l'addizione e moltiplicazione e sottolinea la condizione peculiare, quella della relazione di disgiunzione tra i termini, necessaria per applicarle.

Come è stato detto, il merito peculiare del metodo di Schröder è la vicinanza alla quale tiene le realtà logiche espresse in simboli matematici. È così in ogni senso della parola un calcolo *logico*; nessuna legge o processo è ammesso che non abbia un significato logico e non c'è nessun passo che non sia suscettibile di interpretazione nel linguaggio logico. In questo modo, si avvicina di più al metodo di inferenza indiretta del professor Jevons che non alle forme algebriche di Boole e ci permette di percepire con più chiarezza di quanta fosse possibile nel caso della logica booleana il valore della rappresentazione simbolica del ragionamento. A prescindere da ogni opinione riguardo la natura del giudizio e perciò, senza pronunciarsi sulla validità filosofica della dottrina che tutte le quantità logiche sono classi, bisogna ammettere che dopo il processo preliminare di dare alle premesse una forma quantitativa, il metodo simbolico ci permette di trattare facilmente e succintamente ragionamenti estremamente complessi ed intricati. Se rappresentiamo le nozioni con dei simboli e le loro relazioni con dei segni algebrici e se, introducendo termini contraddittori possiamo stabilire le possibili alternative in maniera esaustiva, allora possiamo evitare la confusione dovuta al portare il significato completo delle nostre nozioni attraverso [tutto] il processo di ragionamento. Ma non c'è più generalità nelle leggi simboliche e nei processi che non nelle leggi logiche e nei processi che esse esprimono. Non abbiamo in alcun senso portato la logica sotto una scienza quantitativa più generale, come ad un primo sguardo apparıva essere il caso con il metodo di Boole. Lo stesso processo di eliminazione, che in Boole era affetto da strumenti difficilmente riconoscibili come logici, è nel sistema di Schröder nient'altro che una complessa applicazione delle ordinarie regole formali di inferenza logica. È un conveniente espediente meccanico, fondato su delle forme logiche e capace di essere tradotto in esse.

Una recensione competente di questi vari tentativi di semplificare i processi logici usando simboli algebrici è un desideratum nella letteratura logica.

R. Adamson.

Appendice C

Alexander J. Ellis - *Sull'analogo algebrico delle relazioni logiche* [**Ell73**]

(Sommario.)

Oggetto del presente articolo è esaminare la *teoria matematica della logica*, come esposta dal dt. George Boole nel suo *Leggi del pensiero* [**Boo58**, pp. 37–38], - *Si supponga un'algebra in cui i simboli* x, y, z, *&c. ammettono, indifferentemente, i valori* 0 *ed* 1 *e solo questi. Le leggi, gli assiomi e i processi di una tale algebra saranno identici, nella loro completa estensione, con le leggi, gli assiomi e i processi dell'algebra della logica. Solo una differenza di interpretazione potrà distinguerle.* Per questo scopo, anzitutto le leggi di quest'algebra sono state investigate indipendentemente da quella della logica; poi, le leggi delle proposizioni logiche primarie e secondarie, come stabilite dal dt. Boole, sono state sviluppate in forma algebrica e confrontate con le precedenti. I risultati principali che si afferma di aver stabilito sono:-

1. Che c'è una differenza fondamentale tra un'algebra siffatta e la logica, in quanto l'algebra ammette solo *due* fasi [phases], 0 e 1 e la logica ammette *tre* fasi, ovvero, non solo *nessuno* e *tutti*, corrispondenti a 0 ed 1, ma anche *qualche*, *che sebbene nel suo significato possa includere* tutti, *non include* nessuno [**Boo58**, p. 124] e, quindi, non ha un analogo in quest'algebra; cioè, un'algebra di 0 e 1 può corrispondere solo ad una logica di *nessuno* e *tutti*.

2. Che, nonostante questa differenza, ci sono certe relazioni formali tra le equazioni che permettono all'algebra di 0 e 1 di essere usate come un *algoritmo* allo scopo di arrivare a certe forme logiche, che, comunque, vanno interpretate su di una base che non ha nessuna analogia con quella algebrica.

3. Che l'introduzione di questo algoritmo introduce delle difficoltà teoretiche, da aggiungersi alla mole di lavoro, che sono completamente non necessarie anche solo per gli scopi della teoria delle probabilità fondata su di essa dal dt. Boole.

Nell'articolo viene esaminato il caso generale e viene proposta una soluzione per le difficoltà che nascono dall'interpretazione dei simboli $\frac{0}{0}$ e $\frac{1}{0}$, che Boole afferma *debbano essere introdotti sperimentalmente* [**Boo58**, pp. 91–92]. Il semplice caso che segue vuol mostrare la natura della ricerca; ma, per brevità, neppure questo caso è trattato completamente.

In *algebra*, assumiamo che x e y abbiano uno o l'altro dei valori 0 e 1 e nessun'altro. Siano x', y' connessi con loro, tramite le equazioni

$$1 = x + x' \qquad \text{e} \qquad 1 = y + y' \qquad \text{(a)}$$

Quindi,

$$xx' = 0 \qquad \text{e} \qquad x = x^2 \qquad \text{(b)}$$

e con una semplice moltiplicazione

$$x = xy + xy', \qquad x' = x'y + x'y' \qquad \text{(c)}$$

$$1 = xy + xy' + x'y + x'y' \qquad \text{(d)}$$

In (d) *un* termine sulla destra *deve* $= 1$ e *ogni altro* del *resto* deve $= 0$. Questo non ha un analogo logico. L'ambiguità diminuisce prendendo qualche relazione tra x e y, come $x = xy$, che per (c) dà $xy' = 0$ e, quindi, per (d)

$$1 = xy + x'y + x'y' \qquad \text{(e)}$$

che mostra come *uno* dei tre (invece di quattro) termini *deve* $= 1$ e ognuno degli altri due *deve* $= 0$. Anche questo non ha un analogo logico. Ma in (e) troviamo che x occorre solo nel termine xy, e y' solo nel termine $x'y'$, laddove x' e y' non possono occorre insieme in due termini. Questa è l'unica relazione utile in logica. Inoltre, data la necessità che tutti i termini si annullino eccetto uno, ci può essere un solo termine in cui occorre x, in cui né x', né y' possono occorrere, ma può anche non esserci un termine siffatto. Neppure questo ha un analogo logico.

In *logica* (per brevità, considerando solo proposizioni primarie) sia U le cose stesse nell'*universo di discorso* [**Boo58**, p. 44], X quelle di loro che hanno il nome X_n e l'attributo X_a e similmente per Y, Y_n, Y_a. Siano X', Y' quelle cose che non sono X e [non sono] Y. XY indichi quelle cose X che sono anche cose Y e YX quelle cose Y che sono anche cose X. $P = Q$ significhi che il gruppo delle cose P è lo stesso del gruppo delle cose Q. Allora, trascurando l'ordine e il numero di volte in cui gli attributi occorrono, $XY = YX$ e $X = XX$. vP rappresenti il *numero* delle cose P, allora

$$vU = vX + vX', vU = vY + vY', vXX' = 0, vX = vXX, \qquad \text{(a', b')}$$

$$vX = vXY + vXY' \qquad vX' = vX'Y + vX'Y', \qquad \text{(c')}$$

$$vU = vXY + vXY' + vX'Y + vX'Y', \qquad \text{(d')}$$

che hanno la stessa forma di (a, b, c, d). Ma in (d'), sebbene un termine sulla destra *possa* $= vU$, nel qual caso ogni altro del resto *deve* $= 0$, per la maggior parte dei casi *nessun* termine sulla destra di (d') sarà $= vU'$ e *qualsiasi numero* di termini *può* essere più grande di 0. Questo non ha un analogo nell'algebra in questione. Se c'è un'equazione limite come $X = XY$, o *tutti gli* X *sono* Y, dando $vXY' = 0$ da (c'), o *non esiste alcun* X *che non sia* Y, allora (d') si riduce a

$$vU = vXY + vX'Y + vX'Y', \qquad \text{(e')}$$

e tutti gli X che esistono (possono anche non esserci) sono Y, e *tutti* i Y' che esistono (possono anche non esserci) sono X'. Questo ha l'analogo algebrico già menzionato. Ma ci possono essere *sia* X *che* Y', nel qual caso, *né* vXY, né $vX'Y'$ sono $= vU$ o $= 0$ e questo non ha un analogo algebrico. Ancora, se entrambi o nessuno di vX e $vY' = 0$, $vX'Y$ può essere più grande di 0; questo non ha un analogo algebrico - sebbene, se *sia* $vX = 0$ *che* $vY' = 0$, allora $vX'Y = vU$, che ha un analogo algebrico.

La differenza tra le leggi di una tale algebra e quelle di un calcolo logico, quindi, appare essere una di principio e non solo di interpretazione.

Appendice D

Arthur Cayley - *Nota sul calcolo logico* [**Cay71**], [**Cay95**, pp. 65–66]

Mi sembra che la teoria del sillogismo, come esposta nell'articolo di Boole *Il calcolo logico* [**Boo48**], possa essere presentata in una forma più concisa e succinta come segue:

Noi ci occupiano di classi complementari X, X'; cioè, queste insieme compongono l'universo (delle cose considerate), $X + X' = 1$; cioè, X' è la classe non-X e X la classe non-X'.

Qualsiasi tipo di relazione semplice tra due classi (se ci limitiamo [attend] alle classi complementari) può essere espresso come una relazione di totale esclusione, $XY = 0$, o come una relazione di parziale (o totale) inclusione, YX non è $= 0$; cioè, la relazione $XY = 0$ può essere letta in oguna delle forme [seguenti]

Nessun X è Y,
Nessun Y è X,
Tutti gli X sono non-Y,
Tutti gli Y sono non-X

e la relazione XY non è $= 0$ in ognuna delle forme

Qualche X è Y,
Qualche Y è X.

Io affermo che i precedenti sono gli *unici* tipi di relazione semplice; è sottointeso che X' possa essere sostituito da X, o Y' da Y; così, l'esempio $X'Y = 0$ (tutti gli Y sono X) è lo stesso tipo di relazione di $XY = 0$ e $X'Y$ non è $= 0$ (qualche Y è non-X) è lo stesso tipo di relazione di XY non è $= 0$.

Ora, prendendo X o X' e Z o Z' come termini estremi e Y o Y' come termini medi di un sillogismo, le uniche combinazioni [possibili] delle premesse sono

(1) $XY = 0,\quad ZY = 0.$

(2) $XY = 0,\quad ZY$ non è $= 0,\quad$ perciò, $X'Z$non è $= 0.$

(3) XY non è $= 0,\quad ZY$ non è $= 0.$

(4) $XY = 0,\quad ZY' = 0,$ perciò, $XZ = 0.$

(5) $XY = 0,\quad ZY'$ non è $= 0.$

(6) XY non è $= 0,\quad ZY'$ non è $= 0.$

Di queste, ci sono (come mostra la terza colonna) solo due che portano ad una conclusione (o relazione tra i termini estremi). Riguardo ai casi negativi, questo si vede immediatamente; così $XY = 0, ZY = 0$ (nessun X è Y, nessun Z è Y) non porta a nessuna conclusione riguardo X, Z. Per quanto concerne i casi positivi, si vede che le conclusioni seguono [dalle premesse]; ma potremmo ottenere le conclusioni con un ragionamento simbolico così

(2) $Y = YX + YX', = YX'$;

quindi, $ZY = ZYX'$ non è $= 0$; perciò, ZX' non è $= 0$.

(4) $XZ = XZY + XZY'$, dove nella parte destra ogni termine (il primo in quanto contenente XY, il secondo in quanto contenente ZX') è $= 0$; cioè, $XZ = 0$; dove il significato logico di ogni passo è ovvio.

Appendice E

George Boole - estratto da *Una ricerca sulle leggi del pensiero, sui cui si fondano le teorie matematiche della logica e della probabilità*
[**Boo58**, pp. 146 – 149]

Io vorrei (...) suggerire a coloro che sono desiderosi di formarsi una corretta opinione su questo punto [1], di esaminare attraverso le regole della logica ordinaria il problema seguente, *prima* di cercare la sua soluzione; ricordando al tempo stesso che qualsiasi complessità esso possa avere, questa potrebbe essere moltiplicata all'infinito, con nessun altro effetto se non quello di rendere in questa maniera la soluzione più laboriosa, ma non certo meno raggiungibile con certezza.

(...) Supponiamo che l'osservazione di una classe di processi naturali abbia portato ai seguenti risultati.

Primo, che in qualsivoglia di questi processi in cui mancano A e C, si trova la proprietà E insieme con le proprietà B e D, ma non con entrambe.

Secondo, che laddove si trovano le proprietà A e D mentre è assente E, le proprietà B e C o sono contemporaneamente presenti, o contemporaneamente assenti.

Terzo, che laddove si trova la proprietà A in congiunzione o con B o con E, o con entrambe, si trova anche la proprietà C o la proprietà D, ma non entrambe contemporaneamente. E, viceversa, laddove si trovano singolarmente le proprietà C o D, si trova anche la proprietà A in congiunzione o con B o con E, o con entrambe.

Sia, quindi, richiesto di stabilire per prima cosa, cosa si può concludere in ogni caso particolare dalla riconosciuta presenza della proprietà A, rispetto alle proprietà B, C e D e se esiste una relazione indipendente tra le proprietà B, C e D. Quindi, cosa si può concludere allo stesso modo riguardo alla proprietà B e le proprietà A, C e D.

Va osservato che in ognuna delle tre ipotesi, l'informazione fornita rispetto alle proprietà A, B, C e D è complicata da un altro elemento E, del quale noi non vogliamo sapere niente nella conclusione. Verrà, perciò, richiesto di eliminare il simbolo rappresentante la proprietà E dal sistema di equazioni, attreverso cui le varie proposizioni sono espresse.

Rappresentiamo la proprietà A con x, B con y, C con z, D con w ed E con v. I dati sono:

$$\bar{x}\bar{z} = qv(y\bar{w} + w\bar{y}); \tag{1}$$

$$\bar{v}xw = q(yz + \bar{y}\bar{z}); \tag{2}$$

$$xy + xv\bar{y} = w\bar{z} + z\bar{w}; \tag{3}$$

---

[1] Cioè, che la potenza del calcolo possa essere pienamente dimostrata solo con la teoria matematica della probabilità.

$\bar{x}$ sta per $1 - x$, &c., e q è un simbolo di una classe indefinita. Eliminando q separatamente dalla prima e dalla seconda equazione e sommando i risultati con la terza equazione ridotta grazie a (5) del capitolo VIII. [2], otteniamo:

$$\begin{aligned} &\bar{x}\bar{z}(1 - vy\bar{w} - vw\bar{y}) + \bar{v}xw(y\bar{z} + z\bar{y}) + (xy + xv\bar{y})(wx + \bar{w}\bar{x}) \\ (4) \qquad &+ (w\bar{z} + z\bar{w})(1 - xy - xv\bar{y}) = 0. \end{aligned}$$

Da questa equazione v dev'essere eliminata e il valore di x determinato dal risultato. Per raggiungere questo scopo, sarà conveniente usare il metodo della Proposizione 3 del presente capitolo [3].

Sia il risultato dell'eliminazione rappresentato dall'equazione

$$Ex + E'(1 - x) = 0.$$

Per trovare E si ponga $x = 1$ nel primo membro di (4); troviamo

$$\bar{v}w(y\bar{z} + z\bar{y}) + (y + v\bar{y})(wz + \bar{w}\bar{z}) + (w\bar{z} + z\bar{w})\bar{v}\bar{y}.$$

Eliminando v, otteniamo

$$(wz + \bar{w}\bar{z})\{w(y\bar{z} + z\bar{y}) + y(wz + \bar{w}\bar{z}) + \bar{y}(w\bar{z} + z\bar{w})\};$$

che, con una moltiplicazione, in accordo con le condizioni $w\bar{w} = 0$, $z\bar{z} = 0, \&c.$, restituisce

$$E = wz + y\bar{w}\bar{z}.$$

Ora, per trovare E' si sostituisca $x = 0$ in (4); abbiamo

$$z(1 - vy\bar{w} - v\bar{y}w) + w\bar{z} + z\bar{w}.$$

da cui, eliminando v e riducendo il risultato grazie alle proposizioni 1 e 2 [4], troviamo

$$E' = w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z};$$

---

[2] 5. *Se* $V_1 = 0, V_2 = 0$, *&c. rappresentano un qualsiasi sistema di equazioni, i cui termini sono stati portati al primo membro per trasposizione, allora l'intepretazione composita del sistema sarà implicata nella singola equazione,* $V_1^2 + V_2^2 + \&c. = 0$, *formata sommando assieme i quadrati delle singole equazioni* [**Boo58**, p. 121].

[3] Proposizione 3: *Se t è un qualsiasi simbolo che rimane nel risultato finle dell'eliminazione di ogni altro simbolo da ogni sistema di equazioni, il risultato di tale eliminazione sarà espresso nella forma:* $Et + E'(1 - t) = 0$, *in cui E è formato ponendo nel sistema proposto* $t = 1$ *e eliminando gli stessi altri simboli; ed* E' *è formato, ponendo nel sistema proposto* $t = 0$ *e eliminando gli stessi altri simboli* [**Boo58**, p. 133].

[4] Proposizione 1: *Da qualsiasi equazione* $V = 0$ *in cui* V *consiste in una serie di termini di classe aventi coefficienti positivi, possiamo eliminare ogni termine che contenga un altro termine come fattore e sostituire ogni coefficiente positivo con l'unità [1]* [**Boo58**, p. 130]. Proposizione 2: *Tutte le volte che nel processo di eliminazione dobbiamo moltiplicare assieme due fattori, ognuno composto solo da termini positivi, soddisfacenti la legge fondamentale dei simboli logici, è permesso eliminare da entrambi i fattori ogni termine in comune, o da un fattore ogni termine che è divisibile da un termine nell'altro fattore; purché il fattore eliminato venga aggiunto al prodotto dei fattori risultanti* [**Boo58**, p. 131].

quindi, finalmente, otteniamo:

$$(wz + y\bar{w}\bar{z})x + (w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z})\bar{x} = 0; \tag{5}$$

da cui

$$x = \frac{w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z}}{w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z} - wz - y\bar{w}\bar{z}};$$

pertanto, sviluppando,

$$\begin{aligned} x &= 0yzw + yz\bar{w} + y\bar{z}w + 0y\bar{z}\bar{w} \\ &+ 0\bar{y}zw + \bar{y}z\bar{w} + \bar{y}\bar{z}w + \bar{y}\bar{z}\bar{w}; \end{aligned}$$

o, raccogliendo i termini in colonne verticali,

$$x = z\bar{w} + \bar{z}w + \bar{y}\bar{z}\bar{w}; \tag{6}$$

la cui interpretazione è -

In qualunque sostanza venga trovata la proprietà A, verrà trovata o la proprietà C o la proprietà D, ma non entrambe, oppure mancheranno tutte le proprietà B, C e D. E, al contrario, dove viene trovata o la singola proprietà C o la singola proprietà D, o mancano tutte le proprietà B, C e D, si troverà la proprietà A.

Così sembra che non vi sia nessuna relazione indipendente tra le proprietà B, C e D.

Adesso dobbiamo trovare y. Sviluppando (5) rispetto a questo simbolo,

$$(xwz + x\bar{w}\bar{z} + \bar{x}w\bar{z} + \bar{x}z\bar{w})y + (xwz + \bar{x}w\bar{z} + \bar{x}z\bar{w} + \bar{x}\bar{z}\bar{w})\bar{y} = 0;$$

da cui procediamo come prima:

$$y = \bar{x}\bar{w}\bar{z} + \frac{0}{0}(\bar{x}wz + xw\bar{z} + xz\bar{w}), \tag{7}$$

$$xzw = 0; \tag{8}$$

$$\bar{x}\bar{z}w = 0; \tag{9}$$

$$\bar{x}z\bar{w} = 0; \tag{10}$$

Da (10) ridotta con la soluzione alla forma

$$\bar{x}z = \frac{0}{0}w;$$

abbiamo ottenuto la relazione indipendente, - *Se la proprietà A è assente e C presente, D è presente.* Ancora, per addizione e soluzione (8) e (9) danno

$$xz + \bar{x}\bar{z} = \frac{0}{0}\bar{w}.$$

Da cui abbiamo per la soluzione generale e le relazione indipendente rimasta:

Primo. *Se la proprietà B è presente in uno dei due processi, o le proprietà A, C e D sono tutte assenti, o qualcuna di loro è assente.* E, viceversa, *se queste proprietà sono tutte assenti, si può concludere che A è presente (7).*

Secondo. *Se A e C sono o entrambe presenti o entrambe assenti, D sarà assente, indipendentemente dalla presenza o assenza di B* (8) e (9).

Non ho ancora tentato di verificare queste conclusioni.

