

## UN «CONFUSO CIARPAME FILOSOFICO» Riflessioni sulla filosofia della matematica in Fries e Kant

### 1. *La possibilità di una «filosofia della matematica pura»*

In questo articolo si cercherà di analizzare il significato della riflessione friesiana e kantiana sulla matematica. Si tenterà di mostrare i punti di contatto tra Kant e Fries, ma soprattutto le *differenze* tra le due concezioni. Questo esame avrà un proprio fulcro analitico nel tentativo friesiano di *dimostrare il quinto postulato*. Emergerà la figura di un filosofo originale, anello di congiunzione tra la filosofia della matematica del suo maestro Kant e la moderna – ed apparentemente assai lontana – concezione assiomatico-formale.

Fries definisce la matematica «l'arsenale di tutte quelle ipotesi in base alle quali poi le spiegazioni nell'esperienza hanno successo» ed aggiunge: «in tale contesto ciò che ha maggior peso è sicuramente lo sviluppo matematico, ma i concetti fondamentali sono filosofici, e se si dovesse riuscire ad accordare gli scienziati su questo potremmo ottenere moltissimo per quel che riguarda la dottrina delle ipotesi»<sup>1</sup>.

Bisogna precisare cosa significhi esattamente definire la filosofia della natura, *in quanto* deve costituirsi come filosofia *matematica*, un «arsenale d'ipotesi» e quale sia il rapporto tra «sviluppo matematico» e «concetti fondamentali» filosofici cui Fries fa cenno.

<sup>1</sup>) J.F. Fries, *Die mathematische Naturphilosophie nach philosophischer Methode bearbeitet. Ein Versuch* (d'ora in poi indicato con MN), in Fries, *Sämtliche Schriften*. Nach den Ausgaben letzter Hand zusammengestellt, eingeleitet und mit einem Fries-Lexikon versehen von G. König - L. Geldsetzer, Aalen, Scientia, 1967– (d'ora in poi indicati con Fr. seguito dall'indicazione del volume), XIII, p. 10.

La necessità per gli scienziati di accettare lo statuto *filosofico* dei concetti fondamentali è per Fries essenziale. Può addirittura rientrare nella *definizione* della sua filosofia ed è capace di *distinguerla* rispetto ad altre tradizioni come l'empirismo<sup>2</sup>. Sembra che ci si muova, quindi, entro una prospettiva kantiana. Come si dice nei *Primi fondamenti metafisici della scienza della natura*:

Tutti i filosofi della natura, che desideravano procedere matematicamente nel loro lavoro, si sono quindi sempre serviti (anche se inconsciamente) di principi metafisici, e dovevano servirsene, pur protestando solennemente contro ogni pretesa della metafisica sulla loro scienza. [...] Tutta la vera metafisica [...] contiene le operazioni pure del pensiero, e di conseguenza concetti e principi *a priori* che, per primi, connettono secondo leggi il molteplice delle *rappresentazioni empiriche*, sicché esso può divenire *conoscenza empirica*, cioè esperienza. Così dunque quei fisici matematici non riuscirono affatto a fare a meno di principi metafisici, e, tra questi, di principi tali che rendono il concetto del loro specifico oggetto, cioè la materia, adatto *a priori* ad essere applicato all'esperienza esterna, non potendo quindi fare a meno del concetto di movimento, di riempimento dello spazio, di inerzia ecc. Ma, oltre a ciò, essi ritennero a ragione come assolutamente non conforme alla certezza apodittica, che volevano dare alle loro leggi naturali, far valere in questo caso principi meramente empirici, sicché preferirono postulare tali leggi, senza indagare sulla loro origine *a priori*.<sup>3</sup>

<sup>2</sup> Quando nel 1908 uno dei più significativi proseguitori del pensiero friesiano, Leonard Nelson, comunica a Gerhard Hessenberg le linee fondamentali del programma per la costituenda «società per la filosofia critica» (a cui nel 1913 si aggiungerà una «Jakob Friedrich Fries Gesellschaft») il terzo punto recita: «Rifiuto dell'empirismo matematico e scientifico, ossia riconoscimento di giudizi sintetici a priori in matematica e scienza della natura. Ciò significa, per quel che riguarda la seconda, che ogni induzione presuppone certi principi guida, validi indipendentemente da ogni fondazione induttiva; dunque riconoscimento della dipendenza del metodo induttivo da una metafisica della natura» (Lettera di Nelson a Hessenberg del 29-3-1908, reperibile presso il *Zentrales Staatsarchiv* di Postdam, 90 Ne 1, *Nachlass Nelson*, n. 389. Cfr. V. Peckhaus, *Hilbertsprogramm und Kritische Philosophie*, Göttingen 1990, Vandenhoeck & Ruprecht, p. 152 ss.). Che Nelson ponga direttamente in relazione accettazione di una metafisica della natura e rifiuto dell'empirismo significa concepire l'induzione come un metodo la cui validità è *derivata* e che come tale *non può* assolvere a quel ruolo fondativo che l'empirismo le riconosce. Qui è importante sottolineare che, al di là del problema dell'induzione, la necessità di ammettere una *filosofia* della natura, e in particolare una filosofia *matematica*, implichi che il rapporto tra la matematica e le scienze naturali è deciso sul terreno filosofico e *non* su quello matematico.

<sup>3</sup> I. Kant, *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, in *Kant's Gesammelte Schriften*, hrsg. von der Preußischen (poi Deutschen) Akademie der Wissenschaften, Leipzig - Berlin, Walter de Gruyter, 1900- (d'ora in poi Ak.), IV, pp. 465-565, in part. p. 472; trad. it. *Primi principi metafisici della scienza della natura*, a cura di S. Marcucci, Pisa, Giardini editori e stampatori in Pisa, 2003, p. 30.

Kant non vuole mettere in dubbio la natura matematica dei principi della scienza della natura, ma il compito di assicurare il proprio oggetto alla scienza non può essere svolto dalla matematica, in quanto i principi, che determinano quel che vi è di necessario nell'oggetto, hanno a che fare con un concetto, quello di esistenza, «che non si lascia *costruire* [...] nell'intuizione a priori»<sup>4</sup>. È pertanto una distinzione di metodo, ossia quella tra metodo costruttivo e metodo filosofico, operante mediante analisi di concetti dati, a determinare la necessità di rimandare alla metafisica per fondare la possibilità dell'oggetto della scienza. Tuttavia è al contempo necessario, perché si dia scienza, che dell'oggetto sia possibile dare a priori non solo il concetto, ma anche l'intuizione: per rendere ragione dello statuto *scientifico* della conoscenza della natura è allora necessaria la costruzione matematica.

Ora, se Fries sembra non far altro che riprendere concisamente questa argomentazione di Kant, si deve tuttavia notare un'importante differenza. Egli non parla tanto di principi, quanto di *ipotesi*. Non solo, quei principi garantiscono l'oggetto alla scienza in quanto sono *costitutivi* della stessa esperienza. Al contrario, nel passo friesiano l'esperienza è qualcosa che, *dopo* la formulazione di quelle ipotesi, costituisce il terreno di applicazione della loro forza esplicativa: tra il momento della formulazione dell'ipotesi matematica e la sua applicazione non c'è immediata coincidenza. La distinzione è sottile e tuttavia fondamentale, poiché solamente nell'intervallo, che quel «*poi*» determina, può situarsi per Fries una *nuova*<sup>5</sup> disciplina filosofica, ovvero una *filosofia della matematica pura*<sup>6</sup> intesa come filosofia che ha per oggetto «il sistema completo delle forme matematiche»<sup>7</sup>.

Naturalmente, non si deve fraintendere il significato di questa innovazione. L'interesse di Fries non è in primo luogo una riflessione sullo statuto dei concetti matematici, ma pur sempre l'edificazione di una filosofia della natura. Il suo problema fondamentale è quello di una fondazione filosofica della scienza. Tuttavia la prospettiva cambia radicalmente, poiché al problema di una fondazione metafisica si sostituisce quello eminentemente *metodologico* di rendere ragione dell'applicazione (e dell'applicabilità) della matematica nella scienza della natura. Se cioè per Kant la necessità di una costruzione a priori dell'oggetto nell'intuizione dà ragione della comune origine sintetica a priori di matematica e fisica pura, e dunque spiega *immediatamente* la possibilità di applicare la prima allo studio dei fenomeni (in quanto la conoscenza matematica si radica nelle condizioni

<sup>4</sup>) *Ivi*, p. 468; trad. it. p. 27; corsivo mio.

<sup>5</sup>) Sulla novità dell'espressione «filosofia della matematica» usata da Fries, vd. L. Gelsdsetzer - G. König, *Vorbemerkung der Herausgeber zum 13. Band*, in MN, pp. 23\* s. e 44\* s.