Appendice F

⌈In quest'appendice Charles Sanders Peirce affronta il problema trattato da Schröder e posto da Boole. È interessante notare che, al contrario di Schröder che si sforza (e abbiamo visto il perché) di tradurre in termini equazionali il problema, Peirce fa l'opposto. Richiede che anche in presenza di equazioni, queste siano sostituite da opportune implicazioni o inclusioni. Il testo traduce [**HW60**, pp. 133–138] ed è tratto da *On the Algebra of Logic* [**Pei80**, pp. 15–57]. Per quanto riguarda i simboli usati nel testo, $\prec$ è la relazione di sussunzione impropria (o implicazione), il trattino sopra una lettera ($\bar{a}$) indica la sua negazione e ∞ corrisponde all'1 schröderiano.⌋

§2. La risoluzione dei problemi nella logica non-relativa

204. Quattro diversi metodi algebrici per risolvere i problemi in logica dei termini non-relativi sono già stati proposti da Boole, Jevons, Schröder e McColl. Io propongo qui un quinto metodo che, forse, è più semplice e certamente più naturale di ognuno degli altri. Esso richiede i processi seguenti:

205. *Primo processo*. Esprimere tutte le premesse con le copule $\prec$ e $\not\prec$, ricordando che $A = B$ è la stessa cosa di $A \prec B$ e $B \prec A$.

206. *Secondo processo*. Separare ogni predicato in tanti fattori quanto è possibile e ogni soggetto in tanti addendi quanto è posibile, senza aumentare il numero di lettere differenti in ogni soggetto o predicato.

207. Un'espressione può essere scissa in tali fattori o addendi (chiamiamoli fattori *primi* e *ultimi* addendi) con una o l'altra delle seguenti formule:

$$\phi x = (\phi\infty \times x) + (\phi 0 \times \bar{x})$$
$$\phi x = (\phi\infty + \bar{x}) \times (\phi 0 + x).$$

Ma il metodo più semplice è questo. Per separare un'espressione nei suoi ultimi addendi (fattori primi) si prenda ogni prodotto (somma) di tutte le lettere differenti dell'espressione, ognuna presa positivamente o negativamente (cioè, con un trattino orizzontale sopra). Utilizzando le formule fondamentali

$$X \times Y \prec Y \prec Y + Z$$

si esamini se il prodotto (somma) preso sia un soggetto (predicato) di ogni fattore (addendo) dell'espressione data. Se è così, è un ultimo addendo (fattore primo) di quell'espressione; altrimenti, no. Si proceda in questo modo fino a che si siano trovati tutti gli ultimi addendi (fattori primi) che l'espressione possiede. Questo numero si trova nel caso di un prodotto di somme (somma di prodotti) di lettere, come segue. Sia m il numero delle lettere *differenti* nell'espressione (non sono considerate differenti una lettera e la sua negazione); sia n il numero totale delle lettere, uguali o diverse, e sia p il numero dei fattori (addendi). Allora, il numero degli ultimi addendi (fattori primi) è:

$$2^m + n - mp - p.$$

208. Per esempio: sia richiesto di separare $x + (y \times z)$ nei suoi fattori primi. Qui, $m = 3, n = 3, p = 2$. Quindi, il numero dei fattori è tre $[2^3 + 3 - 3 \cdot 2 - 2 = 8 + 3 - 6 = 3]$. Provando con $x + y + z$, abbiamo

$$x \prec x + y + z \qquad y \times z \prec x + y + z,$$

così, questo è un fattore. Provando con $x + y + \bar{z}$, abbiamo

$$x \prec x + y + \bar{z} \qquad y \times z \prec x + y + \bar{z},$$

così, anche questo è un fattore. Ovviamente $x + \bar{y} + z$ è il terzo fattore. Quindi,

$$x + (y \times z) = (x + y + z) \times (x + y + \bar{z}) \times (x + \bar{y} + z).$$

Ancora, sviluppiamo l'espressione:

$$(\bar{a} + b + c) \times (a + \bar{b} + \bar{c}) \times (a + b + c).$$

Qui $m = 3, n = 9, p = 3$; così, il numero degli ultimi addendi è cinque $[2^3 + 9 - 3 \cdot 3 - 3 = 8 + 9 - 9 - 3 = 5]$. Degli otto possibili prodotti di tre lettere, quindi, solo tre vanno esclusi, cioè: $(a \times \bar{b} \times \bar{c}), (\bar{a} \times b \times c)$ e $(\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c})$. Abbiamo, allora:

$$(\bar{a} + b + c) \times (a + \bar{b} + \bar{c}) \times (a + b + c) =$$
$$(a \times b \times c) + (a \times b \times \bar{c}) + (a \times \bar{b} \times c) + (\bar{a} \times b \times \bar{c}) + (\bar{a} \times \bar{b} \times c).$$

209. *Terzo processo.* Si separino tutte le proposizioni complesse in più semplici, attraverso le formule seguenti dalle definizioni di $+$ e $\times$:

$$\begin{aligned}
(X + Y \prec Z) &= (X \prec Z) \times (Y \prec Z) \\
(X \prec Y \times Z) &= (X \prec Y) \times (X \prec Z) \\
(X + Y \not\prec Z) &= (X \not\prec Z) + (Y \not\prec Z) \\
(X \not\prec Y \times Z) &= (X \not\prec Y) + (X \not\prec Z).
\end{aligned}$$

⌈I membri sinistri di queste equzioni sono equivalenti ai seguenti: $\{(x + y) \prec z\}, \{x \prec (y \times z)\}, \{(x + y) \not\prec z\}$ e $\{x \not\prec (y \times z)\}$, rispettivamente. Lo scrive in una nota lo stesso Peirce.⌋

In pratica, le prime tre operazioni vengono generalmente eseguite in modo sbrigativo, scrivendo le premesse.

210. *Quarto processo.* Se abbiamo due proposizioni, una delle quali delle forma

$$a \prec b + x \qquad\qquad a \times \bar{x} \prec b,$$

e l'altra in una delle forme

$$c \prec d + \bar{x} \qquad\qquad c \times x \prec d,$$

possiamo, per la transitività della copula [$\prec$], eliminare x, ottenendo

$$a \times c \prec b + d.$$

211. *Quinto processo*. Possiamo trasporre qualsiasi termine dal soggetto al predicato o viceversa, cambiandolo da positivo a negativo o viceversa e allo stesso tempo [mutando anche] il suo modo di connessione da addizione a moltilpicazione o viceversa. Così,

$$(x \times y \prec z) = (x \prec \bar{y} + z).$$

In questo modo possiamo ottenere i soggetti ed i predicati di qualsiasi lettera; o possiamo portare tutte le lettere nel soggetto, lasciando il predicato 0, o tutte nel predicato, lasciando il soggetto ∞.

212. *Sesto processo*. Qualsiasi numero di proposizioni che hanno in comune un soggetto o un predicato, prese insieme, sono equivalenti al loro prodotto o alla loro somma [rispettivamente].

213. Come esempio di questo metodo, possiamo considerare un problema ben noto posto da Boole [**Boo58**, pp. 146–149]. I dati sono:

$$\begin{aligned}
&\bar{x} \times \bar{z} \prec v \times (y \times \bar{w} + \bar{y} \times w) \\
&\bar{v} \times x \times w \prec (y \times z) + (\bar{y} \times \bar{z}) \\
&(x \times y) + (v \times x \times \bar{y}) = (z \times \bar{w}) + (\bar{z} \times w).
\end{aligned}$$

Si richiede: primo, di trovare quei predicati di x che implicano solo y, z e w; secondo, di trovare ogni relazione che possa sussistere tra y, z, w; terzo, di trovare i predicati di y; quarto, di trovare ogni relazione che sussiste tra x, z e w. In virtù dei primi tre processi, eseguiti mentalmente, possiamo formulare le premesse come segue: la prima come

$$\begin{aligned}
&\bar{x} \times \bar{z} \prec v \\
&\bar{x} \times \bar{z} \prec y + w \\
&\bar{x} \times \bar{z} \prec \bar{y} + \bar{w};
\end{aligned}$$

la seconda come

$$\begin{aligned}
&\bar{v} \times x \times w \prec y + \bar{z} \\
&\bar{v} \times x \times w \prec \bar{y} + z;
\end{aligned}$$

la terza come

$$x \times y \prec z + w$$
$$x \times y \prec \bar{z} + \bar{w}$$
$$v \times x \times \bar{y} \prec z + w$$
$$v \times x \times \bar{y} \prec \bar{z} + \bar{w}$$
$$z \times \bar{w} \prec x$$
$$\bar{z} \times w \prec v + y$$
$$z \times \bar{w} \prec x$$
$$\bar{z} \times w \prec v + y.$$

Per prima cosa dobbiamo eliminare la v, della quale non vogliamo sapere niente [about which we want to know nothing]. Abbiamo, da una parte, le proposizioni

$$v \times x \times \bar{y} \prec z + w$$
$$v \times x \times \bar{y} \prec \bar{z} + \bar{w};$$

e, dall'altra parte, le proposizioni

$$\bar{x} \times \bar{z} \prec v$$
$$\bar{v} \times x \times w \prec y + \bar{z}$$
$$\bar{v} \times x \times w \prec \bar{y} + z$$
$$z \times \bar{w} \prec v + y$$
$$\bar{z} \times w \prec v + y.$$

Le conclusioni da queste proposizioni si ottengono prendendo una proposizione da ogni insieme [di proposizioni al quale appartengono], moltiplicando i soggetti, sommando i predicati e omettendo la v. Il risultato sarà una semplice proposizione vuota [empty] se la stessa lettera si trova nella stessa qualità (riguardo all'essere positivo o negativo) nel soggetto e nel predicato, o se si trova due volte con qualità opposte nel soggetto o nel predicato. Così, sarebbe inutile combinare la proposizione $v \times x \times \bar{y} \prec z + w$ con un'altra che contenga $\bar{x}, y, z$, o w nel soggetto. Ma tutte le proposizioni del secondo insieme si comportano in questo modo, cosicché non si può concludere niente da questa proposizione. Così, sarebbe inutile combinare $v \times x \times \bar{y} \prec \bar{z} + \bar{w}$ con una che contenga $\bar{x}, y, \bar{z}, \bar{w}$ nel soggetto , o z nel predicato. Questo esclude tutte le proposizioni del secondo insieme, eccetto $\bar{v} \times x \times w \prec y + \bar{z}$, che combinata con la proposizione che stiamo discutendo, dà

$$x \times w \prec y + \bar{z} + \bar{w}$$

o

$$x \times w \prec y + \bar{z},$$

che, quindi, va impiegata in luogo di tutte le premesse contenenti v.

Una delle altre proposizioni, ovvero, $\bar{x} \times \bar{z} \prec \bar{y} + \bar{w}$, è ovviamente contenuta in un'altra, cioè, in: $\bar{z} \times w \prec x$. Rigettandola, le nostre premesse si riducono a sei:

$$\bar{x} \times \bar{z} \prec y + w$$
$$x \times y \prec z + w$$
$$x \times y \prec \bar{z} + \bar{w}$$
$$z \times \bar{w} \prec x$$
$$\bar{z} \times w \prec x$$
$$x \times w \prec y + \bar{z}$$

La seconda, la terza e la sesta di queste forniscono il predicato di x. Il loro prodotto è

$$x \prec (\bar{y} + z + w) \times (\bar{y} + \bar{z} + \bar{w}) \times (y + \bar{z} + \bar{w})$$

oppure,

$$x \prec y \times z \times \bar{w} + y \times \bar{z} \times w + \bar{y} \times z \times \bar{w} + \bar{y} \times \bar{z} \times w + \bar{y} \times \bar{z} \times \bar{w}$$

o

$$x \prec z \times \bar{w} + \bar{z} \times w + \bar{y} \times \bar{z} \times \bar{w}.$$

Per verificare se una qualsiasi relazione tra y, z e w può essere ottenuta eliminando x, dobbiamo trovare i soggetti di x, combinando la prima, la quarta e la quinta premessa. Così, abbiamo

$$\bar{y} \times \bar{z} \times \bar{w} + z \times \bar{w} + \bar{z} \times w \prec x.$$

È ovvio che la conclusione da queste due ultime proposizioni è semplicemente una proposizione identica e, pertanto, non vi è alcuna relazione indipendente $\langle$implicata$\rangle$ tra x, y e w.

Per trovare i predicati di y, combiniamo la seconda e la terza proposizione. Questo ci dà

$$y \prec (\bar{x} + z + w) \times (\bar{x} + \bar{z} + \bar{w})$$

o

$$y \prec x \times z \times \bar{w} + x \times \bar{z} \times w + \bar{x}.$$

Due relazioni tra x, z e w sono fornite dalle premesse, cioè: $z \times \bar{w} \prec x$ e $\bar{z} \times w \prec x$. Per vedere se ce n'è un'altra implicata, eliminiamo y dall'ultima proposizione e dalla prima e sesta premessa. Questo dà

$$\bar{x} \times \bar{z} \prec x \times z \times \bar{w} + w + \bar{x}$$
$$x \times w \prec x \times z \times \bar{w} + \bar{x} + \bar{z}.$$

La prima conclusione è vuota. La seconda è equivalente a $x \times w \prec \bar{z}$, che è una terza relazione tra x, z e w.

Tutto ciò che è implicato dalle premesse in relazione a x, y, z, w si può riassumere nella proposizione [seguente]:

$$\infty \prec x + z \times w + y \times \bar{z} \times \bar{w}.$$

Appendice G

⌈Gottlob Frege - estratto da *La logica calcolistica di Boole e l'ideografia* del 1880/81 [**Fre83**, pp. 44–51]. In quanto segue mi sono permesso di sostituire agli originali simboli fregeani quelli in uso oggi, per facilitare la lettura. I riferimenti fregeani sono stati completati inserendo le formule citate.⌋

Poiché, quindi, i calcoli booleani non sono paragonabili con le derivazioni che io ho esposto nella [mia] *Scrittura concettuale*, non sarebbe fuori luogo proporre qui un esempio che possa servire da confronto. Non ci sarebbe da meravigliarsi e io potrei ammetterlo senza rammarico se la logica booleana per la soluzione di tali problemi, ai quali in particolare è destinata, o per la quale essi sono stati inventati, fosse più appropriata della mia *Begriffsschrift*. Purtroppo, questo non accade forse mai. D'altra parte, visto che queste domande per me sono di limitata importanza, mi voglio limitare a risolvere con la scrittura concetturale un [solo] problema trattato da Boole [1], quindi da Schröder [2] e da Wundt [3] e ad indicare molto brevemente la differenza dal modo [di procedere] di Boole [e il mio]:

Il problema, in base all'esposizione datane da Schröder, è il seguente: si supponga che l'osservazione di una classe di fenomeni (prodotti dalla natura o artificialmente; per esempio, sostanze) abbia condotto ai seguenti risultati generali.

$\boldsymbol{\alpha}$**.** Che, in tutti quei fenomeni in cui i segni caratteristici o le proprietà A e C sono assenti contemporaneamante, è presente il segno caratteristico E insieme con uno dei segni caratteristici B e D, ma non contemporaneamante.

$\boldsymbol{\beta}$**.** Che, dovunque i segni caratterestici A e D compaiono in assenza di E, i segni caratteristici B e C o sono presenti comtemporaneamente o sono assenti contemporaneamante.

$\boldsymbol{\gamma}$**.** Che, ovunque il segno caratteristico A compare con B o E, o con entrambi contemporaneamente, anche i segni caratteristici C e D sono presenti, ma non contemporaneamente. Viceversa, dovunque viene percepito uno senza l'altro dei segni caratteristici C o D, dev'essere presente anche il segno caratteristico A contemporaneamente in connessione con B o con E [4], o con entrambi [5].

Si dovrebbe ora trovare: 1) cosa si può dedurre, in ogni caso dalla presenza del segno caratteristico A in rapporto ai segni caratteristici B, C e D,
2) se sussite una qualche relazione indipendente dalla presenza o assenza dei restanti segni caratteristici tra la presenza o assenza [6] dei segni caratteristici B, C, D e [in caso affermativo] quale,
3) cosa segue dalla presenza del segno caratteristico B in rapporto ad A, C, D,

---

[1] [**Boo58**, p. 146 e segg.]. Nda.

[2] [**Sch66a**, p. 25 e segg.]. Nda.

[3] [**Wun80**, p. 356]. NdA.

[4] Frege corregge la svista di Schröder.

[5] Fin qui, Frege ha riportato alla lettera il testo di Schröder.

[6] Il testo è stato corretto seguendo [**Fre83**, p. 45].

4) cosa segue di per sé per A, C, D.

⟨Nella risoluzione mi servirò delle corrispondenti lettere maiuscole, in modo tale che, per esempio, A indica la circostanza in cui il segno caratteristico A si trova negli oggetti considerati [7].⟩
Innanzitutto, traduco i singoli dati.
$\boldsymbol{\alpha}$. La negazione di $\mathcal{A}$ e Γ deve avere come conseguenza l'affermazione di $\mathcal{E}$ (1).

$$(\neg\Gamma \to \neg\mathcal{A}) \to \mathcal{E} \tag{1}$$

La negazione di $\mathcal{A}$ e Γ deve avere come conseguenza l'affermazione di $\mathcal{B}$ o di Δ (2);

$$(\neg\Gamma \to \neg\mathcal{A}) \to (\neg\Delta \to \mathcal{B}) \tag{2}$$

ma $\mathcal{B}$ e Δ non possono trovarsi contemporaneamente, se $\mathcal{A}$ e Γ vengono negati (3).

$$(\neg\Gamma \to \neg\mathcal{A}) \to (\Delta \to \neg\mathcal{B}) \tag{3}$$

$\boldsymbol{\beta}$. Affermando $\mathcal{A}$ e Δ e negando $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ e Γ devono essere entrambi affermati o entrambi negati; cioè, quando $\mathcal{B}$ è affermato, anche Γ dev'essere affermato (4);

$$(\neg\mathcal{E} \to \mathcal{A} \to \Delta) \to (\mathcal{B} \to \Gamma)\ [8] \tag{4}$$

Ma se $\mathcal{B}$ viene negato, allora deve venir negato anche Γ (5).

$$(\neg\mathcal{E} \to \Delta \to \mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B} \to \neg\Gamma) \tag{5}$$

$\boldsymbol{\gamma}$. Anzitutto, questo va scomposto..
$\boldsymbol{\gamma_1}$. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ vengono affermati, anche Γ o Δ devono essere affermati (6), ma non entrambi (7).

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to (\neg\Delta \to \Gamma) \tag{6}$$

$$(\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to (\Delta \to \neg\Gamma) \tag{7}$$

$\boldsymbol{\gamma_2}$. Le stesse conseguenze devono aver luogo quando $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{E}$ vengono affermati [:] [9] (8) e (9).

$$(\mathcal{E} \to \mathcal{A}) \to (\neg\Delta \to \Gamma) \tag{8}$$

$$(\mathcal{E} \to \mathcal{A}) \to (\Delta \to \neg\Gamma) \tag{9}$$

---

[7] I curatori dell'edizione tedesca scrivono: *Qui si intende, come risulta dal seguito,* delle corrispondenti lettere greche maiuscole. *Le lettere greche vengono distinte con il corsivo da quelle latine. Il manoscritto non evidenzia questa differenza.* [**Fre83**, ivi]. Noi useremo nel caso di A, B, E un carattere diverso. Per cui se A denota un segno caratteristico, $\mathcal{A}$ denota la circostanza in cui è presente A.

[8] Nel testo della Picardi si trova per sbaglio Δ in lugo del corretto $\mathcal{A}$ [**Fre86**, p. 121].

[9] Le parentesi sono dei curatori.

γ_3. Se Γ è affermato e Δ negato, allora $\mathcal{A}$ deve essere affermato (10). Poiché Γ è già una condizione, allora evidentemente anche uno di loro deve essere affermato; quindi, Γ viene affermato comunque.

$$(\neg\Delta \to \Gamma) \to \mathcal{A} \tag{10}$$

γ_4. Se Γ è negato e Δ affermato, allora $\mathcal{A}$ deve essere affermato (11) e anche $\mathcal{B}$ o $\mathcal{E}$ [ma non entrambi] devono esserlo. Questo può essere solo $\mathcal{B}$ (12).

$$(\Delta \to \neg\Gamma) \to \mathcal{A} \tag{11}$$

$$(\Delta \to \neg\mathcal{E}) \to \mathcal{B} \tag{12}$$

Questi sono i dati. Alla prima domanda viene risposto in parte già con (6) e (7). I restanti dati non costituiscono alcuna risposta a questa domanda, poiché come (2) e (3) contengono la negazione di $\mathcal{A}$ invece della sua affermazione o come (10), (11) e (12) non contengono $\mathcal{A}$ come condizione, o poiché come (4), (5), (8), (9) oltre a $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \Gamma, \Delta$ contengono anche $\mathcal{E}$. Si tratta [allora] di vedere se $\mathcal{E}$ possa essere eliminato da qualcuno degli ultimi dati menzionati. Questo può accadere se $\mathcal{E}$ compare in un giudizio come in (1) come conseguente e in un altro, come in (9) come antecedente [Bedingung]. Si riscriva, quindi, (9) invariato fino alla condizione $\mathcal{E}$ e si rimpiazzi questa con entrambi gli antecedenti da cui $\mathcal{E}$ in (1) dipende [10]. Questo ci fornisce (13):

$$(\neg\Gamma \to \neg\mathcal{A}) \to (\mathcal{A} \to \Delta \to \neg\Gamma) \tag{13}$$

Questo giudizio è soddisfatto per due motivi indipendentemente dai significati che possono assumere $\mathcal{A}, \Gamma$ e Δ, primo perché come condizione di $\neg\Gamma$ compare proprio $\neg\Gamma$, secondo perché tra le condizioni occorrono [due premesse contraddittorie tra loro] $\mathcal{A}$ e $\neg\mathcal{A}$. Come conseguenza di due antecedenti contraddittori tra loro si può porre senza fallo un contenuto giudicabile a piacere [beliebige beurteilbare] [11]. Pertanto, (13) non ci dà nessun ragguaglio circa il contenuto di $\mathcal{A}, \Gamma$ e Δ. In maniera simile come con (1) e (9) si può procedere con (1) e (8). Un semplice sguardo alla formula ci convice che anche qui non si può ottenere nessuna elucidazione riguardo al suo contenuto, dato che tra le condizioni del risultato di nuovo occorrerebbero le due [precedenti] premesse contraddittorie $\mathcal{A}$ e $\neg\mathcal{A}$. $\mathcal{E}$ non può essere eliminato da due giudizi, in cui come in (8) e (9) compare per due volte come una premessa affermata, ma lo può quando in uno dei due giudizi compare come una premessa affermata e nell'altro come una negata, come in (8) e (4). Si può, infatti, trasformare un giudizio con un condizionale negato, rendendo ciò che era una premessa negata una conseguenza affermata e ciò che era una premessa

---

[10] Per transitività, si ragiona nel modo seguente: da $(\neg\Gamma \to \neg\mathcal{A}) \to \mathcal{E}$ (1) e $\mathcal{E} \to (\mathcal{A} \to \Delta \to \Gamma)$ (9), risulta $(\neg\Gamma \to \neg\mathcal{A}) \to (\mathcal{A} \to \Delta \to \Gamma)$ (13).

[11] [**Fre79**, S. 45, formula 36]. NdA. Ovvero, $a \to (\neg a \to b)$.

una condizione negata [12]. Così le formule (4) e (5) si trasformano in (14) e (15):

(14) $$(\Delta \to \mathcal{A}) \to (\mathcal{B} \to \neg\Gamma \to \mathcal{E})$$

(15) $$(\Delta \to \mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B} \to \Gamma \to \mathcal{E})$$

Ognuno di questi due giudizi può essere combinato con ognuno dei giudizi (8) e (9) portando all'eliminazione di $\mathcal{E}$. Attraverso una semplice occhiata alle formule ci si convince facilmente che i risultati ottenibili da (8) e (14), (8) e (15), (9) e (14), soddisfatti come sopra indipendentemente dai contenuti, non contengono nessuna informazione [valida]. Invece, da (9) e (15) otteniamo la formula [seguente] ⟨a lato⟩.

$$\Delta \to \mathcal{A} \to \neg\mathcal{B} \to \Gamma \to \mathcal{A} \to \Delta \to \neg\Gamma$$

Qui, le premesse $\mathcal{A}$ e Δ che occorrono due volte possono essere fuse insieme [vereingt werden] [13].

$$\neg\mathcal{B} \to \Gamma \to \mathcal{A} \to \Delta \to \neg\Gamma$$

Anche entrambi i Γ possono essere contratti in uno [in eins zusammengezogen werden], trasformando $\mathcal{B}$ come conseguenza e Γ come premessa e eliminando uno dei Γ (16).

$$\Gamma \to \mathcal{A} \to \Delta \to \Gamma \to \mathcal{B}$$

(16) $$(\mathcal{A} \to \Delta) \to (\Gamma \to \mathcal{B}).$$

Questa è la terza risposta alla prima domanda e nei giudizi (6), (7) e (16) è contenuto tutto ciò che si può dedurre dai dati in rapporto alla prima domanda. Al massimo, è possibile solo una [mera] trasformazione nella forma, eliminando ancora una lettera, diciamo $\mathcal{B}$. (6) e (16) non forniscono alcun risultato utile. Da (7) e (16) si ottiene la formula [seguente] ⟨a fianco⟩, che semplificata come [abbiamo fatto] in precedenza fornisce (17).

$$\mathcal{A} \to \Delta \to \Gamma \to \mathcal{A} \to \Delta \to \neg\Gamma$$

(17) $$\mathcal{A} \to (\Delta \to \neg\Gamma).$$

[(17)] ci dice che in presenza del segno caratteristico A, i segni caratteristici C e D si escludono a vicenda. (6) indica, quindi, che uno dei segni caratteristici C e D è presente, se oltre al segno caratteristico A compare anche B.

Passo, ora, alla seconda domanda. Per decidere se sussistono delle relazioni tra $\mathcal{B}, \Gamma, \Delta$ indipendentemente da $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{E}$, quest'ultimo deve essere eliminato dai dati e si tratta di vedere se i risultati così ottenuti contengano qualcosa che non sia un'ovvietà logica [logisch Selbstverständliches]. Invece dei dati contenenti $\mathcal{E}$, potremmo usare subito [la formula] (16) appena trovata. In base a ciò, dobbiamo

[12] [**Fre79**, SS. 44 e segg., formule 33 e 34]. NdA. Ovvero, $(\neg b \to a) \to (\neg a \to b)$ e $(c \to (\neg b \to a)) \to (c \to (\neg a \to b))$, rispettivamente.

[13] La Picardi, traduce con *possiamo riunire le condizioni* $\mathcal{A}$ *e* Δ *che occorrono due volte* [**Fre86**, p. 124]. $\mathcal{A}$ e Δ non vanno semplicemente unite, ma vanno fuse insieme per idempotenza.

eliminare $\mathcal{A}$ da (2), (3), (6), (7), (10), (11) e (16). Prima di tutto, portiamo (2) e (3) nelle forme (18) e (19).

(18) $$(\neg\Gamma \to \neg\Delta) \to (\neg\mathcal{B} \to \mathcal{A})$$

(19) $$(\Delta \to \neg\Gamma) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$$

Adesso, si possono combinare

(6) con (10), o (7) con (10), o (16) con (10), o
(6) con (11), o (7) con (11), o (16) con (11), o
(6) con (17), o (7) con (17), o (16) con (17), o
(6) con (18), o (7) con (18), o (16) con (18),

queste coppie tutte insieme, come ci insegna uno sguardo alle formule, forniscono dei risultati soddisfatti indipendentemente dal contenuto. Bisogna, perciò, dare una risposta negativa alla seconda domanda.

La risposta alla terza domanda è contenuta nelle formule (6), (7) e (19). Da (7) e (19) si desume che quando compare oltre a B anche il segno caratteristico D, uno dei segni caratteristici A e C deve essere presente, ma non entrambi.

La risposta alla quarta domanda richiede l'eliminazione di B da (2), (3), (6), (7) e (16). Invece di (3), prendiamo (19). Delle possibili connessioni

(2) con (6), (13) con (6),
(2) con (7), (13) con (7),
(2) con (19), (13) con (19)

bisogna utilizzare solo la penultima, già [del resto] utilizzata per formare (17). La risposta alla quarta domanda è, quindi, che i segni caratteristici A, C e D non possono essere presenti contemporaneamente e che, come (10) e (11) insegnano, l'assenza di uno dei segni caratteristici C e D senza l'altro ha per conseguenza l'assenza di A.

Questa soluzione non richiede quasi nessun prerequisito teoretico. Tutto ciò che occorreva all'algoritmo l'ho introdotto quando serviva [nebenbei], donde è sorta forse l'apparenza di un'eccessiva lunghezza. Perciò, voglio raccogliere in sintesi i dati e il calcolo in maniera perspicua [vedi la Tabella 1].

$\langle$Qui,$\rangle$ il segno $\Rightarrow$ posto tra due formule indica il passaggio che abbiamo discusso dettagliatamente in precedenza [14]. Il segno $\therefore$ che sta fra (5) e (16)', così come tra (16)' e (17), rimanda ad una regola che abbrevia il lungo cammino intrappreso sopra [den oben eingeschlagenen weitern Weg]. Essa suona:

Quando due giudizi (per esempio, (5) e (9)) coincidono nella conseguenza ($\neg\Gamma$) e contengono come premessa uno di due contenuti contraddittori ($\mathcal{E}$ e $\neg\mathcal{E}$), si può formare un nuovo giudizio ((16)'), assegnando alla conseguenza comune

[14] I curatori dell'edizione tedesca notano che si tratta della contrapposizione.

Dati

(1)	$\boldsymbol{\alpha}$.	$(\neg\Gamma \to \neg\mathcal{A}) \to \mathcal{E}$
(2)		$(\neg\Gamma \to \neg\mathcal{A}) \to (\neg\Delta \to \mathcal{B})$
(3)		$(\neg\Gamma \to \neg\mathcal{A}) \to (\Delta \to \neg\mathcal{B})$
(4)	$\boldsymbol{\beta}$.	$(\neg\mathcal{E} \to \Delta \to \mathcal{A}) \to (\mathcal{B} \to \Gamma)$
(5)		$(\neg\mathcal{E} \to \Delta \to \mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B} \to \neg\Gamma)$
(6)	$\boldsymbol{\gamma_1}$.	$(\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to (\neg\Delta \to \Gamma)$
(7)		$(\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \to (\Delta \to \neg\Gamma)$
(8)	$\boldsymbol{\gamma_2}$.	$(\mathcal{E} \to \mathcal{A}) \to (\neg\Delta \to \Gamma)$
(9)		$(\mathcal{E} \to \mathcal{A}) \to (\Delta \to \neg\Gamma)$
(10)	$\boldsymbol{\gamma_3}$.	$(\neg\Delta \to \Gamma) \to \mathcal{A}$
(11)	$\boldsymbol{\gamma_4}$.	$(\Delta \to \neg\Gamma) \to \mathcal{A}$
(12)		$(\Delta \to \neg\mathcal{E}) \to \mathcal{B}$

Calcolo

4. $(\neg\mathcal{E} \to \Delta \to \mathcal{A}) \to (\mathcal{B} \to \Gamma)$

$$\Rightarrow (\Delta \to \mathcal{A}) \to (\mathcal{B} \to \neg\Gamma \to \mathcal{E}) \quad (14)$$

[5]. $(\neg\mathcal{E} \to \Delta \to \mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B} \to \neg\Gamma)$

$$\therefore^{(9)} (\Delta \to \mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B} \to \neg\Gamma) \quad (16)'$$

$$\therefore^{(9)} \mathcal{A} \to (\Delta \to \neg\Gamma) \quad (17)$$

3. $(\neg\Gamma \to \neg\mathcal{A}) \to (\Delta \to \neg\mathcal{B})$

$$\Rightarrow (\neg\Gamma \to \Delta) \to (\mathcal{B} \to \mathcal{A}) \quad (19)$$

TABELLA 1

$(\neg\Gamma)$ gli antecedenti dei giudizi primitivi ((5) e (9)), escludendo quei [contenuti] contraddittori tra loro ($\mathcal{E}$ e $\neg\mathcal{E}$) e scrivendo una volta sola le premesse comuni ($\mathcal{A}$ e Δ) a entrambi i giudizi [15].

---

[15] Ovvero, da (5) $(\neg\mathcal{E} \to \Delta \to \mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B} \to \neg\Gamma)$ e (9) $(\mathcal{E} \to \mathcal{A}) \to (\Delta \to \neg\Gamma)$ si ottiene $(\mathcal{E} \to \neg\mathcal{E}) \to (\Delta \to \mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B} \to \neg\Gamma)$. Cancellando $\mathcal{E} \to \neg\mathcal{E}$, abbiamo $(\Delta \to \mathcal{A}) \to (\neg\mathcal{B} \to \neg\Gamma)$, cioè (16)'.

La risposta alla prima domanda è così contenuta in (16) e (17); quella alla terza domanda in (6), (7) & (19); quella alla quarta in (10), (11) & (17);
alla seconda domanda bisogna rispondere in maniera negativa.

Mentre nel caso di Boole prevale la riunione di giudizi diversi in un'[unica] espressione generale, io scompongo i dati in giudizi [più] semplici, che in parte sono già delle risposte alle domande. A questo scopo, fra i giudizi semplici [così ottenuti] scelgo quelli che sono più appropriati in vista delle necessarie eliminazioni, ottenendo ulteriori risposte che contengono anche [e non solo] quello che veniva richiesto.

Con ciò, credo di aver indicato che se realmente nella scienza simili problemi dovessero richiedere una soluzione, la scrittura concettuale potrebbe dominarli [bewältigen] senza difficoltà. Si vede anche, però, che la sua vera forza, che si fonda nell'indicazione della generalità, nel concetto di funzione, nella possibilità di porre in luogo di espressioni complicate semplici lettere, non risulta affatto vantaggiosa in questo contesto.

Si potrebbe ancora aggiungere un'osservazione riguardo all'aspetto esteriore della mia scrittura concettuale.

Schröder mi rimprovera che io, discostandomi dalla consuetudine, preferisca una scrittura dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra. In verità, io sono in perfetto accordo [im Einklänge] con la prassi; anche in una deduzione aritmetica si lasciano susseguire le singole equazioni dall'alto verso il basso. Ogni identità è, però, un contenuto giudicabile [beurteilbare] o un giudizio, come lo sono una disequazione o una congruenza, ecc. Ciò che io pongo, uno sotto l'altro, sono contenuti giudicabili o giudizi. L'apperenza di inusualità sorge quando si indicano i contenuti giudicabili semplici attraverso singole lettere. Nel momento che [questi] vengono scritti dettagliatamente, cosa che accade quasi sempre nelle applicazioni [concrete], ognuno di essi si estende da sinistra verso destra su un'unica riga e si susseguono uno all'altro dall'alto verso il basso. In questo modo si sfrutta il vantaggio che ha un linguaggio formale [Formelsprache] che si estenda in entrambe le dimensioni della pagina rispetto al linguaggio naturale [Wortsprache] che si può distendere solo lungo la linea temporale. Boole non ha bisogno per ogni contenuto giudicabile semplice di prendere in considerazione [tutta] una riga, poiché egli non pensò a rappresentare un giudizio con qualcosa di più esteso di una singola lettera [16]. Come conseguenza di tutto ciò, sorgerebbe un'estrema mancanza di chiarezza, se si volesse in un secondo tempo introdurre per ogni singola lettera una formula completa.

[16] Frege sta rimproverando a Boole di non aver scomposto i giudizi nei suoi componenti ultimi. Per cui, una lettera è sufficiente per rappresentare un enunciato.

Serie di Taylor e sviluppo booleano

Vorrei chiudere questo *picciol libro* ritornando per un attimo sul rapporto tra la serie di Talylor (o di MacLaurin) e lo sviluppo booleano di una funzione. I testi di riferimento, sono ovviamente i seguenti: [**TayXV**, p. 23, secondo corollario], [**Mac42**, pp. 610–611, numero 751], [**dL81**, pp. 69–85, in particolare p. 83], [**dL67**, pp. 13–19],[**Boo58**, pp. 72–73], [**Boo47**, pp. 60–61], [**Boo72**, pp. 10–11 e segg.; in particolare p. 23], [**Sch66b**, pp. 411–412], [**Boo93**, p. 36 e segg.], [**Gen84**, pp. xvii–xix], [**Pea93**, pp. 66–91], [**Gil01**, p. 183 e segg.] e, ovviamente, [**Wüs09a**, p. 213 e segg.]. Contrariamente a quanto afferma il Mugnai, io ritengo che il rimando booleano-schröderiano alla serie di Taylor sia completamente fuori luogo. Innanzitutto, non tutte le funzioni ammettono un'approssimazione in termini di serie di Taylor. Una funzione deve essere di classe C^∞ [1], a cui non appartiene *qualsiasi* funzione, per esempio, una a scale. Ad ogni modo, ignoriamo questo fatto. Ammettiamo che ci sia un analogo nell'algebra della logica della differenziabilità.

Come appena osservato, la serie di Taylor è un'approssimazione lineare di una funzione infinitamente differenziabile. Il resto di Lagrange, da noi messo in evidenza, o il resto di Peano servono proprio a misurare lo scarto tra questa approssimazione e la funzione originaria. Ora, sia data una funzione $f \in C^\infty$ e scriviamo per essa il suo sviluppo tayloriano, ignorando, per il momento l'eventuale resto [2]:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{g^j(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \tag{1}$$

Questo è Taylor. Adesso, puntiamo la funzione g nel punto 0 e non più su un intorno. Sia, cioè, $x_0 = 0$; l'espressione precedente, diventa, allora

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{g^j(0)}{j!}(x - 0)^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{g^j(0)}{j!} \cdot x^j \tag{2}$$

---

[1] Vedi per esempio [**Pea93**, p. 79].

[2] Introduco la funzione g per chiarire che la derivata di una funzione f è una funzione diversa, costituendo solo la maggior approssimazione lineare alla f. Ovviamente, $f = g^0$; cioè la primitiva f coincide con la sua 0-esima derivata. Per cui alla fine potremo porre senza problemi: $f = g$, dando per scontata la presenza in apice dello 0.

La precedente è la serie di MacLaurin, ovvero, un caso particolare della serie tayloriana quando si fissa il centro in 0. Possiamo riscrivere la (2) nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{g^0(0)}{0!}\cdot x^0 + \sum_{j=1}^{n}\frac{g^j(0)}{j!}\cdot x^j = \frac{g(0)}{1}\cdot 1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{g^j(0)}{j!}\cdot x^j \\
&= g(0) + \sum_{j=1}^{n}\frac{g^j(0)}{j!}\cdot x^j
\end{aligned} \tag{3}
$$

Chiaramente, nell'espressione precedente g^0 è un modo diverso di dire che non stiamo parlando di derivata ma di una funzione e basta. Ora sostituiamo in (3) x con 1:

$$f(1) = g(0) + \sum_{j=1}^{n}\frac{g^j(0)}{j!}\cdot 1^j \tag{4}$$

Spostiamo il primo addendo a destra, a sinistra del simbolo di $=$:

$$f(1) - g(0) = \sum_{j=1}^{n}\frac{g^j(0)}{j!} \tag{5}$$

Con ciò abbiamo trovato il valore della sommatoria. La (3) può essere *riformulata* come segue:

$$f(x) = g(0) + \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{g^j(0)}{j!})\right)\cdot x^j \tag{6}$$

Sfruttando l'idempotenza [3], $x^j = x$:

$$f(x) = g(0) + \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{g^j(0)}{j!})\right)\cdot x \tag{7}$$

Nella precedente, sostituiamo il valore della sommatoria che abbiamo trovato in (5), mettendolo tra parentesi graffe, quindi computiamo il tutto usando la distributività:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(0) + \{f(1) - g(0)\}x \\
&= g(0) + f(1)x - g(0)x
\end{aligned}
$$

Raccogliamo, rispetto alla $g(0)$:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = g(0)(1-x) + f(1)x \\
&\text{con } g = f, \\
&f(0)(1-x) + f(1)x
\end{aligned} \tag{8}
$$

[3] Siamo in logica o in matematica?