<sup>6</sup>) Questo è il titolo della prima sezione della *Mathematische Naturphilosophie* friesiana. Cfr. MN, pp. 3-395.

<sup>7</sup>) MN, p. 50.

di possibilità dei fenomeni stessi), in Fries il significato scientifico della matematica è fondato filosoficamente mediante un'analisi del suo metodo, non attraverso uno studio del suo statuto trascendentale. Il fulcro di questa nuova possibilità di assumere immediatamente ad oggetto la matematica nel suo contenuto metodico è espresso dal concetto di *semplicità della spiegazione*<sup>8</sup>. È tale semplicità che regola le forme di applicazione della matematica allo studio della natura e, in generale, segna la differenza tra una metafisica della natura e la scienza *fisica*. La prima si limita ad analizzare ed individuare delle *strutture legali*, delle semplici *forme* di leggi. Essa non fonda la possibilità trascendentale dell'esperienza, ma costituisce una guida nella sua *valutazione*. Dunque non la *conoscenza*, come in Kant, comincia con l'esperienza, ma più specificatamente la «dottrina della natura»<sup>9</sup>. Sarà la fisica, mediante il metodo sperimentale, a determinare alcune di queste forme in vere e proprie leggi di natura. La posizione friesiana è talmente esplicita che si può parlare di una ispirazione *convenzionalistica* presente nel suo pensiero: se ad esempio l'osservazione mostrasse fenomeni apparentemente in disaccordo con la legge  $p = v/t$ , sarebbe in linea di principio possibile *scegliere* tra cambiare la legge suddetta o invece mantenere la legge e porsi alla ricerca di forze concomitanti, non ancora osservate, operanti in accordo con essa. È solo il criterio di *semplicità geometrica* che ci guida nella scelta tra queste due opzioni<sup>10</sup>.

Riassumendo, il concetto di semplicità e la svolta metodologica data alla considerazione filosofica della matematica permettono di definire in

<sup>8</sup>) Scrive Fries (MN, p. 400 s.): «La teoria pura non ci prescrive un determinato fondamento esplicativo di determinati fenomeni, ma *ci guida solamente nella ricerca* e ci mostra se in un certo ambito abbiamo raggiunto l'obiettivo di spiegazioni che siano le più semplici possibili. In questo la mia concezione si allontana da quella di Kant. Io affermo ad esempio, contro di lui, che è impossibile che la filosofia possa provare: ogni materia deve possedere una forza d'attrazione proporzionale alla massa. Il concetto di forza d'attrazione consente cioè infiniti gradi delle forze che attraggono, come si può tentare di determinare a priori quale sia di questi quello che spetta a una certa quantità di materia? Non è possibile pensarlo. Dobbiamo presupporre la possibilità di gradi infinitamente diversi di attrazione e repulsione per masse date. Se tuttavia l'esperienza ha deciso che un insieme di fenomeni si possono spiegare presupponendo una forza proporzionale alla massa, che agisce con un grado determinato d'attrazione in rapporto inverso al quadrato delle distanze, la teoria pura ci dice che questo è uno dei fondamenti esplicativi geometricamente più semplici e che nessuno troverà per questi fenomeni una spiegazione ancora più semplice. La teoria pura, dunque, sviluppa le sue leggi solamente *in abstracto*, le offre poi come fondamenti esplicativi per classi determinate di esperienze, grazie a ciò guida la ricerca di spiegazioni e determina alla fine quanto sia soddisfacente una spiegazione, una volta trovata». Per il prosieguo della nostra analisi è importante lo stretto legame tra semplicità e «fondamenti esplicativi *geometrici*». Vedremo che, non solo tale semplicità caratterizza il significato scientifico-empirico dell'uso della geometria, ma è alla base della «soluzione» friesiana del postulato delle parallele. Essa non ha quindi una funzione estrinseca alla matematica, bensì intrinseca.

<sup>9</sup>) MN, p. 400.

<sup>10</sup>) Cfr. MN, p. 403. Cfr. inoltre Geldsetzer - König, *Vorbemerkung* cit., p. 24\*.

modo parzialmente nuovo rispetto a Kant il significato della relazione tra matematica e scienza, e di inaugurare una riflessione sulla matematica pura come *condizione preliminare* per la stessa filosofia della natura. Per comprendere il significato di questa innovazione ho scelto la strada, per così dire, più difficile, ovvero il luogo dell'opera di Fries dove questi appare più fortemente legato ai *limiti* di una concezione della matematica, che già cominciava a sgretolarsi in quegli anni: il suo tentativo di *dimostrare* il quinto postulato euclideo <sup>11</sup>.

Prima di intraprendere questo difficile cammino, tuttavia, è necessario fare un passo indietro, per considerare se e in che modo una riflessione analoga (quantomeno per l'argomento) a quella di Fries sia svolta in Kant.

<sup>11</sup>) Un'utile introduzione a questo problema è K. Herrmann, *Mathematische Naturphilosophie in der Grundlagendiskussion: Jakob Friedrich Fries und die Wissenschaften*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 2000, pp. 125-136. Alle pp. 223-232 sono riportate anche due lettere di Fries a Reichel in cui è presente un primo abbozzo della "dimostrazione" del V postulato. L'argomentazione presente in MN costituisce comunque lo stadio più maturo della riflessione friesiana. Secondo L. Geldsetzer e G. König, alla luce dell'atteggiamento innovativo di Fries, è addirittura «deplorabile» che non gli sia riuscito di estenderlo anche all'analisi dello statuto della geometria (*Vorbemerkung* cit., p. 28\* nt. 33). Il mio tentativo sarà di mostrare *entro che limiti*, invece, questo avvenga. Per quel che riguarda la concezione friesiana della geometria e la sua aria obsoleta rispetto alla grande fioritura ottocentesca, basti considerare alcune date: la *Mathematische Naturphilosophie* è del 1822; il fondamentale scritto gaussiano *Disquisitiones generales circa superficies curvas* è del 1827. Ma già da molto prima sono presenti nell'epistolario di Gauss i segni della progressiva maturazione di una visione originale sull'argomento. Si veda, per esempio, la lettera a Grelling dell'11-4-1816: «sarebbe desiderabile che la geometria di Euclide non fosse vera, poiché allora saremmo in possesso di un'unità di misura universale a priori» (in C.F. Gauss, *Werke*, hrsg. von Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen 1870– [poi ristampato in Gauss, *Werke*, Hildesheim - New York, Georg Olms Verlag, 1973–], VIII, p. 169); o ancora: «sono sempre più convinto che la necessità della nostra geometria non possa venire provata, quantomeno non dall'intelletto umano né per l'intelletto umano. Forse in un'altra vita giungeremo ad un diverso discernimento dell'essenza dello spazio, che ora ci è irraggiungibile. Fino ad allora si dovrebbe porre la geometria allo stesso livello non dell'aritmetica, che è puramente a priori, ma ad esempio della meccanica» (lettera ad Olbers del 28-4-1817, in Gauss, *Werke* cit., p. 177). A questi esempi, volti a mostrare l'inadeguatezza della riflessione friesiana sulla geometria, si può però opporre la testimonianza, risalente al 1863, del botanico M.J. Schleiden: «Quando studiavo a Göttingen [attorno al 1832], uno studente tra i più strambi si presentò a Gauss, vide sul tavolo [la *Mathematische Naturphilosophie*] e disse: "Ma come professore, si dedica a questo confuso ciarpame filosofico?" Al che Gauss, molto serio, si rivolse a lui con queste parole: "giovannotto, se nel corso del suo triennio è stato capace di apprezzare e comprendere questo libro allora ha impiegato il suo tempo molto meglio della maggior parte dei suoi compagni"» (in M.J. Schleiden, *Über den Materialismus in der neueren deutschen Naturwissenschaft*, Leipzig 1863, p. 43. Presente in Gauss, *Der «Fürst der Mathematiker» in Briefen und Gesprächen*, hrsg. von K.R. Biermann, Frankfurt a.M., Harri Deutsch Verlag, 1990, p. 144). Siamo quindi ben cinque anni dopo la pubblicazione delle *Disquisitiones*. Tuttavia per Gauss l'opera di Fries riveste ancora un interesse matematico specifico. Un indizio del motivo di tale sopravvivenza lo si ha nel titolo dell'opera da cui il passo è tratto: quello che interessa Gauss come Schleiden non sono tanto i singoli risultati, ma la riflessione friesiana *sul metodo della scienza*.

## 2. *La filosofia della matematica in Kant*

Da quel che si è detto sembrerebbe impossibile che in Kant ci sia lo spazio per una riflessione specifica *sulla* matematica. Si deve invece riconoscere che il criticismo svolge per questa un ruolo di delineazione e fondazione del suo significato. Si è visto come per Kant solo la riflessione filosofica può garantire alla scienza l'intelligibilità del suo oggetto. Essa fonda la differenza tra una semplice *postulazione* dell'apoditticità delle leggi di natura e la sua giustificazione o *deduzione*.