Con ciò, abbiamo ottenuto lo sviluppo di Boole. Ma attenzione! Si faccia caso al ruolo giocato dall'espressione moltiplicata per x^j nella (6): nessuno. Qualsiasi cosa al suo posto sarebbe andata bene. Infatti, proviamo a tenere conto del resto, ignorando se la nostra mossa sia sensata; anzi, se non lo è, tanto meglio.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{g^j(0)}{j!} x^j + \frac{g^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} x^{n+1} \\
&\text{per } x = 1 \\
f(1) &= g(0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{g^j(0)}{j!} \cdot 1 + \frac{g^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \cdot 1 \\
f(1) - g(0) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{g^j(0)}{j!} + \frac{g^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \\
f(x) &= g(0) + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{g^j(0)}{j!} + \frac{g^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \right) \cdot x \\
f(x) &= g(0) + \{f(1) - g(0)\}x \\
&= g(0) + f(1)x - g(0)x \\
&= g(0)(1-x) + f(1)x \qquad (9)
\end{aligned}$$

Con $f = g$:

$$f(x) = f(0)(1-x) + f(1)x \qquad (10)$$

Cosa si impara da tutto ciò? Che l'unica cosa veramente importante è che a destra del simbolo di uguaglianza ci sia la somma di due *cose* diverse, una delle quali moltiplicata per x. Questo è sufficiente per ottenere lo sviluppo booleano. Detto meglio, è sufficiente riscrivere la f in termini di due altre funzioni *qualsiasi*, completamente arbitrarie, g ed h, una delle quali moltiplicata per x. Lo vediamo subito:

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(y) + h(z)x \\
x &= 1 \\
f(1) &= g(y) + h(z) \\
f(1) - g(y) &= h(z) \\
f(x) &= g(y) + \{f(1) - g(y)\}x \\
f(x) &= g(y) + f(1)x - g(y)x \\
&= g(y)(1-x) + f(1)x \\
y &= 0 \qquad g = f \\
f(x) &= f(0)(1-x) + f(1)x \qquad (11)
\end{aligned}$$

Vorrei far notare che nel discorso precedente non si è fatto uso, né della differenziabilità, né del concetto di potenze crescenti progressive, né dell'impotenza, o quant'altro. Anzi, sostituendo alle funzioni dei simboli di classe nell'ultima equazione si ottiene:

$$b = ax_1 + cx \tag{12}$$

Questo è il teorema 14 di Schröder: ogni classe si può rappresentare in funzione di due classi qualsiasi complementari tra loro. Non a caso, nel testo, l'autore tedesco afferma di aver generalizzato con il teorema 14 lo sviluppo booleano:

> Es erübrigt mir noch die Bemerkung, dass das Theorem 14 $D, E, F, \ldots$ Boole's (...) merkwürdigerweise auch für die mittelst unserer volldeutigen inversen Operationen gebildeten Elementarausdrücke richtig bleibt - jedoch in einem wesentlich von der Aufassung Boole's abweichenden Sinne, und über dies mit dem modificirenden Zusatze, *dass diejenigen Constituenten, deren Coefficienten undeutig ausfallen, für sich gleich* 0 *gesetzt werden müssen* und so die Valenzbedingung zusammen liefern [Seite 37 del presente volume].

Quindi, Schröder in qualche modo deve aver intuito che dietro lo sviluppo di una funzione ci doveva essere qualcosa di diverso dal calcolo differenziale, eppure, ne parla ancora come di un *analogo del teorema di Taylor* [Analogon des Taylor'schen Satzes]. Nel primo volume delle *Lezioni* [**Sch66b**] riporterà addirittura, pressochè alla lettera quanto scritto da Boole in [**Boo58**]. Ennesima contraddizione schröderiana.

L'*assurdità* di quanto afferma Boole consiste nel fatto che si parte dalla matematica (dove *esiste* il concetto di differenziabilità), si passa in un *limbo* in cui valgono in parte anche le leggi logiche e si finisce nel calcolo logico. Ho parlato di 'limbo', in quanto si sfrutta da un lato la logica con l'idempotenza [$x = x^j$] e dall'altro la matematica con il fattoriale (non traducibile in una logica con solo 0 ed 1).

Ad ogni modo, vorrei concludere riassumendo il mio breve ragionamento. Nessuno nega che lo sviluppo tayloriano possa essere nato dalla riflessione che certe funzioni ammettono di essere espresse come sommatorie di potenze crescenti, sostituendo al concetto di *potenza*, quello di *derivazione* [4], tuttavia è fuori luogo affermare che lo sviluppo booleano nasca dal confronto con questo tipo di serie. Anzi, il concetto di serie è totalmente irrilevante per lo sviluppo booleano. Il che, d'altra parte, non nega che George Boole possa essere stato *ispirato* dal suo lavoro

[4] Per esempio: *(...) on peut (...) développer une fonction quelconque suivant les puissances ascendantes d'une variables contenues dans la fonction* [**dL81**, p. 69] [(...) si può sviluppare una qualsiasi funzione in termini delle potenze crescenti di una variabile contenuta nella funzione stessa].

nel calcolo differenziale. Quindi, sbaglia il Mugnai a vedere anche solo un'analogia tra lo sviluppo di Taylor e quello di Boole. Sono due processi totalmente irrelati. La connessione c'è con il teorema 14 di Schröder; connessione che Schröder vide [5] ma a cui non diede peso.

5 Vedi sopra la recensione di Adamson.

Elenco dei risultati principali

Penso non sia inutile raccogliere tutti i risultati del testo con le relative numerazioni ed escludendo i duali sfruttando una simbologia moderna. Metterò tra parentesi quadra il numero originale di Schröder quando esso si discosti dal mio. I numeri in grassetto che seguono gli enunciati si riferiscono al numero di pagina dove vengono presentati. Ci si riferisce sempre all'originale tedesco. I primi tre enunciati non hanno un preciso status ontologico per Schröder; io li considero come *postulati*, cioè come quelle considerazioni basilari che precedono qualsiasi lavoro. In questo senso dò loro un ruolo più fondamentale che agli assiomi. Aggiungo in fondo gli enunciati della sezione sesta, dedicata alle operazioni inverse. In questo caso, darò la precedenza ai duali, seguendo l'autore.

$P1.$ $A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$, **28** [I.]

$P2.$ $A = A$, **28** [II.]

$P3.$ $((A = C) \wedge (B = C)) \rightarrow (A = B)$, **28** [III.]

$A1.$ $A \cap B \leftrightarrow \forall x(x \in A \wedge x \in B)$, **30**

$A2.$ $A \cap B = B \cap A$, **30**

$A3.$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$, **30**

$A4.$ $(A = B) \rightarrow ((A \cap C) = (B \cap C))$, **31**

$A5.$ $A \cap A = A$, **31**

$A6.$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, **32**

$A7.$ $A \cap -A = \emptyset$, **33**

$A8.$ $A \cap V = A$, **33** [9]

$T1.\quad \emptyset \cap A = \emptyset,\quad$ **33** [8]

$T2.\quad A \cup (A \cap B) = A,\quad$ **35** [10]

$T3.\quad (A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C) \to A = B,\quad$ **36** [11]

$T4.\quad ((A \cap -A = 0) \wedge (A \cup -A = V)) \wedge ((A \cap -B = 0)$
$\wedge (A \cup -B = V)) \to (-A = -B),\quad$ **36** [12]

$T5.\quad -(-A) = A,\quad$ **37** [13]

$T6.\quad B = (X \cap A) \cup (Y \cap -A),\quad$ **37** [14] $(A.)$

$T7.\quad \{(P \cap A \cap B) \cup (Q \cap A \cap -B) \cup (R \cap -A \cap B) \cup (S \cap -A \cap -B)\}$
$\cap \{(P' \cap A \cap B) \cup (Q' \cap A \cap -B) \cup (R' \cap -A \cap B) \cup (S' \cap -A \cap -B)\}$
$= \{(P \cap P') \cap (A \cap B)\} \cup \{(Q \cap Q') \cap (A \cap -B)\}$
$\cup \{(R \cap R') \cap (-A \cap B)\} \cup \{(S \cap S') \cap (-A \cap -B)\},\quad$ **40** [15]

$T8.\quad ((A \cup B) = \emptyset) \to (A = \emptyset \wedge B = \emptyset),\quad$ **40** [16]

$T9.\quad (A = B) \equiv \{(A \cap -B) \cup (-A \cap B) = \emptyset\},\quad$ **41** [17]

$T10.\quad -(A \cap B) = -A \cup -B,\quad$ **42** [18]

$T11.\quad f = (P \cap (A \cap B)) \cup (Q \cap (A \cap -B))$
$\cup (R \cap (-A \cap B)) \cup (S \cap (-A \cap -B)) \to$
$-f = (-P \cap (A \cap B)) \cup (-Q \cap (A \cap -B))$
$\cup (-R \cap (-A \cap B)) \cup (-S \cap (-A \cap -B)),\quad$ **43** [19]

$T12.\quad (X \cap A) \cup (Y \cap -A) = \emptyset$
$\leftrightarrow (X \cap Y = \emptyset) \wedge (A = (U \cap -X) \cup Y),\quad$ **45** [20]

$T13.\quad (A \cap B) = \emptyset \to (A \cup B = B),\quad$ **49** [21]

$L1.\quad A \cap B = \emptyset \to A = (U \cap -B),\quad$ **46**

$A.\quad B = (X \cap A) \cup (Y \cap -A)$

$B.\quad B = (B \cap A) \cup (B \cap -A),\quad$ **38**

$C.\quad B = ((A \cap B) \cup (U \cap -A)) \cap A$
$\cup ((-A \cap B) \cup (W \cap A)) \cap -A,\quad$ **38**

$D.\quad f(A) = (f(V) \cap A) \cup (f(\emptyset) \cap -A),\quad$ **39**

$E.\quad f(A,B) = (f(V,V) \cap (A \cap B)) \cup (f(V,\emptyset) \cap (A \cap -B)$
$\cup (f(\emptyset,V) \cap (-A \cap B)) \cup (f(\emptyset,\emptyset) \cap (-A \cap -B)),\quad$ **39**

$$
\begin{aligned}
F. \quad f(A,B,C) = {} & (f(V,V,V) \cap (A \cap B \cap C)) \\
& \cup (f(V,V,\emptyset) \cap (A \cap B \cap -C)) \\
& \cup (f(V,\emptyset,V) \cap (A \cap -B \cap C)) \\
& \cup (f(V,\emptyset,\emptyset) \cap (A \cap -B \cap -C)) \\
& \cup (f(\emptyset,V,V) \cap (-A \cap B \cap C)) \\
& \cup (f(\emptyset,V,\emptyset) \cap (-A \cap B \cap -C)) \\
& \cup (f(\emptyset,\emptyset,V) \cap (-A \cap -B \cap C)) \\
& \cup (f(\emptyset,\emptyset,\emptyset) \cap (-A \cap -B \cap -C)), \quad \mathbf{39}
\end{aligned}
$$

$G.$ In uno sviluppo $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{f(\overbrace{\pm\emptyset_i, \pm\emptyset_i, \pm\emptyset_i \ldots, \pm\emptyset_i}^{n-\text{volte}})$

$\cap\, \alpha_i(\pm a_1 \cap \pm a_2 \cap \pm a_3 \cap \ldots \cap \pm a_n)\}$

gli α_i sono detti *coefficienti* e sono tali che $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \alpha_i = V$, **39**

$H.$ $A \cup B = (A \cap (B \cup -B)) \cup (B \cap (A \cup -A))$, **42**

$K.$ $A \ominus B = (A \cap -B) \cup (B \cap -A)$, **43**

$E1.$ $C \cup B = A$, **58** [22d]

$E2.$ $C = A - B$, **58** [23d]

$E3.$ $-A \cap B = \emptyset$, **59** [24d]

$E4.$ $A - B = (A \cap -B) \cup (U \cap A \cap B)$, **59** [25d]

$E5.$ $A - A = (U \cap A) \wedge A - \emptyset = A$, **60** [26d]

$E6.$ $\emptyset - \emptyset = \emptyset \wedge V - \emptyset = V$, **60** [27d]

$E7.$ $V - V = U$, **60** [28d]

$E8.$ $(U = V) \rightarrow (A - B) = A$, **60** [29d]

$E9.$ $(U = \emptyset) \rightarrow (A - B) = (A \cap -B)$, **60** [30d]

$E10.$ $V - B = -B$, **61** [31d]

$E11.$ $V - A = \dfrac{\emptyset}{A}$, **61** [32]

$E12.$ $A \cap (V - A) = \emptyset$, **61** [33]

$E13.\quad A \cap \dfrac{\emptyset}{A} = \emptyset, \quad \mathbf{61} \qquad [34]$

$E14.\quad \emptyset \div \dfrac{\emptyset}{A} = A, \quad \mathbf{61} \qquad [35]$

$E15.\quad (C \cup B = A) \wedge (C \cap B = \emptyset), \quad \mathbf{61} \qquad [36d]$

$E16.\quad C = A - B \qquad [= A \cap (V - B)], \quad \mathbf{62} \qquad [37d]$

$E17.\quad (A - \emptyset = A) \wedge (A - A) = \emptyset, \quad \mathbf{62} \qquad [38d]$

$E18.\quad A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C), \quad \mathbf{63} \qquad [39d]$

$E19.\quad A - B = \{(V - V) \cap (A \cap B)\} \cup \{(V - \emptyset) \cap (A \cap -B)\}$
$\cup \{(\emptyset - V) \cap (-A \cap B)\} \cup \{(\emptyset - \emptyset) \cap (-A \cap -B)\}, \quad \mathbf{68} \quad [40d]$

Bibliografia commentata

[AAV79] AAVV, *Hermann Grassmann, sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten*, Mathematische Annalen **14** (1879), no. 1, 1–45, Schröder contribuì a questo articolo scrivendo dalla pagina 30 alla pagina 32.

[Abe26] Niels Henrik Abel, *Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen grössen x und y, wie $f(x,y)$, welche die Eigenschaft haben, dass $f(z,f(x,y))$ eine symmetrische Function von z,x und y ist*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **1** (1826), 11–15.

[Abe27] ______, *Ueber die Functionen welche der Gleichung $\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$ genugthun*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **2** (1827), 386–394.

[Ada77] R. Adamson, *Review of* Der Operationskreis des Logikkalkuls *von Dr. Ernst Schröder, ordentlichem Professor der Mathematik an der Polytechnischen Schule in Karlsruhe, Leipzig: Teubner, 1877*, Mind **3** (1877), 252–255.

[Ale94] Daniel S. Alexander, *A History of Complex Dynamics, from Schröder to Fatou and Julia*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig – Wiesbaden, 1994, nella prefazione, Alexander osserva: *Comunque, lui [i.e. Gabriel Koenigs] non fu il primo ad interessarsi della dinamica di funzioni complesse. Questo onore sembra appartenere ad un matematico tedesco, non sconosciuto del resto, ma che merita maggior attenzione di quanta sembra avere al momento: Ernst Schröder che nel 1870 formulò il teorema seguente [i.e. il teorema del punto fisso* [**Sch69b**, p. 322]*]* [**Ale94**, p. 1]. E, più in là nel testo: *La dimostrazione di Schröder del suo teorema del punto fisso si basava su argomenti infinitesimali. Questo è in un certo qual modo sorprendente, in quanto Schröder era un matematico abbastanza innovativo, ma è forse sintomatico del suo isolamento dal mainstream della matematica tedesca, poiché suggerisce che Schröder non fosse a conoscenza del rigoroso approccio* delta-ipsilon *alla matematica di Karl Weierstrass (. . .)* [**Ale94**, p. 7]. Del resto, bisogna anche dire che *il lavoro di Schröder nello studio delle iterazioni, come nel suo lavoro in logica e in teoria degli insiemi, non fu molto preso in considerazione dai suoi contemporanei* [**Ale94**, p. 5]. Per esempio, lo stesso Cayley *fu evidentemente all'oscuro del lavoro di Schröder al quale non fece riferimento* [**Ale94**, ivi]. Ovviamente, qui, l'autore si riferisce a [**Sch69b**] e a [**Sch69a**], ma si trova in sintonia con la nostra percezione: cioè, che salvo casi isolati, lo Schröder matematico passò quasi inosservato ai suoi contemporanei.

[Bad04] Calixto Badesa, *The Birth of Model Theory - Löwenheim's Theorem in the Frame of the Theory of Relatives*, Princeton University Press, Princeton, 2004, personalmente, trovo che il Badesa sposi una lettura eccessivamente skolemiana del teorema di Löwenheim.

[Bal10] John T. Baldwin, *The birth of model theory: Löwenheim theorem in the frame of the theory of relatives by Calixto Badesa, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2004, xiv+240 pp., ISBN 978-0-691-05853-5, hardcover, US $ 64.00*, Bulletin of the American Mathematical Society **47** (2010), no. 1, 177–185, recensione. Ho corretto il titolo del libro del Badesa. All'inizio della sua recensione, Baldwin scrive: *In cosa consistono i metodi modellistici? La teoria dei modelli è l'attività di un matematico* auto-cosciente. *Questo* *matematico distingue un linguaggio oggetto (sintassi) e una classe di strutture per questo linguaggio e sottoinsiemi* definibili *di queste strutture (semantica). La semantica fornisce un'interpretazione dei segni [inscriptions] del linguaggio formale in strutture appropriate*. Penso che ciò esprima bene uno degli scopi che Schröder si era prefissato già dagli anni settanta: costruire una teoria astratta suscettibile di varie interpretazioni. Con ciò non si vuol classificare Schröder come un model-theorista. Per certi versi è vago e, certamente, non aveva una nozione pulita di linguaggio formale e di semantica come abbiamo noi. Ma con questo non si può affermare con Baldwin: *(...) la distinzione tra sintassi e semantica che è fondamentale per ottenere quei risultati descritti in questa recensione non erano disponibili a Löwenheim, ma piuttosto sorsero nel contesto del suo lavoro* [**Bal10**, p. 182]. Un'affermazione simile mi è stata comunicata in una lettera privata da Roger D. Maddux a proposito di Schröder. Al contrario, la distinzione tra sintassi (segni) e semantica (interpretazione, o casi specifici) è cruciale nel pensiero schröderiano. Il linguaggio di Schröder non è formale, ma segnico. Intendendo con ciò che abbiamo a che fare con macchie d'inchiostro prive di quel significato che noi possiamo loro attribuire a seconda dei contesti.

[Ber05] Felix Bernstein, *Untersuchungen aus der Mengenlehre*, Mathematischen Annalen **61** (1905), 117–155, a pagina 21 scrive, *Satz 1. Ist M äquivalent einem Teile M_1 von N und N einem Teile N_1 von M, so ist M äquivalent N. (...) Bewiesen wurde dieser Satz unabhängig von E. Schröder und mir* [Teorema 1. Se l'insieme M è equivalente ad una parte M_1 di N e N equivalente ad una parte N_1 di M, allora M è equivalente ad N. (...) Questo teorema venne dimostrato indipendentemente da E. Schröder e da me]. Qui, Bernstein si riferisce esplicitamente a [**Sch01**, p. 81]. La dimostrazione di Bernstein venne comunicata per primo da Borel in [**Bor98**, p. 103 e segg.].

[BN11] A. Brill and M. Noether, *Jakob Lüroth*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **20** (1911), 279–299, si tratta di un articolo ricordante la figura di Lüroth in occasione della sua scomparsa il 14 settembre del 1910. È interessante perché ci permette di conoscere meglio il rapporto tra Lüroth e Schröder. Non solo, alle pp. 277-278, gli autori scrivono: *Für Lüroth war die ganze Mathematik, nicht nur in ihrem Aufbau, sondern auch in ihren Objekten ein einziges logische System (...)* [Per Lüroth l'intera matematica, non solo nel suo complesso, ma anche nei suoi oggetti, costituiva un particolare sistema logico (...)]. Non bisogna neppure dimenticare che fu Lüroth a dimostrare l'univocità della enumerazione [Beweis für die Eindeutigkeit des Zählprozessen] nel *Lehrbuch* schröderiano [**Sch73**, pp. 18–20] e che fu ancora lui a dimostrare che dalle premesse schröderiane non segue un verso della distributività [**Sch66b**, pp. 286 e segg.]. È strano che Schröder non faccia il nome di Lüroth, osservando semplicemente: *Die* Unmöglichkeit, *ihren Beweis [i.e. di un verso della distributività]* auf der Grundlage des Bisherigen *zu leisten, kann völlig ausser Zweifel gestellt werden auf eine Weise, die ich jetzt auseinandersetzen will* [**Sch66b**, p. 286] [L'**impossibilità** di dimostrare un verso della distributività **a partire dalle premesse precedenti**, può essere esibita senza alcun dubbio in un modo che io ora voglio illustrare]. Anche per il paragrafo 6 di [**Sch80a**], Schröder è debitore a Lüroth. Stavolta, però il Nostro riconosce il suo debito: *Anlässlich der vorstehenden Mittheilung hat mich Herr Lüroth daruaf aufmerksam gemacht, dass dasselbe Ergebnis 25* [$\lim_{n=\infty} \cdot (-1)^{n-1} n (\log n)^2 C_n^{(-1)} = 1$] *sich auch aus dem von Weierstrass aufgestellten und der Definition der Factorielle oder reciproken Gammafunktion mit zu Grunde gelegten Grenzswerthe* $\lim_{n=\infty} \cdot \frac{n^{(-u)} Fc(n)}{Fc(u+n)} = 1$ *ableiten lasse (...)* [**Sch80a**, p. 115] [In occasione della comunicazione precedente, il signor Lüroth ha posto la mia attenzione sul fatto che il risultato 25 [$\lim_{n=\infty} \cdot (-1)^{n-1} n (\log n)^2 C_n^{(-1)} = 1$] si lascia dedurre anche da quello esposto da Weierstrass e dalla definizione di fattoriale o di reciproca funzione gamma con a fondamento il valore limite $\lim_{n=\infty} \cdot \frac{n^{(-u)}Fc(n)}{Fc(u+n)} = 1$ (...)]. Segue la dimostrazione. Il riferimento a Weiestrass è [**Wei56**, p. 1 e segg.]. Per la precisione, Schröder si riferisce a [**Wei56**, p. 36, terza formula del risultato 56].

[Boe76] Otto Boeddicker, *Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen mit Anwendungen in der Elektrodynamik*, Union Deutsche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1876.

[Bon03] Massimo A. Bonfantini (ed.), *Charles Sanders Peirce: Opere*, Bompiani, Milano, 2003, il libro contiene gran parte degli scritti peirceani di logica.

[Bon07] Davide Bondoni, *La teoria delle relazioni nell'algebra della logica schröderiana*, LED - edizioni, Milano, 2007.

[Bon09] ______, *Peirce and Schröder on the Auflösungsproblem*, Logic and Logical Philosophy **18** (2009), no. 1, 15–31.

[Boo47] George Boole, *The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, MacMillan, Barclay, & MacMillan, Cambridge, 1847.

[Boo48] ______, *The Calculus of Logic*, Cambridge and Dublin Mathematical Journal **3** (1848), 183 – 198.

[Boo54] ______, *An investigation of the* Laws of Thought*, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*, Macmillan & co., Cambridge, 1854.

[Boo72] ______, *A treatise on the calculus of finite differences*, MacMillan and Co., London, 1872, second edition, edited by J.F. Moulton.

[Boo58] ______, *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Dover Publications Inc., New York, 1958, questa edizione della Dover, pubblicata per la prima volta nel 1958, è la prima edizione a stampa americana dell'opera, pubblicata originariamente nel 1854, con tutte le correzioni fatte sul testo.

[Boo93] ______, *L'analisi matematica della logica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1993, introduzione di Massimo Mugnai. In fondo si trovano le traduzioni italiane di *Il calcolo logico* di Boole e di *Nota sul calcolo logico* del matematico Arthur Cayley.

[Bor98] Émile Borel, *Leçons sur la Théorie des Fonctions*, Imprimerie Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1898.

[BSa] Cyril Banderier and Sylvane Schwer, *Why Delannoy Numbers?*, arXiv:math\0411128v1, 2004. Si tratta di un tentantivo di ricostruire la figura di Henri Delannoy, matematico dilettante francese, che si occupò di problemi combinatori sulla scia di Schröder. Gli autori parlano di [**Sch70**] come di un lavoro *fondamentale* [a seminal paper] e a p. 3 introducono i cosiddetti *cammini di Schröder* [Schröder paths].

[BSb] Stanley Burris and H.P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, with 36 illustrations; scaricabile all'indirizzo: http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html.

[BS97] Paul S. Bourdon and Joel H. Shapiro, *Mean Growth of Koenigs Eigenfunctions*, Journal of the American Mathematical Society **10** (1997), no. 2, 299–325, gli autori studiano la soluzione di Koenig all'equazione di Schröder che a p. 300, riformulano nella maniera seguente: $f \circ \varphi = \lambda f$. In questo modo, è facile vedere che *l'equazione di Schröder è (...) l'equazione dell'auto-valore per l'operatore di composizione C_φ, definito da $C_\varphi f = f \circ \varphi$, dove (...) il dominio di f è costituito dall'intero spazio $H(U)$ delle funzioni olomorfe su U* [**Sha98**, p. 213]. φ è una funzione olomorfa t.c. $\varphi : U \to U$, dove $U = \{x \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e f è olomorfa in U.

[BvN36] Garrett Birkhoff and John von Neumann, *The Logic of Quantum Mechanics*, The Annals of Mathematics **4** (1936), no. 37, 823–843.

[Can91] Moritz Cantor, *Über das Zeichen. Festrede bei dem feierlichen Acte des Directorats-Wechsels and der Grossh. badischen Technischen Hochschule zu Karlsruhe am 22. Novemeber 1890, gehalten von dem Director des Jahres 1890/91 Dr. Ernst Schröder, ord. Professor der Mathematik. Karlsruhe 1890, Druck der G. Braun'schen Hofbuchdruckerei. 24 S.*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **36** (1891), 169–170, della sezione storico–letteraria, si tratta di una recensione del grande storico della matematica a [**Sch90b**].

[Can95] Georg Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, erster Artikel*, Mathematische Annalen **46** (1895), 481–512.

[Can97] ______, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, zweiter Artikel*, Mathematische Annalen **49** (1897), 207–246.

[Cas06] Ettore Casari, *La matematica della verità*, Bollari Boringhieri, Torino, 2006.

[Cay71] Arthur Cayley, *Note on the Calculus of Logic*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics **11** (1871), 282 – 283.

[Cay95] ______, *The Collected Mathematical Papers*, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1895.

[CZa] Thomas L. Curtright and Cosmas K. Zachos, *Chaotic Maps, Hamiltonian Flows, and Holographic Methods*, arXiv:1002.0104v4, 2010.

[CZb] ______, *Evolution profiles and functional equations*, arXiv:0909.2424v3, 2010.

[Dip91] Randall R. Dipert, *The life and work of Ernst Schröder*, Modern Logic **1** (1990–1991), no. 2/3, 119–139, da notare che, come sempre, la fonte è [**Lür02**].

[dL67] Joseph Louis de Lagrange, *Leçon deuxième. sur le développement d'une function d'une variable, lorsqu'on attribue un accroissement a cette variable*, Œuvres de Lagrange (J.A. Serret, ed.), vol. 10, Gauthier-Villars, Paris, 1867, pp. 13–19.

[dL81] ______, *Théorie des fonctions analytiques, contenant le principes du calcul différentiel*, Œuvres de Lagrange (J.A. Serret, ed.), vol. 9, Gauthier-Villars, Paris, 1881, quatrième édition réimprimée d'après la deuxiéme édition de 1813 (lo scritto di Lagrange occupa l'intero tomo).

[dM66] Augustus de Morgan, *On the Syllogism and Other Logical Writings*, Routledge & Kegan Paul, London, 1966, edited, with an introduction by Peter Heath.

[Dud07] Duden, *Deutsches Universalwörterbuch*, Duden Verlag, Mannheim - Leipzig - Wien - Zürich, 2007, 6., Überarbeitete und erweiterte Auflage.

[Ell73] A. J. Ellis, *On the Algebraical Analogues of Logical Relations*, Proceedings of the Royal Society of London **21** (1873), 497–498, in dem *Jahrbuch über die Fortschritte der Math.*, Band V, seite 55, irrthümlich in das *Quarterly Journal* verwiesen [nello *Jahrbuch über die Fortschritt der Mathematik*, vol, 4, pagina 55, viene indicato per errore come riferimento il *Quarterly Journal*]. Questa nota è di Schröder.

[Fre79] Gottlob Frege, *Begriffsschrift, eine der aritmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Verlag von Louis Nebert, Halle, 1879.

[Fre83] ______, *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift*, Gottlob Frege, nachgelassen Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel (Hans Hermes, Friedrich Kambartel und Friedrich Kaulbach, ed.), Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1983, erster Band: nachgelassen Schriften.

[Fre86] ______, *Scritti postumi*, Bibliopolis, Napoli, 1986, edizione italiana a cura di Eva Picardi.

[Fre08] ______, *Funktion, Begriff, Bedeutung, fünf logische Studien*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 2008, herausgegeben und eingeleitet von Günther Patzig.

[Gen84] Angelo Genocchi, *Calcolo differenziale e prinicipii di calcolo integrale*, Fratelli Bocca, Roma - Torino - Firenze, 1884, pubblicato con aggiunte dal Dr. Giuseppe Peano; in questo volumetto si è fatto riferimeno solo alla parte scritta da Peano.

[Gil01] Gianni Gilardi, *Analisi matematica di base*, McGraw-Hill, Milano, 2001.

[GK01] Luisa Giacoma and Susanne Kolb, *Dizionario Tedesco-Italiano e Italiano-Tedesco*, Zanichelli, Bologna, 2001.

[Göd99] Kurt Gödel, *Opere*, vol. 1: 1929 – 1936, Bollati Boringhieri, Torino, 1999, edizione italiana a cura di Edoardo Ballo, Silvio Bozzi, Gabriele Lolli e Corrado Mangione. Un *caveat*: l'edizione italiana è semplicemente la traduzione letterale (con l'esclusione del testo tedesco a fronte) dell'edizione curata da Feferman per la Oxford University Press. Il lettore italiano non troverà nulla di nuovo rispetto all'edizione inglese (il che non toglie, però, valore all'opera).

[Gra61] Hermann Grassmann, *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*, Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin, Berlin, 1861.

[Gra72a] Robert Grassmann, *Die Begriffslehre oder Logik, zweites Buch der Formenlehre oder Mathematik*, Druck und Verlag von R. Grassmann, Stettin, 1872.

[Gra72b] ______, *Die Formenlehre oder Mathematik*, Druck und Verlag von R. Grassmann, Stettin, 1872.

[Gut04] A. Gutzmer, *Geschichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung, von ihrer Begründung bis zur Gegenwart dargestellt*, Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig, 1904.

[HG98] Paul Halmos and Steven Givant, *Logic as Algebra*, Dolciani Mathematical Expositions, vol. 21, The Mathematical Association of America, 1998.

[HW60] Charles Hartshorne and Paul Weiss (eds.), *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vol. 3: Exact Logic and 4: the Simplest Mathematics, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1960.

[Jän04] Klaus Jänich, *Mathematik 1, geschrieben für Physiker*, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 2004, zweite, korrigierte Auflage.

[JBK] Eric S. Egge Jason Bandlow and Kendra Killpatrick, *A Weight-Preserving Bijection Between Schröder Paths and Schröder Permutation*, gli autori introducono i *numeri di Schröder* seguendo [**Sch70**, p. 362] e in base ad essi definiscono le *permutazioni di Schröder* e i *cammini di Schröder*. Questi sono particolari cammini reticolari in $\mathbb{Z}^2$ da $(0,0)$ a (n,n), composti da passi nelle direzioni $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, ma mai al di sotto della diagonale. I numeri di Schröder misurano la quantità di passi necessaria per andare da $(0,0)$ a (n,n). Infine, il numero di Schröder R_n [in simboli schröderiani, α_n] corrisponde al numero di permutazioni di $1,2,3,\dots,n,n+1$ che evitano gli schemi 4321 e 4123. Tali permutazioni costituiscono le *permutazioni di Schröder*.

[Kle79] Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhndert*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979, Teile 1 und 2; reprint. In queste lezioni, viene fatto il nome di Schröder nel contesto di rendere più rigorosa la matematica. Al proposito, Klein nota che questo problema era sorto già nel mondo greco-antico e si era riproposto in una veste logica nell'ottocento. Quindi, *(...) es ist kein logisch prinzipieller Unterschied, wenn die Griechen als Anschauungssubstrat einfachste ebene Figure benutzen, an der sie eine Streckenrechnung entwickelten, während wir heute lieber mit Buchstaben operirieren; denn auch in der Handhabung dieser Zeichen bleibt noch ein [NB] anschauliches Element im Spiele. In diesem Sinne formuliert der Logiker E. Schröder gelegentlich als Axiom, daß die Zeichen, die wir auf Papier schreiben, über Nacht ungeändert stehen bleiben* (Axiom von der Inhärenz der Zeichen) [(...) non c'è alcuna differenza logica di principio, tra i greci che usavano come sostegno all'intuizione semplici figure piane, sulle quali svilupparono un calcolo per linee, e noi che oggi preferiamo operare con delle lettere; infatti, anche nell'utilizzo di questi segni rimane in gioco ancora un elemento intuitivo. In questo senso, il logico E. Schröder ebbe modo di formulare come assioma, che i segni, da noi scritti sulla carta, rimangono gli stessi [anche] di notte (*Assioma dell'inerenza*)] [**Kle79**, pp. 51–52]. Klein si riferisce esplicitamente a

[**Sch73**, p. 16 e seguenti]. Quello che Schröder intende con tale principio è che i segni rimangono gli stessi anche quando non osservati: *(...) bei allen unsern Entwickelungen und Schlussfolgerungen die Zeichen in unsrer Erinnerung – noch fester aber am Papiere – haften* [(...) in tutte le nostre deduzioni e conseguenze i segni [Zeichen] rimangono fissi nella nostra memoria – e, ancora di più, sulla carta] [**Sch73**, pp. 16–17]. La precisazione *sulla carta* sembra mitigare quello che appare una sorta di platonismo. Che in realtà, Schröder intendesse per *segni* proprio delle realtà fisiche come delle macchie d'inchiostro, viene evidenziato dalla frase seguente: *(...) dieselbe [i.e. die Zeichen] können weder wie Pilze aus dem Papier hervorwachsen, noch von selbst verschwinden* [(...) gli stessi [i.e. i segni] non possono né spuntare [spontaneamente] come funghi dalla carta, né sparire di proprio conto]. La dipendenza dei segni da parte di chi li scrive viene, con ciò, evidenziata. Non sono simboli di entità eterne, ma segni che noi creiamo e che, però, per esigenze pratiche dobbiamo supporre che non mutino. Detto meglio, per Schröder, la funzione $f(x)$ è *essenzialmente* diversa da $f(x)$, in quanto segni scritti con inchiostro diverso e in locazioni diverse. Tuttavia, conveniamo di considerarle *come* uguali per convenienza. *Ohne diesen Grundsatz (...) würde in der Taht jede Deduktion illusorisch sein, denn die Deduction beginnt eben dann, wenn – nachdem die Grundeigenschaften der Dinge hinlänglich in Zeichen eingekleidet sind – das Studium dieser Dinge Platz macht dem ihrer Zeichen* [Senza questo enunciato fondamentale [i.e. l'assioma di inerenza] (...) qualsiasi deduzione sarebbe puramente illusoria, poiché la deduzione inizia proprio quando – dopo che alle proprietà fondamentali delle cose è stata data una veste segnica a sufficienza – lo studio di queste cose prende il posto dei segni con le quali vengono espresse] [**Sch73**, p. 17]. Se, a questo punto, al lettore sembra che i segni siano qualcosa di più che scarabocchi, ma autentici simboli di qualcosa di più profondo, interviene subito Schröder in minuscolo a ribadire l'arbitrarietà dell'assioma: *Dieser Grundsatz entält (...) eine [NB] willkürliche angenommene Voraussetzung* [Questo enunciato fondamentale contiene (...) una presupposizione arbitraria], vale a dire, la persistenza dei simboli.

[Koe83] Gabriel Koenigs, *Recherches sur les substitutiones uniformes*, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques **7** (1883), 340–357.

[Koe84] ______, *Recherches sur les intégrales de certaines équationes fonctionnelles*, Annales Scientifiques de l'École Normale Superiore **1** (1884), 3–41, supplément; a p. 18, si trova la soluzione di Koenig dell'equazione di Schröder, ma è interessante l'inizio di questo testo, perché è uno dei rari casi in cui viene esplicitamente riconosciuta a Schröder la priorità di un risultato: *Dans le premier Mémoire que j'ai publié au* Bulletin des Sciences mathématiques [**Koe83**] *sur le sujet qui m'occupe, j'ai omis de citer les noms de MM. Schrœder et Korkine, qui* ***m'avaient précédé dans cette voie*** *(...); je dois, dès le début du présent travail, réparer cette omission involontaire (...)* [Nella prima memoria che ho pubblicato presso il *Bulletin des Sciences mathématiques* [**Koe83**] sul soggetto di cui mi occupo, ho omesso di citare i nomi dei signori Schröder e Korkine che **mi hanno preceduto su questa strada** (...); io devo, all'inizio del presente lavoro, riparare a questa omissione involontaria (...)]. Ancora, immediatamente sotto, osserva: *Dans ses deux Mémoires [*[**Sch69b**] *et* [**Sch69a**]*], M. Schrœder aborde le sujet sous un point de vue differént du mien, néanmoins le premier théorème qui sert de base à mes recherches* [**Koe83**, p. 342] *avait été donné par ce géomètre (...)* [Nelle sue due memorie [[**Sch69b**] e [**Sch69a**]], il signor Schröder affronta il soggetto da un punto di vista differente dal mio; tuttavia, il primo teorema che serve da base alle mie ricerche [**Koe83**, p. 342] è stato formulato da questo geometra (...)].

[KY01] A.N. Kolmogorov and A.P. Yushkevich (eds.), *Mathematics of the 19th Century. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel -

Boston - Berlin, 2001, tradotto dal russo da A. Shenitzer, H. Grant e O.B. Sheinin. L'originale è del 1978. Il testo è di particolare interesse in quanto prende in considerazione della letteratura secondaria di lingua russa, inaccessibile al comune mondo accademico. In particolare, gli autori notano il rapporto di Schröder con Poretskiĭ, altrimenti poco trattato. Da notare che non viene menzionato il lavoro di Schröder sui relativi, ma ci si concentra esclusivamente sul problema della soluzione.

[Lov01] E.O. Lovett, *Mathematics at the International Congress of Philosophy, Paris, 1900*, Bullettin of the American Mathematical Society **7** (1901), no. 4, 157–183, questo testo non compare nella bibliografia compilata da Lüroth in [**Lür02**, p. 263–265]. Viene indicato in [**oL23**, p. 586] come un articolo di Schröder dal titolo *[The principles of the algebra of relations]*. In realtà, si tratta di un riassunto steso da Lovett del contributo schröderiano [**Lov01**, pp. 176–177] in occasione del congresso internazionale di Parigi tenutosi nel 1900, in cui si afferma tra l'altro che *per esibire l'importanza logica delle sue ricerche Schröder fece notare che noi non possiamo affermare che ogni insieme sia capace di essere semplicemente ordinato [of being arranged in a simple order] e che la soluzione di questa fondamentale questione di ordine dipende dall'algebra delle relazioni*. In altre parole, l'ordinamento di un insieme sembra dipendere da una particolare relazione chiamata *gradazione*. Da notare che Couturat in quella occasione diede una breve esposizione del calcolo logico di Schröder [**Lov01**, pp. 172–176], parlando del lavoro di Poretskiĭ. Macfarlane, infine, replicò a Schröder osservando che *l'algebra delle relazioni serve come connessione [connecting link] tra la logica simbolica e le varie branchie della matematica, come il calcolo delle operazioni e il calcolo geometrico*.

[Löw69] Leopold Löwenheim, *Über die Auflösung von Gleichungen im logischen Gebietekalkul*, Mathematische Annalen (1869), 169–207.

[Löw15] ———, *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, Mathematische Annalen **76** (1915), 228 – 251.

[Löw40] ———, *Einkleidung der Mathematik in schröderschen Relativkalkul*, The Journal of Symbolic Logic **5** (1940), 1–15.

[Lür91] Jakob Lüroth, *Dr. Ernst Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exacte Logik). Erster Band. Leipzig, Teubner. 1890*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **36** (1891), 161–169, della sezione storico–letteraria, si tratta della recensione di Lüroth a [**Sch66b**]. Insieme a [**Lür02**] e [**Lür04**] costituisce l'unico riferimento da parte di Lüroth alla logica di Schröder. In questa recensione Lüroth parla anche delle *Operazioni del calcolo logico*.

[Lür96] ———, *Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Darstellung und Erweiterung der v. Staudt'schen Theorie*, Mathematische Annalen **8** (1896), 145–214, a p. 191 viene citato il *Lehrbuch* schröderiano come riferimento per questa importante osservazione che corrobora quanto scritto a proposito di [**Sch74b**]: *(...) sind nun die aus der Definition der Addition und Subtraction abzuleitenden Prämissen bewiesen, aus welchen alle übrigen Eigenschaften dieser Operationen rein formale [NB] Folgerungen sind, die man herleiten kann,* ***ohne auf die specielle Natur der Verknüpfungen einzugehen*** [(...) ora, le premesse che erano da ottenere dalla definizione di addizione e sottrazione sono state dimostrate; premesse, da cui tutte le restanti proprietà di queste operazioni sono delle pure conseguenze formali che si possono dedurre, senza un particolare riferimento alla natura speciale delle connessioni]. In altre parole, nella deduzione delle conseguenze in esame si può prescindere dalla particolare interpretazione del calcolo, affidandosi alle sue proprietà formali. Per il resto, nessun riferimento a [**Sch76**]. Da notare che l'articolo è scritto in puro stile *schröderiano*: divisione del testo in paragrafi numerati ed enunciati divisi tra loro da una linea verticale. Essendo questo un libro su Schröder, mi sono limitato a citare quest'unico testo matematico di Lüroth. Ad ogni modo, il lettore interessato può sincerarsi da sé della mancanza di riferimenti a sforzi analoghi di Schröder.

[Lür02] ______, *Ernst Schröder*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **12** (1902), 249–265.

[Lür04] ______, *Aus der Algebra der Relative*, Jahresbericht der Detuschen Mathematiker-Vereinigung **13** (1904), 73–111, nach dem dritten Bande von E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik [dal terzo volume delle *Lezioni sull'algebra della logica* di E. Schröder]. Si tratta di un compendio di 40 pagine dell'attività logica schröderiana, dal calcolo logico, alla teoria delle relazioni, alla teoria degli insiemi e alla teoria delle funzioni, passando per la teoria delle catene e giungendo al teorema di Cantor-Schröder-Bernstein. Da notare, che, benché Lüroth fosse amico del Nostro, si discostò dal simbolismo di quest'ultimo. Fatto degno di nota, vista l'importanza che Schröder dava al simbolismo.