Si deve considerare la funzione del criticismo rispetto alla conoscenza matematica secondo un rapporto analogo, in particolare con riferimento alla geometria. L'analisi che ne dà Kant nell'*Esposizione trascendentale del concetto di spazio*<sup>12</sup> serve non solo a determinare le condizioni della sua applicabilità all'esperienza empirica (dottrina dell'idealità trascendentale dello spazio<sup>13</sup>), ma anche a dare una giustificazione filosofica di quella che potrei definire la concezione classica della geometria, ossia della natura *costruttiva*<sup>14</sup> di tale

<sup>12</sup> Cfr. I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, in Ak. III, p. 54, corrispondente a B 40-41; trad. it. *Critica della ragione pura*, a cura di P. Chiodi, Milano, TEA, 1996, p. 68 s. D'ora in poi per la *Critica della ragione pura* si utilizzerà l'abbreviazione *KrV* seguita dalla sola indicazione delle pagine secondo le edizioni A (1781), B (1787), e dalla sigla *Chiodi* per la traduzione italiana.

<sup>13</sup> La possibilità di tale spiegazione è poi l'oggetto esplicito degli assiomi dell'intuizione, all'interno dell'*Analitica dei principi* della *Critica della ragion pura*. L'assioma stabilisce che «tutte le intuizioni sono quantità estensive» (*KrV* B p. 202, *Chiodi*, p. 172). Il fenomeno può essere intuito solo nello spazio e nel tempo. A fondamento della sua intuizione vi è dunque una sintesi dell'omogeneo, tale sintesi è per l'appunto la quantità (estensiva). Essi sono rappresentati solo in base alla stessa sintesi che determina spazio e tempo in generale. Scrive Kant: «L'intuizione empirica non è possibile che mediante l'intuizione pura (spazio e tempo): di conseguenza, quanto la geometria afferma vale incondizionatamente anche per la prima, e sono perciò *tagliate fuori sin dall'inizio* tutte le traversie implicantanti che oggetti dei sensi possano non adeguarsi alle regole della costruzione spaziale (ad esempio alla regola della divisibilità infinita della linea o dell'angolo). In caso diverso, infatti, è negato allo spazio, e con esso all'intera matematica, ogni validità oggettiva, sollevando dubbi sulla possibilità e sui limiti della sua applicabilità ai fenomeni. [...] Ciò che la matematica, nell'uso puro dimostra [riguardo alla forma pura di ogni intuizione, ossia spazio e tempo in generale] vale anche necessariamente [per l'esperienza esterna]» (*KrV* A p. 166 / B p. 206, *Chiodi*, p. 174; corsivo mio).

<sup>14</sup> Su questo aspetto vd. p. es. E. Agazzi - D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Milano, Edizioni Scientifiche e Tecniche Mondadori, 1978, p. 38 s., e G. Lolli, *Da Euclide a Gödel*, Bologna, Il Mulino, 2004, p. 20 ss. Lolli osserva che alla base della concezione greca della geometria c'è la convinzione di poter trovare una definizione semanticamente evidente e universalmente accettata per i concetti di base, che quindi indicano enti reali, per quanto astratti. Alle definizioni, intese come definizioni *reali*, si aggiungono i postulati come disposizioni operative che presiedono alla costruzione di figure più complesse e *specifiche* della scienza geometrica (in questo senso si avrebbe in Euclide una distinzione assioma-postulato analoga a quella aristotelica). La differenza tra questa possibilità per la geometria e l'impossibilità di una simile operazione per i numeri determina

scienza, la cui *postulazione* è alla base degli *Elementi* di Euclide. Prima di tutto dobbiamo allora considerare il metodo degli *Elementi*.

### 2.1. Costruzione e *V postulato* negli «*Elementi*» di Euclide

Come è noto, fin dalla prima proposizione emerge tutta la distanza tra la concezione greca e quella moderna dell'assiomatica e della sua funzione nella dimostrazione geometrica. La proposizione I.1 dice: «Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero»<sup>15</sup>. La dimostrazione avviene prendendo un segmento AB e costruendo su di esso due circonferenze C1 e C2 aventi per raggio il segmento stesso e il centro rispettivamente nei suoi due estremi A e B. Il punto C in cui si intersecano le due circonferenze sarà il terzo vertice del triangolo equilatero ABC. Ora, quel che manca a questa dimostrazione perché essa sia valida<sup>16</sup> è la dimostrazione dell'*esistenza* del punto C, ovvero del fatto che i due cerchi si intersechino effettivamente. Dal punto di vista di Euclide, tuttavia, questa non è una critica esatta, dal momento che proprio in questa proposizione si mostra come sia possibile *costruire*, quando necessario, il punto, con «riga e compasso». Esso dà, cioè, le *condizioni di soddisfacibilità* della dimostrazione<sup>17</sup>. Non viene esplicitamente enunciato il postulato qui indispensabile, ma la costruzione stessa è svolta in modo tale che sia resa possibile la sua applicazione.

In realtà, tali condizioni non sono espresse qui, ma nella proposizione I.22 (possibilità di costruire un triangolo dati i suoi lati), di cui la proposizione I.1 costituisce il caso particolare per il triangolo equilatero. La I.22 afferma: «con tre rette uguali a tre rette date, costruire un triangolo: *occorre dunque che la somma di due di esse, comunque prese, sia maggiore della rimanente*»<sup>18</sup>. La parte sottolineata esprime già nell'enunciazione del teorema

una differenza importante, anche metodologica, tra geometria e aritmetica. In quest'ultimo caso, si pensi ad esempio all'algoritmo del massimo comune divisore, le dimostrazioni diventano «una *performance* di tipo assiomatico [nel senso moderno] – infatti l'algoritmo del massimo comune divisore è generalizzabile ai domini euclidei» (Lolli, *Da Euclide a Gödel* cit., p. 24). Non c'è quindi bisogno per tali dimostrazioni di sapere *di cosa* si stia parlando, ma è sufficiente determinare rigorosamente le *relazioni reciproche* tra le diverse proprietà delle operazioni coinvolte (*ibidem*). L'importanza della distinzione tra geometria ed aritmetica sul piano assiomatico diverrà chiara quando si tratterà di una analoga distinzione presente in Kant.

<sup>15</sup> Euclide, *Elementi*, a cura di A. Frajese - L. Maccioni, Torino, Utet, 1970, p. 77 (d'ora in poi *El.*).

<sup>16</sup> Dal punto di vista moderno, ma l'osservazione è già presente negli immediati successori di Euclide. Cfr. Frajese, *Il sesto postulato di Euclide*, «Periodico di matematiche» 1-2 (1968), pp. 150-159.

<sup>17</sup> Per quanto segue si veda l'articolo summenzionato di Frajese ed il suo commento alle proposizioni I.12 e I.22 in *El.*, p. 93 ss. nt. 9 e p. 110 ss. nt. 19.

<sup>18</sup> *El.*, p. 22; corsivo mio.

da dimostrare le condizioni che rendono possibile la costruzione richiesta. Dati tre segmenti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , si stabilisce che  $A + B > C$ ,  $A + C > B$ ,  $B + C > A$ . La proprietà che lega tra loro i tre segmenti è quella proprietà dei segmenti di un triangolo dimostrata nella I.20 ed è essa (o meglio il suo inverso) a rendere possibile la dimostrazione, in quanto implica che si dia un'intersezione tra le circonferenze. Se infatti poniamo i segmenti  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , uguali a quelli dati, su una retta  $r$ , in modo che abbiano un estremo in comune a due a due, e costruiamo le circonferenze aventi per raggio rispettivamente  $A'$  e  $C'$  e per centro rispettivamente l'estremo comune tra  $A'$  e  $B'$  e  $B'$  e  $C'$ , il segmento  $B'$  risulterà essere la distanza tra i due centri. Ora, dato che è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza (per la clausola indicata in corsivo), le due circonferenze saranno secanti <sup>19</sup> *se si ammette una caso speciale dell'assioma di continuità*. Esso affermerà che, se un arco di circonferenza ha un estremo interno ed uno esterno ad una circonferenza, allora *esisterà* un punto in comune tra l'arco e la circonferenza. Nel caso della proposizione I.1 la condizione suddetta segue immediatamente dal fatto che il triangolo debba essere equilatero e ciò rende superfluo esplicitarla.