[Lus62] Eugene C. Luschei, *The Logical Systems of Lesniewski*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1962.

[Mac42] Colin MacLaurin, *A Treatise of Fluxions in Two Books*, T.W. and T. Ruddimans, Edinburgh, 1742, volume II.

[Min11a] Hermann Minkwoski, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 1, Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1911, herausgegeben von David Hilbert, unter Mitwirkung von Andreas Speiser und Hermann Weyl; mit einem Bildnis Hermann Minkowkis und 6 Figuren im Text.

[Min11b] ______, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 2, Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1911, herausgegeben von David Hibert, unter Mitwirkung von Andreas Speiser und Hermann Weyl; mit einem Bildnis Hermann Minkowkis, 34 Figuren im Text und einer Doppeltafel.

[MV02] Deutsche Mathematiker Vereinigung, *Gestorben*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **11** (1902), 361, è il primo annuncio della morte di Schröder (il 16 giugno 1902), che viene amputata ad una *meningite* [Gehirnhautentzündung]. Si afferma inoltre che Schröder avesse affidato la provvisoria catalogazione [Sichtung] dei suoi manoscritti non pubblicati a Schur e Haußner, incaricando perciò la gestione del suo lascito alla associazione matematica tedesca [der Deutschen Mathematiker-Vereinigung betratut hat].

[MV03] ______, *Den nachlaß E. Schröders betreffend*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **12** (1903), 120, qui sono indicati i membri della commissione incaricati di gestire il *Nachlass* di Schröder: Jakob Lüroth (a Friburgo), Schur e Haußner (Karlsruhe) e Eugen Müller (Costanza). A p. 21 per una svista, vengono nominati solo Schur e Haußner.

[ndS99] Il nuovo dizionario Sansoni, *Tedesco-Italiano, Italiano-Tedesco*, G.C. Sansoni editore, Firenze, 1999, realizzato dal centro lessicografico Sansoni sotto la direzione di Vladimiro Macchi.

[Net04] Eugen Netto, *Kombinatorik*, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen (Leipzig) (Wilhelm Franz Meyer, ed.), Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1898–1904, herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. Erster Band: Arithmetik und Algebra. A p. 32 viene citato [**Sch70**] in rapporto alla quantità di modi in cui si possono combinare tra loro un certo numero di elementi che possono essere tra loro diversi, parzialmente identici o uguali [verschieden oder zum Teil einander auch gleich sind], pp. 29–46.

[oL71] Royal Society of London, *Catalogue of Scientific Papers (1860–1863)*, vol. V, George Edward Eyre and William Spottiswoode, London, 1871, a p. 549 viene riportato [**Sch62**].

[oL79] ———, *Catalogue of Scientific Papers (1864–1873)*, vol. VIII, John Murray; Trübner and Co., London, 1879, il riferimento a Schröder è alla pagina 888.

[oL96] ———, *Catalogue of Scientific Papers (1874–1883)*, vol. XI, Cambridge University Press, London, 1896, il riferimento a Schröder è alla pagina 343.

[oL14] ———, *Catalogue of Scientific Papers, fourth series (1884–1900)*, vol. XIII, A–B, Cambridge University Press, Cambridge, 1914.

[oL23] ———, *Catalogue of Scientific Papers, fourth series (1884–1900)*, vol. XVIII, Q–S, Cambridge University Press, Cambridge, 1923, il riferimento a Schröder è alla pagina 586.

[PC96] Pietro Poggi-Corradini, *Geometric models, iteration, and composition operators*, Ph.D. thesis, University of Washington, 1996, in questo volume dedicato agli operatori di composizione, l'autore si muove sulla scia di Shapiro e cita, ovviamente, Schröder con la sua equazione a p. 2.

[Pea88] Giuseppe Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Fratelli Bocca Editori, Torino, 1888, a p. X, Peano scrive: *E. Schröder* Der Operationskreis der Logikkalkuls, *Leipzig, 1877. In questo opuscolo dello Schröder (37 pagine) è sostanzialmente sviluppata la logica matematica che costituisce la introduzione al presente libro. Credetti utile di sostituire i segni* $\cap, \cup, -\Lambda, \circ, \bullet$, *ai segni di logica* $\times, +A_i, 0, 1$, *usati dallo Schröder, affine [sic] d'impedire una possibile confusione fra i segni della logica e quelli della matematica (cosa del resto avvertita dallo Schröder stesso [qui, a S. 2]). Introdussi i segni di logica* $<$ *e* $>$, *i quali benché non necessarii, sono assai utili (...). Infine introdussi il segno* : *(...), il quale, espresso o sottinteso (...), permette di applicare i segni logici precedenti alle proposizioni; e questo è il più importante uso dei segni logici introdotti; nel calcolo geometrico che segue trovansi solo adoperate le relazioni fra le proposizioni. Nello scritto dello Schröder trovasi accennata la possibilità di applicare i segni logici esprimenti relazioni fra classi per indicare relazioni fra proposizioni [qui a S. 1], ma non vi è fatta; forse essa doveva comparire in un posteriore scritto promesso, e non pubblicato. Vedasi ancora: E. Schröder* Note über den Operationskreis des Logikkalkuls, [**Sch66a**, p. 481]. Qui, Peano dimostra di non aver compreso fino in fondo lo scritto schröderiano. La logica proposizionale è solo una delle possibili interpretazioni di un calcolo puramente formale, segnico, in cui i simboli sono delle semplici macchie di inchiostro rilasciate sulla carta (vedi [**Sch74b**] e [**Sch90b**, p. 14]). Comunque, questa interpretazione proposizionale verà fornita nel secondo volume delle *Lezioni*.

[Pea89] ———, *Arithmetices Principia, nova methodo exposita*, Fratres Bocca, Augustae Taurinorum, 1889, a p. IV, Peano rimanda esplicitamente a [**Sch66a**], e a [**Sch73**].

[Pea93] ———, *Lezioni di analisi infinitesimale*, Tipografia editrice G. Candeletti, Torino, 1893, volume I.

[Pea94] ———, *Notations de Logique Mathématique*, Imprimerie Charles Guadagnini, Turin, 1894, a p. 3, Peano scrive: *ma ciò che ha più contribuito alla soluzione del problema [i.e. del rinvenimento di una lingua caratteristica] è stata la nuova ed importante scienza chiamata Logica matematica e che studia le proprietà formali delle operazioni e delle relazioni della logica. Questa disciplina è stata coltivata nel nostro secolo da Boole, Cayley, Clifford, Delboeuf, De Morgan, Ellis, Frege, Grassmann, Günther, Halsted, Jevons, Liard, Macfarlane, Mc Coll, Nagy, Peirce, Poretskiĭ, Venn e molti altri, di cui si troverà il nome nel libro di Schröder* Algebra der Logik [qui Peano si riferisce evidentemente a [**Sch66b**, pp. 700–715]], *opera che contiene tutto quanto è stato pubblicato su questa branchia della matematica*. Sinceramente, trovo ingeneroso il passaggio. Schröder non viene citato tra coloro che hanno contribuito allo sviluppo della logica. Viene citato solo per la sua bibliografia. Al contrario, viene messo in evidenza Ellis, il cui contributo (peraltro ridotto) è stato da noi tradotto nelle appendici.

[Pea97] ______, *Formulaire de Mathématiques, Tome II, n. 1*, Bocca Fréres, CH. Clausen, Turin, 1897, l'autore cita più volte le *Operazioni del calcolo logico*. In particolare, a p. 9 i teoremi 10d e 11 di S. 12, a p. 11 l'enunciato (senza numerazione) $(xa + ya_1)_1 = (xa)_1 \cdot (ya_1)_1$ di S. 19 e il teorema di ortocomplementazione 14 di S. 14 e a p. 13 la *legge di Schröder* di S. 17.

[Pea01] ______, *Formulaire de Mathématiques, Tome III*, Georges Carré et C. Naud, Paris, 1901, Peano cita ancora più volte nella prima parte l'opera schröderiana del 1877. In particolare, a p. 20 l'associatività 3d di S. 8, a p. 21 l'assorbimento 10 e 10d di S. 12, a p. 26 le leggi di de Morgan 18 di S. 16 (affermando la paternità anche di de Morgan) e a p. 27 l'enunciato di S. 19 $(xa + ya_1)_1 = (xa)_1 \cdot (ya_1)_1$ e la *legge di Schröder* di S. 17 (Peano scrive per errore come numero di pagina 175). Interessante per il limite fino al quale può essere spinta la ricerca simbolica, la formulazione della serie di Taylor a p. 144 (la proposizione 8) che qui non riporto per ovvie ragioni.

[Pea03] ______, *Formulaire de Mathématiques, Tome IV*, Bocca Fréres, CH. Clausen, Turin, 1903, in questa edizione del formulario la parte propriamente logica viene ridotta e le *Operazioni del calcolo logico* vengono citate una sola volta: a p. 28 ancora l'enunciato non numerato di S. 17 [**Pea97**], con il riferimento ad una presunta pagina 175 [**Pea01**]. Da notare che a p. 128 Peano riporta il teorema di Cantor-Schröder-Bernstein, ma omettendo il nome del Nostro. I riferimenti sono per Cantor a [**Can95**, p. 135] (un errore; la pagina corretta è la 484) e per Bernstein a [**Bor98**, p. 104]. Ovviamente, Peano non poteva citare [**Ber05**] in quanto non ancora scritto, ma entrambi i testi pertinenti di Schröder erano stati pubblicati [**Sch98c**] e [**Sch01**]. Quest'ultimo, fra l'altro, registra il contributo di Schröder ad una riunione della società tedesca di matematica e venne stampato sullo *Jahresbericht*, una rivista prestigiosa. La cosa non cambia nel tomo sucessivo [**Pea05**, p. 135].

[Pea05] ______, *Formulario Mathematico, Editio V*, Fratres Bocca, Torino, 1905, il libro è famoso per il suo latino *sine flexione* e a p. 240 si trova la nota *curva di Peano*.

[Pec04] Volker Peckhaus, *Schröder's Logic*, The Rise of Modern Logic: from Leibniz to Frege, Handbook of the History and Philosophy of Logic (Amsterdam) (Dov M. Gabbay and John Woods, eds.), vol. 3, Elsevier BV, 2004, p. 557 e segg.

[Pei68a] Charles S. Peirce, *Improvement in Boole's Calculus of Logic*, Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences **VII** (from May 1865 to may 1868), 250–261, per la precisazione si tratta del 12 marzo 1867.

[Pei68b] ______, *On a New List of Categories*, Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences **VII** (from May 1865 to may 1868), 287–98, per la precisazione si tratta del 14 maggio 1867.

[Pei68c] ______, *On the Natural Classification of Arguments*, Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences **VII** (from May 1865 to may 1868), 261–287, per la precisazione si tratta del 14 maggio 1867.

[Pei70] ______, *Description of a Notation for the Logic of Relatives, resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole's Calculus of Logic*, Memoirs of the American Academy **9** (1870), 317–378, può essere che Schröder venne a conoscenza di de Morgan tramite Peirce, in quanto in questo articolo si fa riferimento più volte al logico inglese e a [**HW60**, p. 89, formula (167) e nota †] vengono citate le *leggi di de Morgan*.

[Pei80] ______, *On the Algebra of Logic*, American Journal of Mathematics **3** (1880), 15–57.

[Pei83] ______, *Studies in logic by members of the Johns Hopkins University*, Little, Brown, and Company, Boston, 1883, di questo famoso testo mi limito a segnalare il contributo della Christine Ladd, dal titolo, *On the Algebra of Logic* [**Pei83**, pp. 17–71], in cui alle pagine

45–47 viene riprodotta la procedura di soluzione schröderiana con esplicito riferimento a [**Sch66a**]. Infatti, a pagina 45 viene citato il teorema 20 del Nostro. La Ladd dimostra di conoscere anche [**Sch73**], come si evince dalla bibliografia di p. 70.

[Pin16] Salvatore Pincherle, *Funktionaloperationen und Gleichungen*, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen (Leipzig) (W. Wirtinger H. Burkhardt and R. Fricke, eds.), Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1904–1916, herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. Zweiter Band in drei Teilen: Analysis. Erster Teil, zweite Hälfte. L'autore cita due testi schröderiani [**Sch69b**] e [**Sch69a**] a p. 763 nella letteratura pertinente all'argomento. Poi, a p. 791 viene citata l'*equazione di Schröder* in rapporto a quella di Abel: $\varphi(\alpha(x)) = \varphi(x) + c$. Sostituendo a $\varphi(x)$ nell'equazione di Abel $\log\varphi(x)$, si ottiene l'equazione di Schröder, $\varphi(\alpha(x)) = c\varphi(x)$. Cosa che lo stesso Schröder aveva notato in [**Sch69a**, p. 302], senza fare, perciò, il nome del matematico norvegese, pp. 761–817.

[Rud98] Ferdinand Rudio (ed.), *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses*, Leipzig, Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1898, in Zürich vom 9. bis 11. August 1897.

[Rud70] Sergiu Rudeanu, *On reproductive solutions of boolean equations*, Publications de l'Institut Mathématique **10** (1970), no. 24, 71–78, a pagina 73 enuncia come teorema 2 quello che noi abbiamo chiamato *teorema di ortocomplementazione* come una generalizzazione dello sviluppo booleano di funzione. Il riferimento di Rudeanu è proprio a [**Sch66a**].

[Sch62] Ernst Schröder, *Ueber Vielecke von gebrochener Seitenzahl*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **7** (1862), 55–64, simpatica l'indicazione del giovane autore nell'indice (pagina III): *von Stud. E. Schröder* e poi a p. 55, *von Ernst Schröder, std. math. et phys. in Heildelberg*. A pagina 60 Schröder scrive l'enunciato 8 e il suo correlato dividendoli da una riga verticale come nell'opera del 1877.

[Sch67] ———, *Eine Verallgemeinerung der Mac-Laurin'schen Summenformel nebst Beiträgen zur Kenntniss der Bernouilli'schen Funktion: Programm der Kantonschule in Zürich*, Druck von Zürcher & Furrer, Zürich, 1867.

[Sch69a] ———, *Ueber iterirte Functionen*, Mathematische Annalen **3** (1869), 296–322, questo testo è di estrema importanza, in quanto in esso viene formulata la cosiddetta *equazione di Schröder*; ovvero: $\psi(m\zeta) = F\{\psi(\zeta)\}$. *Wenn für eine Function $\psi(\zeta)$ ein Multiplikationstheorem bekannt ist, vermöge dessen sich die von einem Vielfachen $m\zeta$ des Argumentes genommene Function durch dieselbe Function des einfachen Argumentes ζ ausdrücken lässt, wie etwa, $\psi(m\zeta) = F\{\psi(\zeta)\}$, so kann man immer die iterirte Function $F^r(z)$ hinsichtlich r expliciren, und zwar ist: $\psi(m^r\zeta) = F^r\{\psi(\zeta)\}$. Also, $F^r(z) = \psi\{m^r\psi^{-1}(z)\}$* [**Sch69a**, p. 303] [Se per una data funzione $\psi(\zeta)$ è noto un teorema moltiplicativo, allora in virtù di esso, si lascia esprimere la funzione del multiplo di un argomento $m \cdot \zeta$ attraverso la stessa funzione con l'argomento semplice ζ, $\psi(m \cdot \zeta) = F(\psi(\zeta))$; così, si può esplicitare la funzione iterata $F^r(z)$ rispetto ad r nel modo seguente: $\psi(m^r \cdot \zeta) = F^r(\psi(\zeta))$; quindi, $F^r(z) = \psi(m^r \cdot \psi^{-1}(z))$]. Dove, $F(z)$ è una funzione a variabili complesse, $F^r(z)$ è la r-applicazione di F a z; ovvero, $F^r(z) = F(F^{r-1}(z))$; r è un numero reale, m una costante e $z = \psi(\zeta)$ (i punti $z_1, z_2, z_3, \ldots$ corrispondondo a $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ [**Sch69a**, p. 301], tramite l'applicazione della mappa *conforme* ψ). Questa equazione risulta oggi di importanza cruciale nella *teoria del caos*; si vedano come contributi recenti [**CZa**] e [**CZb**, in particolare, pp. 2–3]. Curtright e Zachos, scherzando, arrivano a definirla l'*equazione d'onda di Schröder* [**CZb**, p. 18].

[Sch69b] ———, *Ueber unendlich viele Algorithmen zur auflösung der Gleichungen*, Mathematische Annalen **2** (1869), 317–365, in questo testo, Schröder formula quello che oggi è noto come *Teorema del punto fisso di Schröder*: *(...) für alle Punkte z eines gewissen um den Punkt z_1 herum liegendes Gebiet strebt die ohne Ende fort iterirte Function $F(z)$ der Wurzel z_1 der Gleichung $F(z) = z$ als Grenze zu* [**Sch69b**, p. 322] [(...) per tutti i punti z di un intorno di z_1 l'iterazione infinita di $F(z)$ converge all'infinito alla radice z_1 dell'equazione $F(z) = z$]. Dove $F(z)$ è una funzione a numeri complessi. Ogni punto z_1 che soddisfa l'equazione in questione è chiamato *punto fisso* di $F(z)$. Alexander [**Ale94**, p. 6] traduce *Gebiet* con *area*. Ho preferito usare l'espressione *intorno* in quanto è questo che Schröder intende.

[Sch70] ———, *Vier combinatorische Probleme*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **15** (1870), 361–376.

[Sch71a] ———, *Berechtigung zu dem Aufsatze* Vier combinatorische Probleme, Zeitschrift für Mathematik und Physik **16** (1871), 179–180.

[Sch71b] ———, *Die Umformungsregeln für algebraische Ausdrücke*, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht **2** (1871), 410–415, sotto al titolo si trova indicato: *Notiz von Dr. Ernst Schröder, Professor am Gymnasium zu Baden-Baden*. Interessante è il gruppo di formule II. di pagina 413 che ritroveremo nelle *Operazioni del calcolo logico* a p. 34 (gruppo IV). A riguardo l'autore scrive: *Diese Formeln, von denen wohl manche noch keinem Mathematiker zu Gesicht gekommen sein mögen, enthalten in der That die Vorschriften für die Transformation eines jeden der sieben algebraische Ausdrücke und lehren gewissermassen, in Bezug auf welche Operationen eine Zahl n sich selber das Gleichgewicht hält, oder sich aufhebt* [Queste formule, di cui forse qualcuna non è mai caduta sotto lo sguardo di un matematico, contengono in verità le indicazioni per le trasformazioni di ognuna delle sette operazioni algebriche e ci insegnano in un certo senso in rapporto a quale operazione un numero n mantiene il proprio equilibrio o si annulla].

[Sch73] ———, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende. I. Bd: Die sieben algebraischen Operationen*, Teubner, Leipzig, 1873.

[Sch74a] ———, *Abriss der Arithmetik und Algebra für Schüler an Gymnasien und Realschulen. Erster Heft: Die sieben algebraischen Operationen*, Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig, 1874, come indica il titolo si tratta di un compendio di [**Sch73**]. Vorrei far notare che sia il presente volume che [**Sch73**] presentano lo *stesso* sottotitolo: *Die sieben algebraischen Operationen*. Dico questo perché in alcune catalogazioni compare un libro dal titolo, *Die sieben algebraischen Operationen*. In realtà, questo libro è [**Sch73**] e non va assolutamente confuso con [**Sch74a**]. A p. 3, Schröder scrive: *Die natürliche Zahl dient als* Massstab *für die Häufigkeit der Dinge; sie ist gewissermassen eine* Abbildung *der zu zählenden Gegenstände hinsichtlich ihrer Vielheit* [I numeri naturali servono come *riferimento* per [indicare] la frequenza delle cose; essi sono, per così dire, delle *funzioni* degli oggetti da contare, riguardo alla loro molteplicità]. In altre parole, il numero naturale è una funzione che associa ad un insieme di oggetti la sua cardinalità; in termini moderni, un naturale è una funzione, $|\ | : V \to |V|$, che associa ad ogni insieme la sua cardinalità. È curioso che Schröder in *questo* libro parli proprio di *Menge*: *(...) ist eine Menge von Objecten gegeben, so ist die Anzahl derselben eine völlig* bestimmte [(...) dato un insieme di oggetti, la sua cardinalità è completamente determinata [i.e. univoca]] [**Sch74a**, p. 4]. Ad ogni modo, intendendo per *numero* una particolare *funzione* qui l'Autore sta compiendo un abuso di linguaggio. Infatti, scrive che *un numero si può considerare [NB]* ***gewissermassen*** *come una funzione*, ecc. *Gewissermassen* sta, ovviamente, per *sozusagen* [**Dud07**, p. 692], *per così dire, in un certo qual modo, loosely speaking*. Schröder non intende qui la funzione matematicamente intesa. Si limita ad osservare che *associando* un numero ad un gruppo di oggetti, è **come se** applicassimo ad esso una funzione. Le sette operazioni algebriche, come è noto, sono: l'addizione, la moltiplicazione, l'elevazione

a potenza o esponenziazione (operazioni dirette), la sottrazione, la divisione, la radice e il logaritmo (operazioni inverse). Al proposito, Schröder osserva: *Die höheren* directen *Operationen entspringen also der Reihe nach aus den niederen (...) durch den Process der* Wiederholung *(Iteration)* [Le operazioni *dirette* di grado più elevato si ottengono da quelle di grado [immediatamente] inferiore (...) attraverso il processo di *ripetizione* (iterazione)] [**Sch74a**, p. 17]. Per esempio, $a \cdot b$ (operazione di secondo grado) si ottiene sommando (operazione di primo grado) a a sé stesso un numero b di volte. Interessante è il concetto di *iterazione* che aveva portato Schröder ad interessanti risultati in analisi funzionale.

[Sch74b] ______, *Über die formalen Elemente der absoluten Algebra. Zugleich als Beilage zum Programm des Pro- und Realgymnasium zu Baden–Baden für 1873/74. Baden–Baden, 7. juli 1874*, Schweizerbart, Stuttgart, 1874, a pp. 12–13, viene esposto ancora una volta il problema combinatorio del *Lehrbuch*: *Indem man drei Zahlen a, b, c durch irgend zwei von den Grundoperationen [i.e. moltiplicazione e divisione] successive verknüpft, lassen sich* achtzehnerlei Elementarausdrücke *bilden, die sich nach unsern Vertauschungsprincipien in drei Gruppen von je 6 in folgender Weise sondern [seguono tre illustrazioni] in deren jedem jedoch die Buchstaben noch permutirt werden können* [connettendo successivamente tre numeri a, b, c attraverso due delle operazioni fondamentali [i.e. moltiplicazione e divisione], si possono formare 80 espressioni elementari che, a partire dai nostri principi di commutazione si dividono in tre gruppi di sei nella maniera seguente [seguono tre illustrazioni], in cui le lettere possono essere ancora permutate]. A ribadire il carattere puramente formale di queste ricerche combinatorie, Schröder nel paragrafo 9, dal titolo *Das Formelsystem O_1 der ordinären Algebra* [Il sistema formale O_1 dell'algebra ordinaria], a p. 25 scrive: *Als particulare Beispiele [NB] von solchen Operationen, welche den Gesetzen O_1 unterworfen sind, kennt man bis jetzt u.a.: 1a) die* logische Addition *von* Begriffen *(oder auch Individuen); 2a) von* Urtheilen *(...); 3a) die* numerische Addition *von* gemeinen complexen Zahlen *(...); 4a) die* geometrische Addition *mit den* Punkten der Zahlenebene *(...); 5a) die* Addition *mit den v. Staudt'schen* Würfen [come esempi particolari di tali operazioni che sono soggette a O_1 si conoscono fino ad ora, fra le altre cose: 1a) l'addizione logica di concetti (o anche di elementi); 2a) di giudizi (...); 3a) l'addizione numerica di generici numeri complessi (...); 4a) l'addizione geometrica con i punti del piano numerico [vedi il riferimento di Schröder nell'Appendice A al lavoro di Boedikker]; 5a) l'addizione con i *dadi* di von Staudt [vedi [**Sch76**]]. Schröder non sarebbe potuto essere più chiaro; il suo calcolo algebrico è formale nel senso che non è univocamente interpretabile; anzi, ammette più interpretazioni e quella logica è una sola fra le tante. Non solo, in questa citazione vengono comprese le aree in cui il Nostro lavorò: la logica, l'analisi funzionale, la geometria analitica, il calcolo di von Staudt. Il tutto, incentrato su una concezione combinatoria della matematica che ha per scopo il ritrovamento di algoritmi sempre più efficaci. Ciò, collega l'area matematica all'area logica in cui il problema della soluzione giocherà un ruolo fondamentale. Quindi, non ci si deve stupire delle decine di formulazioni equivalenti del Teorema K in [**Sch66c**, p. 242]; sono la manifestazione di questa esigenza combinatoria ed estetica al tempo stesso. Schröder non si abbandonerà mai del tutto alla logica, ritornando negli ultimi anni ai problemi della giovinezza, quali la teoria delle funzioni e la teoria degli insiemi. Quello che mi rende profondamente perplesso è che Lüroth si occuperà dei medesimi argomenti (compreso il calcolo di Staudt) ma non si riferirà *quasi* mai a Schröder. L'impressione è che lo Schröder matematico sia passato completamente inosservato. È singolare anche che uno studioso come Moritz Cantor recensisca un lavoro, per certi versi minore come [**Sch90b**] e non scriva nulla su [**Sch66b**] pubblicato quasi contemporaneamente. Del resto, il fatto che solo nel 2010, cioè, dopo più di un secolo dal testo di luroth [**Lür02**], ci sia industriati

nel mettere assieme tutta l'attività di Schröder denota un malcelato disinteresse generale che si è appoggiato più al *sentito dire* che non sulle opere stesse. Non credo sia sufficiente la lettura delle *Lezioni* per farsi un'idea su una persona che era attiva in più settori. Ancora di più che in altri personaggi, Schröder rifugge da una classificazione univoca e certo non costituisce soltanto una fonte di riferimenti, come suggerito da Peano.

[Sch76] ______, *Ueber v. Staudt's Rechnung mit Wurfeln und verwandte Processe*, Mathematische Annalen **10** (1876), 289–317.

[Sch77a] ______, *Ein auf die Einheitswurzeln bezügliches Theorem der Funktionslehre*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **22** (1877), 183–190.

[Sch77b] ______, *Note über den Operationskreis des Logikkalkuls*, Mathematische Annalen **12** (1877), 481–484.

[Sch79a] ______, *Der Operationskreis des Logikcalkuls – Note über den Operationskreis des Logikcalculs*, Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik (Leipzig) (Gustav Zeuner Leo Koenisberger, ed.), Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1879, II. Band. Questo libro raccoglie una serie di riassunti (o poco più) di vari contributi nell'area matematica. Qui, mi permetto di riportare quelli di Schröder a proposito delle *Operazioni del calcolo logico*. *Die* erstere *Schrift erstrebt für elementarmathematisch gebildete Leser eine Entwickelung der von Leibniz schon begehrten und von Boole gegründeten Disciplin des* Calculus of logic *zu geben mit denjenigen Vervollkommnungen, deren dieselbe bedürftig erscheint. Verfasser geht zu diesem Zwecke auf einem grossentheiles von Robert resp. von den Gebrüdern Grassmann schon richtig eingeschlagenen Wege weiter, führt indessen den Leser wirklich bis zu dem Ziele, den ganzen beschwerlichen* aithmetisch - *logischen Rechenapparat Boole's entbehrlich zu machen, denselben zu ersetzen durch eine Methode, welche von dem der Sache wesentlich fremden Element der arithmetischen Zahlen geläutert und zu einer vollkommen elementaren gestaltet ist. An der complicirtesten von Boole gestellten Aufgabe, deren Lösung Verfasser mit detaillirter Angabe der Rechnung durchführt, wird die Kraft der Methode erprobt, und endlich die bisher noch mangelhafte Lehre von den logischen vier Species durch Aufstellung einer correcten Theorie der Exception (Subtraction) und Abstraction (Division) ergänzt* [Il *primo* di questi scritti ambisce a presentare ad un lettore formato matematicamente uno sviluppo della disciplina del *calcolo della logica*, fondato da Boole ma vagheggiato già da Leibniz, con quei perfezionamenti di cui esso sembra [ancora] aver bisogno. L'autore prosegue, a questo fine, per gran parte il cammino già imboccato da Robert ed Hermann Grassmann e conduce il lettore realmente alla meta, rendendo superfluo l'intero apparato *aritmetico* – logico calcolistico di Boole, [finora troppo] complicato, sostituendolo con un metodo che, purificato [geläutert] da elementi appartenenti alla sfera aritmetica estranei all'essenza della cosa, viene portato ad una forma completamente elementare. La potenza di [questo] metodo viene messa alla prova sul più complicato dei problemi formulati da Boole, la cui soluzione viene esposta in maniera esaustiva dall'autore con una dettagliata presentazione del calcolo [necessario allo scopo]; infine, la teoria delle quattro specie [di operazioni] logiche, ancora lacunosa, viene portata a compimento attraverso la presentazione di una teoria corretta dell'eccezione (o sottrazione) e dell'astrazione (o divisione)] [**Sch79a**, p. 86]. Se si esclude il verbo *läutern*, il linguaggio è autenticamente schröderiano, per cui non è poi così rilevante appurare se fu lui a redigere questa descrizione. Nella traduzione, ho mantenuto la metafora del *cammino* e della sua *meta* a proposito dei fratelli Grassmann, in quanto Schröder la utilizza in [**Sch66a**] all'inizio e alla conclusione. Passiamo, ora, alla *Nota* presentata da Schröder nei *Mathematische Annalen*: *Die* zweite *Schrift oder* Note *berichtet eingehender über die erstere Arbeit namentlich in ihrem Verhältniss zu dem vorgängigen Arbeiten Boole's und Grassmann's, worauf ich [NB: chi scrive passa*

curiosamente alla prima persona singolare] hier, um kurz zu sein, verweisen. Ausserdem stelle ich darin Operationen auf, welche auf dem Gebiet der Substitutionen existiren und ebenso wie die logische Addition und Multiplikation sich gegenseitig *distributiv zu einander verhalten, so dass für dieselben nicht nur* $a(b+c) = (ab) + (ac)$, *sondern auch* $a + (bc) = (a+b)(a+c)$ *allgemein ist, wogegen ihnen die Commutativität und Associativität der logischen Grundoperationen abgeht. Schliesslich macht die Note aufmerksam auf anderweitige, metrische, Operationen, welche mit den logischen gewisse Analogien darbieten* [Il *secondo* scritto o *nota* ritorna in maniera più approfondita sul primo di questi lavori, cioè sul suo rapporto con i contributi precendenti di Boole e Grassmann, ai quali in questa sede, per mancanza di spazio, devo rimandare. Oltre a ciò, in questo testo presento quelle operazioni esistenti nell'ambito delle sostituzioni che si distribuiscono una sull'altra come le operazioni logiche di unione ed intersezione; ovvero, per queste non vale solo in generale che $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, ma anche che $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. [Tuttavia,] al contrario [delle operazioni logiche] la commutatività e l'associatività logiche non valgono per queste operazioni di sostituzione. Infine, la nota pone l'attenzione su altre operazioni metriche che con quelle logiche offrono interessanti analogie] [**Sch79a**, pp. 68–69]. È singolare l'affermazione che in [**Sch77b**] si sia entrati più nel dettaglio sul rapporto con i fratelli Grassmann e con Boole, dato che non vi si trova nulla di nuovo che non sia contenuto nella prefazione delle *Operazioni del calcolo logico*. Desta, invece, interesse che Schröder dovendosi limitare alle cose più importanti per esigenze di spazio, ribadisca il rapporto con la teoria delle sostituzioni e con le operazioni *metriche*, tacendo del principio di dualità (uno dei motivi che spinsero Schröder, *forse* suggestionato da de Morgan, a scrivere [**Sch66a**], pp. 86–87.

[Sch79b] ______, *Ein auf die Einheitswurzeln bezügliches Theorem der Funktionslehre*, Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik (Leipzig) (Gustav Zeuner Leo Koenisberger, ed.), Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1879, II. Band. Si tratta di un riassunto più che conciso di [**Sch77a**]. Viene citato semplicemente il risultato principale del testo originario, ovvero [**Sch77a**, p. 187, teorema 15] che consiste nello sviluppo di una funzione analitica $f(z)$ in serie di potenze positive di $\frac{1}{z}$, con esclusione dello zero, pp. 85–86.

[Sch79c] ______, *Nachschrift*, Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik (Leipzig) (Gustav Zeuner Leo Koenisberger, ed.), Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1879, II. Band. Prima del testo si trova scritto: *Zu Seite 87, Z. 14 v.o. ist einzuschalten* [Da inserirsi alla pagina 87, riga 14, più sopra]. Schröder intende dire che questo *post scriptum* va collocato alla fine di [**Sch79a**]. Il nostro scrive: *Von Seiten ihres Verfassers Herrn Charles S. Peirce sind mir inzwischen die Separatabzüge zweier Abhandlungen zugestellt und dadurch bekannt geworden, betitelt:* Three Papers on Logic, *Proceedings of the American academy of arts and sciences, 1867, p. 250–298, und* Description of a notation for the logic of relatives, *resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic, Memoirs of the American Academy, Vol. IX, 1870, 62 Seiten, welche ich mich zu dem in vorgennanter Schrift von mir gegebenen Literaturverzeichniss hiemit nachzutragen beeile. Aus der ersteren von diesen Abhandlungen (I. Paper:* On an improvement in Boole's calculus of logic *) ersehe ich, dass bezüglich einiger wesentlichen Punkte in meiner ersteren Schrift, nämlich in Hinsicht auf die Wahrnehmung der vorstehend angeführten doppelten Distributivität sowohl, als auch bezüglich der für logische Differenzen und Quotienten auf S. 29–31 von mir aufgestellte Ausdrücke, die Priorität Herrn Peirce zukommt* [Nel frattempo, il signor Charles S. Peirce, mi ha informato di due suoi saggi, consegnandomi delle loro copie: *Three Papers on Logic*, Proceedings of the American academy of arts and sciences, 1867, pp. 250–298 [si tratta, per la precisione, di [**Pei68a**], [**Pei68c**] e [**Pei68b**]] e [**Pei70**], che io mi affretto ad

aggiungere alla bibliografia del mio scritto precedentemente citato [i.e. [**Sch66a**]]. Dal primo di questi saggi (I. Paper: *On an improvement in Boole's calculus of logic*) desumo che riguardo ad alcuni punti essenziali nel mio primo scritto, ovvero in rapporto alla percezione della doppia distributività, introdotta in precedenza [i.e. [**Sch79a**, p. 68]], così come riguardo alle espressioni da me scelte [von mir aufgestellten] per la differenza e il quoziente logici a SS. 29–31 [i.e. delle *Operazioni del calcolo logico*], la priorità spetta al signor Peirce]. Al di là del riconscimento della priorità del logico americano in certe cose, questo breve scritto è importante perché ci permette di sapere quando Schröder, per la prima volta, venne a conoscenza della scuola algebrica americana. Essendo stato pubblicato [**Sch66a**] nel 1877 e questo *Repertorium* nel 1879, Schröder deve aver conosciuto i testi di Peirce negli anni 1877–1879, p. 162.

[Sch79d] ______, *Ueber v. Staudt's Rechnung mit Würfen und verwandte Processe*, Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik (Leipzig) (Gustav Zeuner Leo Koenisberger, ed.), Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1879, II. Band. Si tratta ovviamente di una versione *ridotta* di [**Sch76**]. Cruciale è questa affermazione: *In meinem* Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende, I. Bd., Die sieben algebraischen Operationen, Leipzig, 1873 *hatte ich zum erstenmal die Idee einer Disciplin ausgesprochen, von der die bisherige Algebra und Analysis nur wie ein* ***specieller Fall*** *erscheint, in die sie gewissermassen wie ein (...) Faden in ein ausgebreitetes Gewebe sich einfügt* [Nel mio [**Sch73**] ho per la prima volta parlato dell'idea di una disciplina, di cui l'algebra e l'analisi [che tutti noi conosciamo] si dimostrano essere solo un **caso speciale**, in cui esse si inseriscono, come (...) un filo si intesse in una veste [più] ampia]. Il testo esprime due concetti: da un lato quello di una teoria puramente formale suscettibile di varie interpretazioni (come quella algebrica o analitica) e dall'altro quello di una lingua universale in cui esprimere i concetti della matematica, il cui vocabolario costituisce solo una parte di questo linguaggio. Riguardo a questi concetti, il *repertorium* si dimostra più chiaro dell'originale (in cui, fra l'altro, non ci si riferisce a [**Sch73**] ma a [**Sch74b**]). Ad ogni modo, si veda [**Sch76**, pp. 289–290], pp. 81–85.

[Sch80a] ______, *Bestimmung des infinitären Werthes des Integrals* $\int_0^1 (u)_n du$, Zeitschrift für Mathematik und Physik **25** (1880), 106–117, per quest'indicazione di data vedi [**Sch80c**].

[Sch80b] ______, *Rezension von Frege's Begriffsschrift*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **25** (1880), 81–94 della sezione storico letteraria.

[Sch80c] ______, *Ueber die Eigenschaften der Binomialcoefficienten, welche mit der Auflösung der trinomischen Gleichung zusammenhängen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **25** (1880), 196–207, Lüroth indica come data del volume '1879'. In realtà, Schröder presentò il suo contributo in quella data, ma l'anno della rivista è il 1880.

[Sch81] ______, *Ueber eine eigenthümliche Bestimmung einer Function durch formale Anforderungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **9** (1881), 189–220.

[Sch82] ______, *Ueber die Anzahl der Substitutionen, welche in eine gegebene Anzahl von Cyklen zerfallen*, Archiv der Mathematik und Physik **68** (1882), 353–377, per l'indicazione di questa rivista si veda [**Sch87b**]. Lüroth indica come data erroneamente *Karlsruhe, November 1801*. Ovviamente, si tratta del 1881. Da segnalare che il testo di Schröder si trova sì alle pagine indicate, ma nel quarto fascicolo del volume [Heft IV].

[Sch84a] ______, *Exposition of a Logical Principle, as disclosed by the Algebra of Logic, but overlooked by the Ancient Logicians*, Report of the Fifty-Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science, held at Southport in September 1883 (John Murray, ed.), Spottiswoode and Co., London, 1884, questo contributo schröderiano seguì immediatamente [**Sch84b**]. Il principio a cui fa riferimento Schröder, e che attribuisce a Peirce, consiste in un verso della distributività $a(b+c) \Rightarrow ab+ac$ che afferma essere un *assioma indipendente del pensiero o principio logico* [an indipendent axiom of thought or logical principle]. Nella stessa sede dichiara l'impossibilità di provare il verso contrario dell'implicazione, p. 412.

[Sch84b] ———, *On the most Commodius and Comprehensive Calculus*, Report of the Fifty-Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science, held at Southport in September 1883 (John Murray, ed.), Spottiswoode and Co., London, 1884, Schröder tenne questo contributo sabato 22 settembre, per nono, nella sezione A di scienze matematiche e fisiche. Lüroth accorpa erroneamente questo contributo al successivo, come fosse un unico testo. In ogni caso, si tratta di brevi riassunti (al proposito si veda anche [**Sch88a**] e [**Sch84b**]), pp. 411–412.

[Sch87a] ———, *Tafeln der eindeutig umkehrbaren Functionen zweier Variabeln auf den einfachsten Zahlengebieten*, Mathematische Annalen **29** (1887), 299–317.

[Sch87b] ———, *Ueber Algorithmen und Calculn*, Archiv der Mathematik und Physik (1887), 225–278, per una svista, Lüroth parla di *Archiv **für** Mathematik und Physik*.

[Sch88a] ———, *On a certain Method in the Theory of Functional Equations*, Report of the Fifty-Seventh Meeting of the British Association for the Advancement of Science, held at Manchester in August and September 1887 (John Murray, ed.), Spottiswoode and Co., London, 1888, per la precisione, Schröder parlò mercoledì 7 settembre, per dodicesimo dopo un contributo di J. Swinburnh, nella sezione A dedicata alle scienze matematiche e fisiche, p. 621.

[Sch88b] ———, *Veredelung von Pflanzen [Sull'innesto delle piante]*, Verhandlungen des naturwissenchaftlichen Vereins in Karlsruhe **10** (1888), 19–20, si tratta di un contributo *floreale* di Schröder che fra i tanti hobbies aveva anche quello del giardinaggio; come osserva Dipert, *Tra i passatempi di Schröder c'erano l'alpinismo, lo sci, il pattinaggio su ghiaccio, l'equitazione e il giardinaggio (...)* [**Dip91**, p. 126]. Amante delle lingue, Schröder arrivò ad imparare la lingua della Groenlandia. Infatti, nel primo volume delle *Lezioni* scrive, *Sagen wir etwa:* Kangerdluksuatsiak–Ikerasaksuat - *(...) eigentlich waren dies ein paar grönländische Ortsname, ursprünglich besagend:* Ort, wo Leute wohnen (...) [Diciamo per esempio: *Kangerdluksuatsiak–Ikerasaksuat* (...) questi erano due toponimi groenlandesi, significanti in origine: *Luogo dove la gente abita* (...) [**Sch66b**, p. 480]. Ad ogni modo, si tratta del reseconto di un contributo di Schröder alla seduta del 4 gennaio 1884. Il testo non ha titolo. Mi permetto solo una piccola citazione: *Der Verzicht auf die Methode des Pfropfens würde also unter anderm uns mit einem Schlage der meisten unserer feineren Baumobst-Sort berauben* [La rinuncia al metodo dell'innesto ci priverebbe, fra l'altro, in un colpo solo della maggior parte delle nostre più squisite qualità di alberi da frutto] [**Sch88b**, p. 19]. Una sorta di declinazione naturale di quel senso estetico manifestato in molti dei suoi scritti. Si veda sopra, il mio commento alla traduzione di *geniessbar* con i riferimenti a Tarski e Löwenheim.