Resta ovviamente aperto il problema del perché una proposizione, che si può considerare caso particolare di un'altra, sia posta in un contesto del tutto diverso. È forse segno di una mancanza di rigore? Al contrario, mi sembra l'indizio di una rigorosità almeno in questo caso compatibile con le esigenze moderne, *se si assume la natura costruttiva dei postulati*. È stato osservato che le prime quattro proposizioni degli *Elementi* costituiscono «una specie di [loro] prolungamento» <sup>20</sup>. La prima proposizione ha la funzione di *dimostrare* una possibilità di costruzione, che non è già contenuta nei postulati, specificatamente nel III. Si deve tener presente che i postulati vanno intesi come idealizzazioni di processi effettivi di rappresentazione grafica di certi elementi, quindi di operazioni reali svolte con riga e compasso. Ora, il III postulato (si possa descrivere un cerchio con un raggio qualsiasi e un centro qualsiasi) fa ovviamente riferimento a un'operazione svolta con l'ausilio di un compasso. Tuttavia esso è un compasso *euclideo*, cioè tale da mantenere un'apertura costante tra le sue aste solo finché tocca la carta. Le aste si ripiegheranno immediatamente un volta staccatolo dal foglio. Dunque, questo postulato non implica immediatamente la possibilità di trasportare su un segmento rettilineo arbitrario un altro segmento. Per questa operazione sarebbe necessario un compasso rigido. Le prime tre proposizioni servono

<sup>19</sup>) Tale proprietà è l'equivalente per le circonferenze dell'assioma di Pasch, che a sua volta coincide con l'inversa della proposizione I.20 definita anche «postulato del triangolo». Cfr. Agazzi - Palladino, *Le geometrie non euclidee* cit., pp. 40 e 104.

<sup>20</sup>) *Ivi*, p. 43. Cfr. Frajese in *EL*, p. 79 nt. 2.



proprio a *dimostrare* la possibilità di questa costruzione fondamentale, il che spiega la necessità di una tale posizione per la I.1: da essa si dimostra la possibilità di applicare a un punto qualsiasi un segmento uguale ad uno dato (proposizione I.2) e la possibilità di sottrarre un segmento da un altro (proposizione I.3). Ma allora negli *Elementi* opera un criterio di economia, volto a ridurre le assunzioni al minimo numero indispensabile per rendere ragione deduttivamente di ogni possibile costruzione geometrica<sup>21</sup>.

Per quel che riguarda il V postulato, il discorso non può essere così semplice. È la sua stessa natura costruttiva ad essere affetta da difficoltà<sup>22</sup> non aggirabili. Il riferimento a strumenti concreti rende la questione evidente. Esso implica che la costruzione sia un'operazione perfettamente dominabile, abbia quindi un'evidenza intuitiva. Come è noto, il V postulato ne è privo. Esso non dice semplicemente che mi è permesso prolungare indefinitamente un segmento, ma cosa accadrà *al limite* di un *qualsiasi* prolungamento indefinito, a seconda della misura degli angoli interni formati dalle due rette con la trasversale comune.

Vi sono anche ragioni, per così dire sistematiche, che mettono in dubbio la sua natura costruttiva. Euclide cerca di evitare il più possibile l'uso del postulato, che fa la sua prima comparsa solo nella proposizione I.29 («Una retta che cada su rette parallele forma gli angoli alterni uguali fra loro, l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto, ed angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti»<sup>23</sup>). La cautela nel suo utilizzo è testimoniata dal fatto che "allunga" addirittura la serie di proposizioni dimostrate senza l'intervento del V postulato: le proposizioni I.16 e I.17 (riguardanti proprietà e relazioni degli angoli interni ed esterni di un triangolo) sono già implicite nella proposizione I.32 (dove si stabilisce che la somma di un angolo esterno di un triangolo è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti e che gli angoli interni di un triangolo hanno somma pari a due angoli retti). Euclide le dimostra comunque perché è possibile farlo *senza* il postulato, mentre non si può nel caso della I.32. Non solo, il V è strettamente legato al IV, che è l'unico di natura esplicitamente non costruttiva (stabilisce l'uguaglianza tra tutti gli angoli retti), e tuttavia è fondamentale per la possibilità delle costruzioni geometriche dato che fornisce una misura costante per l'angolo retto.

Cosa ancor più importante, la possibilità di costruire una parallela ad una retta data *non* dipende dal V postulato. Essa è dimostrata nella propo-

<sup>21</sup> Cfr. C.B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1990, p. 125 s. Per quel che riguarda la I.4 (primo criterio di congruenza dei triangoli), essa si può addirittura considerare un vero e proprio postulato. Cfr. Frajese in *El.*, p. 83 s. nt. 4.

<sup>22</sup> Fries stesso ne è perfettamente cosciente ed infatti riserva l'appellativo di disposizioni (*Forderungen*) per la costruzione geometrica solo ai primi tre postulati.

<sup>23</sup> *El.*, p. 122.

sizione I.31, che è l'*unica*, dopo la I.29, a dipendere solo da proposizioni che non implicano il postulato delle parallele. Sarebbe allora più esatto chiamarlo postulato della *parallela*, dato che la sua funzione fondamentale è garantire l'*unicità* di quella costruzione (per meglio dire, si dimostra che esso è *equivalente* ad affermare che la parallela è unica). Darò di quanto detto un'esibizione non certo formalmente ineccepibile, ma utile a cogliere il problema.

Assumiamo una retta  $r$  ed una retta  $s$  e tagliamole con una trasversale  $t$ . Se facciamo ruotare  $s$  attorno al punto  $P$  di intersezione tra  $s$  e  $t$ , il V postulato (o meglio un'enunciazione equivalente) implica che esisterà sempre un punto  $Q$ , in cui  $r$  ed  $s$  si intersecano, *finché* la somma degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ , formati rispettivamente dall'intersezione di  $t$  con  $s$  e di  $t$  con  $r$ , sarà minore di  $180^\circ$ . Detto altrimenti, l'esistenza del punto  $Q$  è garantita finché l'angolo  $\gamma$  formato da  $r$  ed  $s$  esiste.  $\gamma$  sarà progressivamente sempre più piccolo (e  $\alpha$  proporzionalmente sempre più grande) fino a "scompare" nel preciso istante in cui  $\alpha$  sarà abbastanza grande da far sì che  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . In questo momento il triangolo formato dalle tre rette cessa di esistere, e con esso il punto  $Q$ . Ma l'istante immediatamente successivo esso "riapparirà" su  $r$  dall'altra parte rispetto a  $t$ <sup>24</sup>. Dal punto di vista strettamente costruttivo, il V postulato asserisce proprio l'unicità di quell'istante, qualcosa di difficilmente dominabile sul piano, dato che il punto  $Q$  sarà allora *infinitamente* lontano su  $r$  e quando "ricomparirà" sarà *infinitamente* lontano dall'altra parte rispetto a  $t$ . Irrompe nella nostra considerazione della geometria euclidea la problematica nozione di infinito<sup>25</sup>.

Il V postulato stabilisce che vi è un'unica situazione in cui la costruzione di  $Q$  è impossibile. Esso nega quindi, non solo la possibilità di generare sempre  $Q$ , ma anche che vi siano due (e quindi infinite) situazioni in cui risulta impossibile. Ma questo sarebbe falso (e quindi sarebbe falso il V po-

<sup>24</sup>) Se, prima della "scomparsa",  $Q$  si trovava a destra di  $t$  su  $r$ , "riapparirà" a sinistra di  $t$  su  $r$ .

<sup>25</sup>) Tanto problematica che la nozione comune VIII (il tutto è maggiore della parte) è probabilmente stata introdotta per escludere, a livello assiomatico, dal suo ambito di ricerca la trattazione dei possibili paradossi seguenti all'assunzione che ogni segmento ha un numero infinito di punti, ammissione necessaria se si vuol dar conto anche della presenza di grandezze incommensurabili (cfr. Agazzi - Palladino, *Le geometrie non euclidee* cit., p. 39). A questo proposito, è interessante mettere in relazione la nozione comune con la prima definizione degli *Elementi* (il punto è ciò che non ha parti). Frajese (in *El.*, p. 65 nt. 1) ne ricorda l'ascendenza pitagorica e l'esatta corrispondenza alla definizione platonica di unità (cfr. p. es. *Sofista*, 245a; *Repubblica*, 527a). Inoltre nota come non sia mai utilizzata nel testo. Mi sembra, tuttavia, che acquisti un preciso significato sistematico in relazione alla nozione VIII. Per "salvare" l'infinita divisibilità del segmento in coerenza con la nozione VIII è infatti indispensabile caratterizzare il punto come qualcosa che "non dipende" da essa. Se ne deve pertanto esplicitare la "mancanza di parti".

stulato) se si assumesse la finitezza del piano. In questo caso per un punto  $P$  esterno alla retta  $r$  possono passare infinite rette parallele ad  $r$ . Questa situazione è, tra l'altro, *facilmente rappresentabile* (dato che ci limitiamo al finito), ad esempio mediante un cerchio dove  $r$  sia una corda. Man mano che si aumenta la dimensione del cerchio il numero di parallele diminuirà, ma *sarà sempre infinito* finché ci limitiamo a superfici finite. Ci sarà una *discontinuità* nel momento in cui si pensa il piano come infinito, quando le parallele da infinite si ridurranno ad una.