[Sch90a] ———, *Eine Berechtigung zum ersten Bande meiner Algebra der Logik*, Mathematische Annalen **36** (1890), 602, interessante di questa breve precisazione è l'incipit, dove l'autore osserva di essersi occupato *mit dem auch geometrisch und combinatorisch interessanten Probleme (...) welches die Typenzahl der Ausdrücke betrifft, die aus drei gegebene Begriffen oder Classen a, b, c mittelst der Partikeln* und, oder *und* nicht *aufgebaut oder construirt werden können (...)* [con un interessante problema [dai risvolti anche] geometrici o combinatori (...) che riguardano il numero di tipi di espressioni che possono essere composte o costruite a partire da tre dati concetti o classi A, B, C attraverso le particelle *e, o* e *non*]. È interessante questa frase perché ci rimanda al mondo combinatorio del *Lehrbuch*. Là, si trattava di combinare tre numeri con due operazioni, la somma e la differenza (tradotte logicamente, $\vee$ e $\neg$). Vedi S. 35, nota 18 del presente volume. Un altro luogo in cui si vede come il lavoro matematico di Schröder si prolunghi nell'area logica.

[Sch90b] ______, *Über das Zeichen: Festrede bei dem Direktoratswechsel an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe am 22. november 1890*, Braun, Kalrsruhe, 1890, di questo interessante testo vorrei far notare come a p. 14 Schröder arrivi a definire come autentico oggetto di una teoria i segni lasciati sul piano dalle lettere o dai numeri [kleinen Raumbilder der Buchstaben ev. auch Ziffern auf dem Plane]; a pagina 21, invece, introduce il concetto di *individuo* come quella classe non vuota I t.c. per ogni altra classe X, o I è contenuta in X o I è contenunta in non-X: *Zur Illustration will ich die Definition des mathematischen Punktes in unserer Zeichenschrift hersetzen. Dieselbe sieht so aus:* $(i \neq 0)\Pi_x\{(i \subseteq x) + (i \subseteq x_1)\}$ *und besagt in Worten: Punkt ist ein Raumteil* i *dann und nur dann zu nennen, wenn er, ohne nichts zu sein (...), zu jedem Raumteil* x *in der Beziehung steht, dass er entweder ganz in diesen, oder ganz in dessen Aussenraum (...) hinenifällt* [A mo' di illustrazione, voglio introdurre la definizione di *punto matematico* nella nostra scrittura segnica: $\forall I((I \neq \emptyset) \to \forall X\{(I \subseteq X) \vee (I \subseteq -X)\})$ che afferma in parole comuni: una sezione spaziale I si deve chiamare *punto* se e solo se, benché diversa dal niente, sta in un rapporto tale con una qualsiasi altra sezione spaziale X, che o appartiene a questa [X] o al suo complemento [$-X$]], p. 21. Vedi sopra, S. 12, alla fine della nota 4. Interessante è anche la recensione che ne fece Moritz Cantor in [**Can91**]. Egli scrive, *Ob sie [d.h. Schröders Zeichensprache] aber eine solche Zukunft habe, wie Herr Schröder es erhofft, möchten wir nicht unterschreiben. Noch weniger können wir den Zukunftsphantasien zwischenplanetarischen Zeichenverkehrs eine ernste Seite abgewinnen* [Se essa [i.e. la lingua segnica schröderiana] abbia un avvenire come Schröder si aspetta, non possiamo essere d'accordo. Ancora meno riusciamo a trovare qualcosa di serio in queste fantasie futuristiche di un traffico di segni interplanetario] [**Can91**, p. 170].

[Sch91a] ______, *Neueres über Bernoulli'sche Funktionen von natürlicher Ordnungszahl*, Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärtze, 63. Versammlung zu Bremen, 15–20 September 1890 (Oscar Lassar, ed.), Verlag von F.C.W. Vogel, Leipzig, 1891, zweiter Theil, Abtheilungs–Sitzungen. Questo fu il quarto contributo [Vortrag] della prima seduta (della sezione di matematica ed astronomia) che si aprì il martedì 16 settembre 1890, dalle 9 a mezzogiorno e tre quarti, pp. 5–6.

[Sch91b] ______, *Ueber bestimmte Integrale, die sich rational durch* π *und* $\lg 2$ *ausdrücken*, Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärtze, 63. Versammlung zu Bremen, 15–20 September 1890 (Oscar Lassar, ed.), Verlag von F.C.W. Vogel, Leipzig, 1891, zweiter Theil, Abtheilungs–Sitzungen. Questo fu il terzo contributo schröderiano che chiuse la terza seduta (di matematica e astronomia) di martedì 16 settembre 1890, durata dalle tre e mezza alle sei di pomeriggio (si veda [**Sch91a**]), pp. 8–9.

[Sch95] ______, *Note über die Algebra der binären Relative*, Mathematische Annalen (1895), 144–158.

[Sch98a] ______, *Die selbständige Definition der Mächtigkeiten* $0, 1, 2, 3$ *und die explizite Gleichzahligkeitsbedingung*, Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum [Abhandlungen der kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutsche Akademie der Naturforscher] **71** (1898), 363–376.

[Sch98b] ______, *Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien*, Verhandlungen des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897 (Ferdinand Rudio, ed.), Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1898, scaricabile all'indirizzo: http://gallica.bnf.fr/, pp. 147–162.

[Sch98c] ———, *Ueber zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze*, Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum [Abhandlungen der kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutsche Akademie der Naturforscher] **71** (1898), 301–362, il riferimento di Schröder è a [**Can95**, p. 484, teoremi A–E].

[Sch99] ———, *On Pasigraphy. Its Present State and the Pasigraphic Movement in Italy*, The Monist **9** (1899), 44–62, corrigenda p. 320. Questo articolo è la traduzione inglese di [**Sch98b**]. Il testo venne rielaborato in inglese dallo stesso Schröder. Rispetto al testo tedesco, mi limito a segnalare solo una differenza: un'ulteriore accusa nei confronti di Frege esageratamente acida; in effetti, Schröder preoccupato dell'aspetto esteriore del simbolismo fregeano non colse il vero significato dell'opera fregeana. Nella *Begriffsschrift* si trova per la prima volta svolta la teoria della quantificazione (a cui allude Frege alla fine dell'appendice G). Ad ogni modo, il Nostro scrive: *(. . .) il signor Frege, disattento di tutto ciò che veniva realizzato nella stessa direzione dagli altri, fece un grande sforzo [pain] per realizzare ciò che era stato fatto molto meglio e fu quindi superato fin dal principio, partorendo una creatura nata morta [a still-born child] (. . .)*, p. 61. Cosa del tutto falsa. Come si vede già solo dal testo da noi riportato, Frege era a conoscenza della scuola algebrica inglese; semplicemente, non era ne soddisfatto. Per il resto, la versione americana corrisponde alla lettera all'originale.

[Sch00] Arthur Schoenflies, *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **8** (1900), I–VI, 1–250 (attenzione: si trova dopo la p. 231), Bericht enstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. A p. 16, riferendosi al teorema di Schröder-Cantor-Bernstein, osserva, *Der (. . .) Satz ist von E. Schröder und F. Bernstein ziemlich gleichzeitig bewiesen worden* [Il teorema è stato dimostrato quasi contemporaneamente da E. Schröder e F. Bernstein] e in una nota scrive, *Der Schröder'sche Beweis ist zuerst erwähnt in der Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. Bd. V, S. 81 (1896). Er beruht auf Anwendung des Logikcalcüls. Vgl. auch Nova Acta Leop, Bd. 71, S. 303 (1898)* [La dimostrazione schröderiana è apparsa per la prima volta in [**Sch01**, p. 81] e si basa su un'applicazione del calcolo logico. Si veda anche [**Sch98c**, p. 303]]. Da notare che Schröder non compare nella bibliografia di p. VI.

[Sch01] Ernst Schröder, *Über G. Cantorsche Sätze*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **5** (1901), 81–82, è l'ultimo scritto pubblicato da Schröder. Si tratta del riassunto di un contributo alla riunione della *Deutsche-Mathematiker Vereinigung* (di cui il nostro faceva parte dal 1891), tenutasi a Francoforte dal 21 al 26 settembre 1896 (vedi le prime pagine della rivista e [**Gut04**, p. 56]); poco più di una nota, ma a p. 82, riferendosi al concetto di *equipotenza* cantoriano scrive: *Zwei Mengen sind dann und nur dann gleichmächtig, wenn entweder keine oder jene von beiden eineindeutig auf einen echten Teil der anderen abgebildet werden kann* [Due insiemi sono equipotenti se e solo se uno (o nessuno) può essere mappato in maniera biunivoca in una parte propria dell'altro]. Questo è, come noto, il teorema di Cantor-Bernstein-Schröder. Ovviamente, in questo articoletto non c'è spazio per nessuna dimostrazione.

[Sch04a] Arthur Schoenflies, *Mengenlehre*, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen (Leipzig) (Wilhelm Franz Meyer, ed.), Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1898–1904, herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. Erster Band: Arithmetik und Algebra. Schoenflies a p. 189 cita il teorema di Schröder–Cantor–Bernstein: *(. . .) ist es in letzter Zeit gelungen, zu erweisen, dass zwei transfinite Kardinalzahlen gleich sind, wenn jede der beiden Mengen einem Teil der andern äquivalent ist (. . .)* [(. . .) in tempi recenti si è riusciti a dimostrare che due numeri cardinali trasfiniti sono uguali [tra loro] quando ognuno dei due insiemi [corrispondenti ai due numeri in oggetto] è equivalente ad una parte dell'altro (...)]. L'autore commenta in una nota: [**Bor98**, a.a.O]. *Der Beweis stammt von* F. Bernstein. *Zuerst bewiesen wurde der Satz 1896 von* E. Schröder. *Vgl. dazu* [**Sch01**], *sowie* [**Sch98c**] [[**Bor98**]. La dimostrazione è di *F. Bernstein*, ma il teorema venne dimostrato per la prima volta nel 1896 da *E. Schröder*. A riguardo, vedi [**Sch01**] e [**Sch98c**]], pp. 184–207.

[Sch04b] Hermann Schubert, *Grundlagen der Arithmetik*, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen (Leipzig) (Wilhelm Franz Meyer, ed.), Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1898–1904, herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. Erster Band: Arithmetik und Algebra. Molteplici sono i riferimenti a Schröder nel testo. Si tratta di [**Sch73**] e [**Sch74a**]. Ma viene ricordato anche [**Sch66a**] a proposito della distributività nella nota 11 di p. 7. A p. 6, invece, Schubert nota come la sua presentazione delle quattro operazioni fondamentali sia debitrice all'approccio schröderiano: *Der hier im Text vollzogene logisch* Aufbau *der vier fundamentalen Operationen der Arithmetik wurde am ausfürlichsten von* E. Schröder *in* [**Sch73**] *durchgefürt* [La giustificazione logica delle quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica, come viene, qui, nel testo presentata, venne realizzata nella maniera più esaustiva da *E. Schröder* in [**Sch73**]]. Infine, è da citare come a conclusione del suo conributo, Schubert noti che, allo stesso modo con cui si definisce la moltiplicazione a partire dall'addizione, ci deve essere un'operazione di quarto grado [vierter Stufe] deducibile dalla moltiplicazione: *Um zu einer direkten Operation vierter Stufe zu gelangen, hat man* a^a *als Exponenten von* a *zu betrachten, die so entstandene Potenz wieder als Exponenten von* a *zu betrachten und so fortzufahren, bis* a $b-$*mal gesetzt ist. Nennt man das Ergebnis dann* $(a;b)$, *so stellt* $(a;b)$ *das Resultat der direkten Operation vierter Stufe dar* [Per ottenere un'operazione diretta di quarto grado, bisogna considerare a^a come esponente di a, poi, di nuovo, la potenza che così viene formata [a^{a^a}] come [nuovo] esponente di a e così procedere fino a che a venga posto [un numero] b [di] volte. Si chiami il risultato $(a;b)$. Allora $(a;b)$ rappresenta il risultato dell'operazione diretta di quarto grado] [**Sch04b**, p. 27]. Schubert intende dire che, $x^x, x^{x^x}, x^{x^{x^x}}, \ldots x^{x^{\cdots x}} = x;y$, dove y è il numero di volte che si compie questa operazione di esponenziazione. Il fatto curioso è che Schubert utilizza per questa operazione la stessa simbologia usata da Schröder per indicare il prodotto tra relazioni [**Sch66c**, p. 29], pp. 1–23.

[Sch66a] Ernst Schröder, *Der Operationskreis des Logikkalkuls*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1966, ristampa anastatica dell'edizione di Lipsia del 1877.

[Sch66b] ______, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, vol. 1, Chelsea Publishing Company, New York, 1966, la prima (ed unica edizione) è del 1890 a Lipsia presso Teubner; morto Schröder nel 1902, Eugen Müller editò una seconda parte del volume, chiamandola *Abriss* [compendio] che venne pubblicata nel 1909.

[Sch66c] ______, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, vol. 3, Chelsea Publishing Company, New York, 1966, quest'ultima parte delle *Lezioni* venne pubblicata a Lipsia presso Teubner, nel 1895. Il volume rimase incompiuto: *(...) liegt für die Schlußlieferung des dritten Bandes das Material in den Manuskripten Schröders vor* [(...) il materiale per necessario per completare il il terzo volume si trova nei manoscritti di Schröder] [**Ver08**, p. 311].

[Sch66d] ______, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, vol. 2, Chelsea Publishing Company, New York, 1966, la prima parte venne pubblicata a Lipsia nel 1891, presso Teubner, la seconda nel 1905, sempre a Lipsia e presso Teubner, l'editore di fiducia di Schröder.

[Sha98] Joel H. Shapiro, *Composition Operators and Schröder's Functional Equation*, Contemporary Mathematics (1998), no. 213, 213–228, Shapiro a p. 214 osserva: *Sebbene Schröder non abbia sviluppato teoremi generali a proposito della sua equazione, egli diede* *origine allo studio sistematico della iterazione come di un mezzo per risolvere equazioni analitiche e fu il primo ad usare la coniugazione come strumento fondamentale per comprendere l'iterazione in prossimità di un punto fisso attrattivo. Queste idee di Schröder si trovano in ogni libro di dinamica complessa, ma raramente sono attribuite a lui. Ironicamente, il lavoro per cui ottenne credito, la sua dimostrazione del teorema di [Cantor] - Schröder - Bernstein in teoria degli insiemi, contiene un errore fondamentale*.

[Sko70] Thoralf Skolem, *Selected Works in Logic by Th. Skolem*, Universitetsforlaget, Oslo - Bergen - Tromsö, 1970, edito da Jens Erik Fenstad.

[Sti85] Prof. J. Stilling (ed.), *Tageblatt der 58. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte*, Buchdruckerei G. Fischbach, Strassburg, 1885, in questo volume che raccoglie gli interventi al congresso dei ricercatori naturali e dei medici tedeschi del 1885 alle pagine 353–354 si trova un breve riassunto dell'intervento che tenne Schröder. È interessante perché il teorema 14 viene riformulato per la prima volta anche in termini di sussunzione. Così si parla di *Gesammtaussage* [enunciato totale] che generalizza il concetto di *equazione totale* [vereinigte Gleichung] visto sopra.

[Tar41] Alfred Tarski, *On the Calculus of Relations*, The Journal of Symbolic Logic **6** (1941), no. 3, 73–89.

[TayXV] Brook Taylor, *Methodus Incrementorum Directa & Inversa*, Typis *Pearsonianis*, Londini, MDCCXV, prostant apud *Gul. Innys* ad Insignia Principis in Cœmeterio *Paulino*.

[Tre67] Adolf Trendelenburg, *Historische Beiträge zur philosophie*, vol. 3, Verlag von G. Bethge, Berlin, 1867.

[Ver08] B.G. Teubner's Verlag, *B.G. Teubner's Verlag auf dem Gebiet der Mathematik, Naturwissenschaften, Tecknik nebst Grenzwissenschaften*, B.G. Teubner Verlag, Lepzig–Berlin, 1908, abgeschlossen im April 1908. In questo volume vengono raccolte le pubblicazioni della Teubner nell'ambito scientifico fino al 1908. Ovviamente, si trova anche [**Sch66a**]. È interessante come i curatori del libro lo descrivono, tenuto conto dell'ambizione di Schröder, in quel momento, di logicizzare completamente quel calcolo che con Boole era ancora parzialmente matematico: *Die Schrift entwickelt eine durchaus elementare Methode, die Probleme der deduktiven Logik mittelst eleganter Rechnung zu lösen - wodurch diese Disziplin in die große Kette der rein mathematischen Wissenschaften endgültig eingereiht ist* [Questo scritto sviluppa un metodo sempre elementare per risolvere i problemi della logica deduttiva mediante un calcolo elegante - in base al quale questa disciplina [i.e. la logica] può essere annoverata definitivamente tra le scienze pure matematiche] [**Ver08**, p. 310]. Esattamente il contrario di quanto *sembra* affermare Schröder. Scrivo 'sembra', in quanto credo che sia palese come le sezioni dedicate al problema della soluzione e alle operazioni inverse malcelino uno spirito più matematico che logico. Infatti, i redattori di [**Ver08**] scrivono alla pagina seguente, commentando [**Sch66c**]: *Seit dem Erscheinen des Verfassers* Operationskreis des Logikkalkulkuls *hat die rechnerische Behandlung der deduktiven Logik (...) bedeutende Fortschritte gemacht* [Dalla pubblicazione delle *Operazioni del calcolo logico* dell'autore [i.e. Schröder] la trattazione calcolistica della logica deduttiva (...) ha compiuto significativi passi in avanti]. Ritengo che ad animare il problema della soluzione nelle *Operazioni del calcolo logico* sia lo stesso afflato che sostiene le ricerche della soluzione dell'equazione funzionale $z = \psi(\zeta)$ in [**Sch69a**, p. 300].

[vH67] Jean van Hejenoort, *From Frege to Gödel - A Source Book in Mathematical Logic, 1879 - 1931*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.

[Web09] Heinrich Martin Weber, *Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis*, vol. 1, Teubner, Leipzig, 1909, a p. 18, parlando di teoria degli insiemi, dopo aver nominato Schönflies e Hessenberg, osserva la parentela delle ricerche di Dedekind [Verwandt, aber von Cantor unabhängig sind die Untersuchungen von Dedekind] e scrive: *Auch das*

Werk von E. Schröder [**Sch73**] *ist als eins der ersten, das eine tiefere Auffassung der elementaren Arithmetik anbahnte, zu erwänen* [Si deve anche menzionare il lavoro di E. Schröder [**Sch73**], come uno dei primi che diede inizio ad una comprensione più profonda dell'aritmetica elementare]. È curioso che Weber non citi gli scritti schröderiani più propriamente insiemistici, come gli ultimi.

[Wei56] Karl Weierstrass, *Über die Theorie der analytischen Facultäten*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **51** (1856), 1–60.

[Wun80] Wilhelm Wundt, *Logik, eine Untersuchung der Principien der Erkenntnis und der Methode wissenschaftlicher Forschung*, Verlag von Ferdinand Enke, Stuttgart, 1880, erster Band: Erkenntnislehre.

[Wüs09a] Reiner Wüst, *Mathematik für Physiker und Mathematiker*, vol. 1: Reelle Analysis und Lineare Algebra, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2009, dritte Auflage.

[Wüs09b] ———, *Mathematik für Physiker und Mathematiker*, vol. 2: Analysis im Mehrdimensionalen und Einführungen in Spezialgebiete, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2009, dritte Auflage.

Titoli dal Catalogo LED:

Logica e linguaggio nel Medioevo • a cura di R. Fedriga e S. Puggioni

N. Ambrosetti • *L'eredità arabo-islamica nelle scienze e nelle arti del calcolo dell'Europa Medievale* • e-book

Un grande matematico dell'Ottocento. Omaggio a Eugenio Beltrami (1835-1900)

L. Gaeta • *Segni del cosmo. Logica e geometria in Whitehead*

D. Bondoni • *Parafrasi schröderiane. Ovvero: Ernst Schröder, Le operazioni del calcolo logico* • Testo originale tedesco con traduzione italiana commentata e annotata a cura di Davide Bondoni • e-book

D. Bondoni • *La teoria delle relazioni nell'algebra della logica schroederiana* • e-book

F. Marietti • *Icona e diagramma. Il segno matematico in Charles Sanders Peirce*

M. Franchella • *Come l'amor platonico. Kantismo e platonismo nella filosofia della matematica del XX Secolo*

Bruno de Finetti • A cura di G. Lunghini e A. Robbiati Bianchi