Il problema di tale discontinuità si rivela essenziale. Lo si è visto operare in due modi differenti: nella “scomparsa” del punto  $Q$  quando  $\alpha + \beta = 180^\circ$  e, in questo secondo esempio, nel passaggio dal piano finito a quello infinito. È possibile “salvare” la continuità? Nel primo caso possiamo immaginare che esista un punto  $Q'$  all'infinito in cui si incontrano  $r$  ed  $s$  quando la somma di  $\alpha$  e  $\beta$  è  $= 180^\circ$ . Esso costituirebbe il punto di “passaggio” nel movimento del punto  $Q$  su  $r$  da destra a sinistra rispetto a  $t$ . Ma allora ci troveremmo in una situazione in cui nessuna retta è parallela: rette con uguale direzione individueranno un unico punto all'infinito. Rette con direzione diversa individueranno diversi punti all'infinito.

Si osservi che nel salvare la continuità con l'introduzione di questo nuovo punto all'infinito *non* si è entrati in un tipo di geometria diversa da quella euclidea, se con questo si intende una geometria in cui è negato il  $V$  postulato. Quel che si è fatto è passare alla geometria *proiettiva*. È questa una geometria *più generale* di quella euclidea. Un suo modello piano è il piano *proiettivo*, che si ottiene dal piano euclideo *ampliandolo* con i punti all'infinito. Si può dimostrare che gli assiomi proiettivi sono validi non solo nella geometria euclidea così ampliata, ma anche in quella ellittica e in quella iperbolica (se anche in questo caso si introducono i punti all'infinito). L'apparente “ellitticità” del modello considerato si spiega con il fatto che il piano riemanniano è, per così dire, immediatamente interpretabile come modello della geometria proiettiva piana <sup>26</sup>.

Nel secondo esempio la situazione è più complessa. Non a caso Saccheri “dimostra” l'impossibilità dell'ipotesi dell'angolo acuto, corrispondente alla situazione descritta di un numero infinito di rette parallele a una retta data, proprio perché ritiene di poter mostrare che all'infinito essa entra in contraddizione con relazioni geometriche dimostrabili indipendentemente

<sup>26</sup>) E infatti, come assiomi di ordinamento in geometria proiettiva si possono assumere gli assiomi di separazione della geometria ellittica. Cfr. Agazzi - Palladino, *Le geometrie non euclidee* cit., p. 263 ss. Si noti che, se la scoperta di geometrie non euclidee implica l'indipendenza *dal V* postulato dagli altri assiomi (modello di Poincaré), la possibilità di costruire modelli proiettivi per tutte e tre le geometrie implica la possibilità di una geometria (la proiettiva, appunto) indipendente *dal V* postulato.

dal V postulato. Egli dimostra che, sotto tale ipotesi, sono possibili solo le relazioni seguenti tra rette nel piano <sup>27</sup>.

1. Le rette sono incidenti.
2. Non sono incidenti e hanno una perpendicolare in comune. Se per «non incidenti» si intende «parallele», questa proposizione equivale a dire che rette parallele hanno una perpendicolare comune. Ma questo equivale ad affermare l'*unicità* della perpendicolare condotta da un punto a una retta e di conseguenza rette incidenti non potranno avere una perpendicolare in comune. Tutto questo è derivabile dalla proposizione I.28, quindi è indipendente dal V postulato. Il terzo caso, specifico per l'ipotesi dell'angolo acuto, è il seguente.
3. Le rette non sono incidenti, non hanno una perpendicolare comune e si avvicinano indefinitamente l'una all'altra.

Le rette di tipo 1 e 2 avranno, *per ragioni di continuità*, una retta di separazione tra i due gruppi. Saccheri riesce a dimostrare che essa è di tipo 3 e questo gli consente di concludere che l'ipotesi dell'angolo acuto è falsa perché «ripugna alla natura della retta». Una retta di tipo 3 si troverebbe ad avere, in un punto *all'infinito*, due perpendicolari comuni e quindi contraddirebbe a proprietà stabilite senza far ricorso al V postulato. Ma:

con ciò egli cade in errore, poiché estrapola all'infinito proprietà valide al finito; infatti non è evidentemente la stessa cosa, per due rette, avere in comune un punto e avere in comune un punto all'infinito. Tra l'altro, rette che hanno in comune un punto si tagliano, mentre rette che hanno in comune un punto all'infinito si toccano, ma non si tagliano. Può anche darsi che l'esistenza di rette aventi questo particolare comportamento asintotico «ripugni alla natura della retta», ma purtroppo, questa *non è una contraddizione*. <sup>28</sup>

Come si è fatto notare prima, la natura del V postulato, non riducibile ad una semplice disposizione costruttiva, è chiaramente esibita da questa sua peculiarità: non si limita a prescrivere, di rette formanti con una trasversale angoli interni minori di  $180^\circ$ , *che* si possono *prolungare all'infinito*, ma stabilisce cosa avviene al *limite* di questo prolungamento, ossia le due rette si incontrano. Ora, è evidente che questo è controllabile sempre nel finito, e quindi solo se si interpretano le rette alla maniera di Euclide, come *segmenti* di retta, prolungabili all'infinito, *ma sempre finiti*. Ma se ci poniamo su un piano finito, c'è il rischio di trovarci nella situazione suddetta, ossia di avere infiniti segmenti di retta che non si incontrano con il segmento dato. Il II postulato, però, prescrive che si possa estendere arbitrariamente una linea

<sup>27</sup>) Per quanto segue, cfr. Agazzi - Palladino, *Le geometrie non euclidee* cit., p. 58 ss.

<sup>28</sup>) *Ivi*, p. 61. Si osservi che, se quel che dice Saccheri fosse esatto, la geometria proiettiva sarebbe *dipendente* dal V postulato e quindi non sarebbe.

(e quindi il piano), per quanto essa resti sempre finita, ed il V stabilisce, potremmo dire, che a un certo punto in questa estensione del piano avremo l'incontro tra i segmenti, che quindi il piano è prolungabile sempre abbastanza da rendere secanti due segmenti con le proprietà suddette.

Si deve osservare però, che questo varrà sempre nel caso *particolare*, per il segmento *dato*. In quel punto potranno comunque darsi ancora infiniti *altri* segmenti, che non incontrano la retta. Ma allora esso implica una condizione più forte (evidente se lo si declina nella versione equivalente di *unicità* della retta), che concerne un limite assoluto alle nostre possibilità di costruzione. Ma così si stabilisce una condizione non costruttiva e per farlo *non* è evitabile il V postulato, dato che gli altri non possono svolgere una simile funzione. Se la nozione di infinito solo *potenziale* è sufficiente per i primi quattro, non può dar ragione della disposizione introdotta con il quinto<sup>29</sup>. Per renderlo superfluo, Saccheri si è dovuto porre nell'infinito e al contempo *postulare* (erroneamente) che le proprietà valide al finito lo fossero anche all'infinito, pensando di trarre una contraddizione laddove non c'è.

Ora, nel condurre quest'analisi, si è verificato uno scarto nel significato di «costruzione». Di fatto, si è implicitamente considerato il concetto di costruzione come una sorta di *sostituzione*, nel quadro della concezione antica della geometria, del paradigma moderno di esattezza assiomatica, implicante l'esplicitazione di assiomi di continuità ed esistenza. L'idea delle «condizioni di applicabilità» indicherebbe un uso tacito di assiomi elaborati consapevolmente solo a partire dal XIX secolo. Ma questa nozione non può rendere conto delle ultime osservazioni. Essa implica già una considerazione della matematica come sistema ipotetico-deduttivo<sup>30</sup> e questo non è il caso del concetto di costruzione geometrica<sup>31</sup>. Si potrebbe essere

<sup>29</sup>) È interessante notare che Fries, come si vedrà, esplicita i due elementi suddetti: l'infinità dello spazio è una caratteristica necessaria della geometria euclidea *a causa* del V postulato. In un certo senso, esso introduce l'infinità dello spazio.

<sup>30</sup>) In realtà, perché si possa parlare di una concezione autenticamente moderna, manca almeno l'idea che la geometria, come in generale ogni disciplina matematica, sia un sistema esclusivamente *formale*, dove il significato dei termini primitivi non è dato dalla corrispondenza a un *ente reale*, dotato di *proprietà* specifiche, ma mediante la stessa assiomatica. Questa sarebbe per l'appunto *l'unica* differenza, che distingue una concezione «costruttiva» della geometria da quella moderna. È questo realismo che renderebbe ovvi assiomi come quello di continuità.

<sup>31</sup>) Il che spiega, tra l'altro, il significato storico dell'opera di Saccheri. Essa è il *primo* tentativo di *dimostrare* il V postulato traendo una contraddizione dalla sua negazione, un passo essenziale nel cammino verso una concezione della matematica come sistema ipotetico-deduttivo. I tentativi precedenti di venire a capo del problema delle parallele cercavano invece di sostituire il postulato con uno *più evidente*, ossia pienamente dominabile restando sul piano del finito e dunque coerente con la natura costruttiva degli altri postulati.

ancora più radicali e dire che, se questo fosse esatto, allora il sistema di Euclide sarebbe irrimediabilmente *sbagliato*.

Per capirlo, si torni alla proposizione I.1. Si è detto che, seppure Euclide non dia esplicitamente una dimostrazione dell'esistenza del punto C, sono da lui indicate le condizioni di applicabilità di una simile dimostrazione. È tuttavia possibile costruire un modello in cui, pur valendo gli assiomi, non sia dimostrabile *sempre* la proposizione I.1. Michael Friedman ne dà il seguente esempio:

Si copra il piano euclideo con coordinate cartesiane in modo tale che il punto medio del segmento AB abbia coordinate (0, 0), il punto A abbia coordinate (-1/2, 0), ed il punto B abbia coordinate (1/2, 0). Allora il punto d'intersezione C desiderato ha coordinate (0,  $\sqrt{3}/2$ ). Si eliminino ora tutti i punti con coordinate irrazionali: il risultato è un modello in  $Q^2$ , dove Q è l'insieme dei numeri razionali. Questo modello soddisfa tutti gli assiomi di Euclide, ma, naturalmente, nel modello non esiste il punto C. Così esso dà forma concreta alla "possibilità" di non intersezione, una "possibilità" che deve pertanto essere esclusa da un assioma di continuità.<sup>32</sup>

Il vero problema è che la concezione costruttiva non comporta tanto l'assunzione implicita dell'esistenza di certi enti, ma stabilisce la possibilità di *generare* gli enti matematici in funzione delle esigenze della dimostrazione. E il processo di generazione esclude una considerazione puramente logica (quindi analitica), ma implica un processo spazio – *temporale*, ciò che Kant fonda trascendentalmente nella sua dottrina della matematica come scienza *sintetica a priori*.

<sup>32</sup>) M. Friedman, *Kant and the Exact Sciences*, Cambridge (Mass), Harvard University Press, 1992, p. 60. Come egli fa notare subito dopo, si potrebbe pensare di "salvare" Euclide interpretando il II postulato come se affermasse la continuità (in senso dedekindiano) della retta. Ma questo implica una distinzione, sconosciuta fino al tardo XIX secolo, tra *densità* e *continuità*. È inoltre possibile, ponendosi in un'ottica moderna, costruire altri modelli simili, ma non implicanti il riferimento alla continuità: «si eliminino tutti i punti del piano eccetto i due punti A, B. Sia la "linea" AB semplicemente la coppia {A, B}, sia il "cerchio" C1 il singoletto {A} e il "cerchio" C2 il singoletto {B}. La "linea" AB soddisfa il II postulato? Può essere "prodotta in modo continuo"? Si noti nuovamente che né "può essere prodotta" né "in modo continuo" sono analizzati logicamente. Quindi, da un punto di vista strettamente logico, possiamo dare a entrambi l'interpretazione che vogliamo: stabiliamo, ad esempio, che significhino tutti e due "avere due elementi". Allora il II postulato è ovviamente soddisfatto e così gli altri assiomi. Quindi, l'assiomatizzazione euclidea non implica nemmeno l'esistenza di più di due punti» (*ivi*, p. 61). Vorrei solo far notare che per costruire questo modello si è dovuto abbandonare anche una concezione realista degli termini primitivi, nel primo caso questo non è necessario.

## 2.2. *Il metodo costruttivo della matematica secondo Kant*

A compendio della concezione kantiana del metodo matematico, e della natura sintetica a priori dei suoi giudizi, si cita spesso il seguente passo della *Dottrina trascendentale del metodo*:

La conoscenza matematica è conoscenza razionale per *costruzione* di concetti. Ma *costruire* un concetto significa rappresentare a priori la corrispondente intuizione. La costruzione d'un concetto implica perciò un'intuizione *non empirica*, la quale dunque, in quanto intuizione, costituisce un oggetto *singolo*, ma, nel contempo, in quanto costruzione d'un concetto (cioè d'una rappresentazione universale), deve esprimere nella rappresentazione qualcosa di valido universalmente rispetto a tutte le intuizioni possibili che rientrano sotto lo stesso concetto. Così, costruisco un triangolo rappresentando l'oggetto che corrisponde a questo concetto o per mezzo della semplice immaginazione nell'intuizione pura, o, basandomi su questa, anche sulla carta, nell'intuizione empirica; ma, in ognuno dei due casi, interamente a priori, senza che ne abbia tratto il modello da una esperienza qualsiasi.<sup>33</sup>

Da questo passo risulta evidente che, secondo il Kant del periodo critico, la necessità del riferimento all'intuizione pura – e dunque la natura sintetica a priori dei giudizi matematici – e la specificità del metodo matematico rispetto a quello filosofico – consistente nel suo procedimento costruttivo – hanno lo stesso significato: «costruire un concetto *significa* rappresentare a priori la corrispondente intuizione». Ma questa coincidenza non esaurisce l'intera riflessione kantiana sul concetto di costruzione matematica. La “scoperta” del carattere costruttivo del suo metodo è anzi cronologicamente precedente alla “scoperta” delle forme pure dell'intuizione.

L'esempio più significativo della riflessione precritica sull'argomento è dato dall'*Indagine sulla distinzione dei principi della teologia naturale e della morale* del 1764. In essa Kant imposta la differenza tra metodo matematico e filosofico in termini apparentemente molto simili alla *Critica della ragione pura*. La metafisica parte da concetti *dati* e deve prima di tutto procedere a un'analisi rigorosa del contenuto ancora confuso di tali concetti. La matematica può procedere in modo assai diverso, ovvero per «connessione arbitraria» di concetti. L'esempio che fa Kant è quello di una conica ottenuta per rotazione di un triangolo rettangolo attorno a uno dei suoi cateti. Per un occhio abituato alla prospettiva attuale è di massimo interesse la connotazione di *arbitrarietà* di tale processo: essa implica che i concetti matematici non siano *dati*, ovvero non esistano *prima delle definizioni*. Questa concezione appare di straordinaria modernità, tanto da

<sup>33</sup>) *KrV* A p. 713 / B p. 742, *Chiodi*, p. 517.

indurre Francesco Barone a parlare di «preludio aurorale» alla moderna concezione della matematica come sistema ipotetico-deduttivo<sup>34</sup>.

Quel che mi interessa sottolineare è l'assoluta indipendenza di questo significato di costruzione dalla natura sintetico-intuitiva dei giudizi matematici. La «costruzione arbitraria di concetti» è qui limitata alle *definizioni*, non riguarda le dimostrazioni che da esse seguono. La derivazione dei teoremi dagli assiomi, quindi il momento specifico del *giudizio* matematico, è ancora regolato dal principio di non contraddizione<sup>35</sup>. Il problema della *dimostrazione*, sia questa metafisica o matematica, è mostrare sempre come il predicato sia *contenuto* nel concetto del soggetto. La differenza tra proposizioni dimostrabili e indimostrabili sta solo nel fatto che nelle seconde è necessario un processo di scomposizione del concetto per far emergere il termine medio. In entrambi i casi il processo è rigorosamente logico e retto dal principio d'identità e di contraddizione. Da ciò Kant può concludere che «la metafisica *non ha* [...] principi formali o materiali di certezza che siano di natura diversa da quelli della geometria»<sup>36</sup>.

A questo punto, l'introduzione dell'intuizione pura come fondamento di possibilità dei giudizi matematici costituirebbe una sorta di «involuzione»<sup>37</sup>, la chiusura definitiva di un possibile percorso critico capace di vedere nella matematica un sistema formale e non semplicemente una funzione della conoscenza fisica della natura.

Coerentemente con questo giudizio, la scoperta delle geometrie non euclidee è stata interpretata come definitiva confutazione della dottrina kantiana della matematica quale scienza sintetica a priori, che ha il suo fondamento di determinazione (*Bestimmungsgrund*) nello spazio e nel tempo. Essa, infatti, dimostra che la geometria non è *in quanto tale* scienza dello spazio, bensì teoria formale. La negazione del V postulato non produce affatto esiti contraddittori, il criterio *formale* della verità è perfettamente soddisfatto. Per quel che riguarda poi l'utilità in fisica della matematica, essa sarebbe un problema da decidersi *empiricamente*.

Ma c'è chi ha pensato di poter considerarla, al contrario, come definitiva *conferma*, se non della lettera, almeno dello spirito della dottrina kantiana. Essa dimostra infatti la natura sintetica e non analitica degli assiomi. Il

<sup>34</sup>) F. Barone, *Logica formale e trascendentale. I. Da Leibniz a Kant. Nuova edizione*, Milano, Unicopli, 1999, p. 188.

<sup>35</sup>) Il che, tra l'altro, rafforza l'impressione di modernità che si riceve dal leggere queste pagine.

<sup>36</sup>) I. Kant, *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral*, in Ak. II, pp. 273-301, in part. p. 295; trad. it. *Indagine sulla distinzione dei principi della teologia naturale e della morale*, in I. Kant, *Scritti precritici*, Bari, Laterza, 2000, a cura di P. Carabbelese, revisione di R. Assunto e A. Pupi, pp. 215-248, in part. p. 240; corsivo mio.



problema fondamentale non è, però, quello della sinteticità, bensì della priorità e dunque *necessità* degli assiomi euclidei. Secondo Kant, essa sarebbe di natura addirittura *intuitiva*.

Se si cerca di giudicare la questione in modo equilibrato, bisogna distinguere l'apparato gnoseologico cui *storicamente* Kant fa riferimento e di cui si serve, dal compito che si assume impostando con le tre *Critiche* un'indagine trascendentale sulla possibilità della conoscenza. Il trascendentalismo non si riduce all'individuazione sistematica di un bagaglio ritenuto immutabile di conoscenze a priori. In questo senso, esso si limiterebbe a rendere espliciti quei contenuti metafisici che altri utilizzerebbero inconsapevolmente. Ma non oltrepasserebbe affatto il piano della semplice *postulazione* di principi metafisici. Con il termine trascendentale si connota invece un tipo di indagine riflessa *sulla* conoscenza a priori, volta a rendere ragione della sua applicabilità all'esperienza e, più in generale, delle condizioni *necessarie* a spiegare la *possibilità* della conoscenza stessa<sup>37</sup>. Si può dunque parlare «di un generale “atteggiamento trascendentale” kantiano [...] ispirato alla funzione che l'a priori ha nel condizionare sia la possibilità di un dominio culturale effettivamente costituito sia la ricerca di tale possibilità instaurata sul riconoscimento dell'effettualità del dominio culturale stesso»<sup>38</sup>. È alla luce di tale «atteggiamento» che si deve valutare il significato della relazione tra intuizione pura e scienza matematica in Kant, senza per questo ritenersi chiamati a «salvare» a tutti i costi una dottrina divenuta insostenibile. Per tale motivo ritengo utile un veloce confronto con chi, invece, si è cimentato in una simile impresa.

La concezione kantiana della matematica non sembra in alcun modo ridicibile alla distinzione contemporanea tra matematica pura ed applicata. Questa è un'acquisizione ormai consolidata nell'esegetica kantiana. Tuttavia, è stato ritenuto possibile reinterpretare la dottrina dell'intuizione pura come *compatibile* con la distinzione suddetta<sup>40</sup>. Kant si sarebbe preoccupato di

<sup>37</sup>) Francesco Barone, ad esempio, pur riconoscendo l'originalità del discorso kantiano, ne lamenta l'unilateralità, che privilegia esclusivamente il problema della scienza matematica della natura, ma lascia in ombra quello dello sviluppo logico-formale della matematica. Cfr. Barone, *Logica formale e trascendentale* cit., p. 197 s.

<sup>38</sup>) Come afferma Kant: «non è una rappresentazione trascendentale né lo spazio né una qualche determinazione a priori di esso, ma si può chiamare trascendentale solo la conoscenza che queste rappresentazioni non sono di origine empirica e la possibilità che hanno di rapportarsi egualmente a priori agli oggetti d'esperienza» (*KrV* A p. 12 / B p. 25, *Chiodi*, p. 56).

<sup>39</sup>) Barone, *Logica formale e trascendentale* cit., p. 246.

<sup>40</sup>) Cfr. p. es. L. Beck, *Can Kant's Synthetic Judgements Be Made Analytic?*, in Id., *Studies in the Philosophy of Kant*, Indianapolis, Bobbs-Merrill, 1965, pp. 89-90. Una posizione molto simile a questa si ritrova in un testo di Nelson (quindi di un filosofo che si dichiara – ed effettivamente è – un fedele discepolo di Fries): *Bemerkungen über die Nicht – Euklidische*

fornire un *modello* fisico agli enti matematici, in modo da garantirne non solo l'applicabilità nella ricerca scientifica, ma la *verità*. In questo senso, la dottrina dell'intuizione pura sarebbe interpretabile addirittura come prima risposta al problema del criterio *formale* della verità per la geometria, ossia come dimostrazione della sua non contraddittorietà. Ora, se anche si ammettesse questo, in Kant il rapporto tra teoria e modello risulterebbe invertito: «l'aritmetica non è più la scienza dei numeri in quanto oggetti ideali; essa è la scienza delle *cose numerate*, ed è la natura delle relazioni tra le cose stesse che decide le relazioni tra i numeri»<sup>41</sup>. Ne consegue che in questo caso sarà il modello a determinare la forma della teoria e lo farà a priori, per ragioni *trascendentali*. Non ci si pone, *dopo* aver elaborato una teoria matematica, alla ricerca di un'interpretazione che la corrobori, né tanto meno che ne garantisca la non contraddittorietà. Questa segue immediatamente dall'origine reale della matematica stessa.

Ma se anche si accettasse questo tentativo di attualizzare Kant per “salvarlo”, non si potrebbe far altro che cadere in errore o limitarsi ad affermare una verità triviale. Consideriamo questo secondo punto. Perché la reinterpretazione dell'intuizione pura in chiave di modello sia veramente significativa, deve pretendere di riuscire a dimostrare la propria compatibilità con una concezione moderna, assiomatico-formale, della matematica, ed in particolare della geometria. Se così non fosse, si limiterebbe ad affermare che Kant dà un'interpretazione coerente con la concezione a lui contem-

*Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewissheit*, in *Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik*, Frankfurt a.M., Öffentliches Leben, 1959, pp. 5-87. Il testo fu originariamente pubblicato nel 1905, il che, tra l'altro, fa di Nelson uno dei primi ad adottare una tale “strategia difensiva” verso la filosofia della matematica di Kant (ma, in realtà, ha in mente la revisione friesiana di tale filosofia). I punti in cui si articola il saggio di Nelson sono i seguenti: (1) La coerenza delle geometrie non euclidee implica l'indipendenza del V postulato, ovvero il fatto che la sua negazione non porta ad alcuna contraddizione. (2) Ciò conferma l'origine *non* logica dei postulati. La non contraddittorietà *non* è, diversamente da Hilbert, criterio dell'*esistenza* matematica. (3) Non si può tuttavia accettare nemmeno un'origine empirica, è quindi necessario ammettere l'esistenza di una facoltà come l'intuizione pura kantiana: L'astrazione dall'esperienza serve solo alla coscienza per entrare in possesso di principi a priori che sono validi *indipendentemente* dalla loro esplicitazione nel giudizio (è questa esattamente la concezione friesiana della riflessione critica). (4) L'intuizione pura è allora il modello che fornisce l'*esistenza* agli enti matematici. (5) Si deve riconoscere alla geometria euclidea una sorta di *primato epistemologico*. Senza di questo non ci si potrebbe orientare nell'esperienza. Non si potrebbe decidere, ad esempio, se la terra è sferica in un universo euclideo o piatta in uno riemanniano. Cfr. M. Franchella, *Some Contributions to the History of Logic in the 20<sup>th</sup> Century*, Milano, Cuem, 1997, pp. 63-67. Cfr. anche Peckhaus, *Hilbertsprogramm* cit., p. 161 ss., e P. Bernays, *Über Nelsons Stellungnahme in der Philosophie der Mathematik*, «Die Naturwissenschaften» 16 (1928), pp. 142-145.

<sup>41</sup>) L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique* (1912), Paris, A. Blanchard, 1981, p. 259. Cfr. Barone, *Logica formale e trascendentale* cit., p. 173 ss.

poranea della matematica; il che può anche essere esatto, ma è inutile per dimostrare l'attualità della sua filosofia!

Bisogna mostrare, per esempio, che la concezione del metodo matematico come costruzione nell'intuizione pura non si pone in contraddizione con la moderna concezione della *continuità*. Tuttavia, è facile fornire un modello (quindi nel pieno rispetto dello spirito dell'attualizzazione) in cui risultano superate le presunte difficoltà emerse con la considerazione di  $Q^2$  e che, tuttavia, nega la possibilità di quella conciliazione.

Friedman estende  $Q^2$  in modo da chiuderlo rispetto a tutte e quattro le operazioni fondamentali ed anche all'operazione  $\sqrt{(1+x^2)}$ . L'insieme  $Q^* \times Q^*$  comprenderà allora, oltre ai razionali, i numeri esprimibili come radicali quadratici<sup>42</sup>. Nel nuovo piano individuato dai punti corrispondenti agli elementi di  $Q^* \times Q^*$  sarà ora possibile costruire le circonferenze con intersezione  $\sqrt{3/2}$ . In generale, costituirà un modello assolutamente adeguato della geometria «della riga e del compasso», quindi della geometria elementare euclidea. Esso è ovviamente molto diverso dal piano cartesiano  $R^2$ : «è un insieme numerabile ed ogni elemento è determinato da una sequenza finita di operazioni elementari. In questo senso, non c'è alcun bisogno nella geometria euclidea di qualcosa di tanto forte quanto l'assioma di continuità»<sup>43</sup>.

Si può andare anche oltre l'osservazione di Friedman. Il modello da lui formulato corrisponde esattamente a quello utilizzabile per dimostrare l'indipendenza dell'assioma di continuità dagli altri assiomi: la geometria «della riga e del compasso» è dunque una teoria dove valgono gli assiomi di collegamento, ordinamento, congruenza, l'assioma della parallela, d'Archimede, e vale la *negazione dell'assioma di continuità*<sup>44</sup>.

In questo modello non esistono numeri come  $\sqrt[3]{2}$ : i problemi come la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo o la quadratura del cerchio, che hanno accompagnato la storia della matematica, non saranno risolvibili in essa. Già Cartesio, nella sua *Géométrie*<sup>45</sup>, si era reso conto di tale impossibilità, dato che essi richiedono equazioni di grado superiore al secondo e quindi non rappresentabili mediante costruzioni geometriche

<sup>42</sup>) Ovviamente il modello non sarà chiuso rispetto alla divisione per 0.

<sup>43</sup>) Cfr. Friedman, *Kant* cit., p. 62.

<sup>44</sup>) Per precisione, si osservi che, ammettendo l'assioma di Archimede, la geometria «della riga e del compasso» nega la continuità nel senso dell'assioma di Cantor. Si dimostra che l'assioma di Dedekind e l'assioma di Cantor *più* quello di Archimede sono tra loro interderivabili, non però l'assioma di Dedekind e di Cantor. Quel che è negato in questo modello è allora la *contiguità* degli insiemi di punti e quindi l'*unicità* del punto di separazione. Per questa particolare impostazione del problema della continuità e dell'indipendenza degli assiomi, cfr. Agazzi - Palladino, *Le geometrie non euclidee* cit., pp. 119 e 126 ss.

<sup>45</sup>) Cfr. Boyer, *Storia della matematica* cit., p. 389.

elementari. Questo potrebbe far sorgere un'obiezione: finora si è limitato il concetto di costruzione alla geometria, ma per Kant esso concerne la matematica *in generale*, perciò anche aritmetica e algebra. Laddove non giunge la costruzione con riga e compasso è però possibile giunga un tipo diverso di costruzione, che Kant ha comunque considerato. Quindi il tentativo di interpretare l'intuizione pura come modello per la matematica *in generale* non è accantonabile solo perché risulta difficile applicarlo al caso della geometria. Cerchiamo dunque di vedere se è legittima una restrizione a quest'ambito.

Perché una tale attualizzazione sia praticabile, è necessario assumere che l'unica ragione per cui Kant riconosce ai giudizi matematici lo statuto di giudizi sintetici a priori sia nella sinteticità degli *assiomi*. In essi si verrebbe ad articolare il modello fornito dall'intuizione pura, ossia lo spazio ed il tempo. I teoremi sarebbero sintetici in senso solo derivato, ossia perché dedotti (*analiticamente*) da assiomi sintetico-puri. Se questo fosse corretto, la traduzione del metodo costruttivo in procedimento ipotetico-deduttivo risulterebbe possibile. Ma se anche riuscisse, *non si potrebbe comprendere in essa nient'altro che la geometria*, dato che per Kant solo questa possiede assiomi, mentre in aritmetica o in algebra esistono solamente *formule*<sup>46</sup>. Queste, si pensi al famoso esempio « $7 + 5 = 12$ », sono sintetiche a priori, ma non possiedono il carattere di proposizioni generali vertenti su un certo ambito del reale. Non c'è allora alcuno spazio in Kant per una declinazione in termini assiomatici dell'aritmetica, qualcosa che anche lontanamente possa ricordare l'assiomatizzazione di Peano. Un possibile motivo di tale differenza sta nella natura esclusivamente temporale della costruzione aritmetica: si ricordi la definizione kantiana di numero nella *Dottrina dello schematismo*: «il numero altro non è che l'unità della sintesi del molteplice d'una intuizione omogenea in generale, per il fatto che io *produco il tempo stesso nell'apprensione dell'intuizione*»<sup>47</sup>. L'essenza del numero è quindi nel processo del *calcolo*. Su quest'ultimo punto non mi soffermerò<sup>48</sup>. È sufficiente aver mostrato che, se di modello in senso moderno si può parlare, è solo in riferimento alla geometria.

Il passo che sembra confermare la plausibilità di tale operazione è il seguente brano dell'«Introduzione» alla seconda edizione della *Critica*:

Poiché si riscontrò che i ragionamenti matematici procedono tutti secondo il principio di contraddizione (come è richiesto dalla natura di ogni certezza apodittica), si credette che anche i principi fossero conosciuti in virtù del principio di contraddizione; si trattava però di un errore, perché una proposizione sintetica può certamente esser conosciuta secondo il principio di

<sup>46</sup>) Cfr. p. es. *KrV* A pp. 163-165 / B pp. 204-206, *Chiodi*, p. 173 s.

<sup>47</sup>) *KrV* A pp. 142-143 / B p. 182, *Chiodi*, p. 159; corsivo mio.

<sup>48</sup>) Cfr. comunque alcune veloci considerazioni in nt. 115.

contraddizione, ma solo se si presuppone un'altra proposizione sintetica, da cui possa essere ricavata; non mai dunque in se stessa.<sup>49</sup>

Come fa notare Friedman, però, il fulcro dell'argomentazione sta non tanto in una presunta derivazione analitica dei teoremi dagli assiomi, bensì nel contestare alla *logica* la capacità di dar ragione del contenuto della geometria. Quel che Kant critica è "l'anfibolia" che, dalla semplice necessità, per *ogni* giudizio dotato di significato, di rispettare il criterio formale di verità, ritiene di poter derivare la *sufficienza* di tale criterio per rendere ragione delle rappresentazioni connesse nel giudizio. In questo modo si trascura la necessaria individuazione del *luogo trascendentale* di tali rappresentazioni. È il processo dimostrativo stesso ad essere *situato* nell'intuizione pura. Lo si comprende bene se si porta il processo alle sue estreme conseguenze: mi chiedo perché, una volta cominciato il gioco, ci si debba fermare agli assiomi. Nell'*Esposizione trascendentale del concetto di spazio* è detto che i giudizi della geometria *discendono*<sup>50</sup> dal suo concetto. Perché non intendere quel verbo come «sono analiticamente contenuti»? Gli stessi assiomi diverrebbero semplici esplicitazioni analitiche del *concetto* di spazio. Ma allora Kant sarebbe un razionalista. Nell'*esposizione metafisica* verrebbe data una definizione *confusa* di questa nozione, come «intuizione pura», e l'articolazione geometrica la porterebbe a chiarezza e distinzione: alla «Notio completa seu perfecta»<sup>51</sup> di Leibniz si affiancherebbe la «intuitio» infinitamente determinabile di Kant! Con questo siamo giunti al punto centrale: lungi dal costituire un'involuzione del pensiero kantiano, la dottrina dell'intuizione pura costituisce il segno dell'approfondimento della sua riflessione. Kant comprese come gli strumenti logici disponibili al suo tempo, limitati alla sillogistica, non fossero minimamente in grado di rendere ragione della specificità della conoscenza matematica, ossia il dominio *infinito* su cui verte tale conoscenza. L'unico modo per spiegare questa caratteristica era ricercarne la condizione di possibilità in un ambito extralogico. L'intuizione pura dello spazio fornisce, sì, un modello, ma *non* logico, alla matematica<sup>52</sup>.

Lo spazio è definito in B 40 come «grandezza infinita data». Nella spiegazione di questa definizione Kant si concentra proprio sull'impossibilità da parte dei *concetti*, e dunque della logica, di poter fornire una rappresen-

<sup>49</sup>) *KrV* A p. 10 / B p. 14, *Chiodi*, p. 49.

<sup>50</sup>) Cfr. *KrV* B p. 40, *Chiodi*, p. 68.

<sup>51</sup>) Cfr. p. es. G.W. Leibniz, *Principia logico-metaphysica*, in Id., *Sämtliche Schriften und Briefe*, hrsg. von der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften und der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Reihe 6. *Philosophische Schriften*, IV, Berlin, 1999, pp. 1643-1649, in part. p. 1646; trad. it. *Le verità prime*, in G.W. Leibniz, *Scritti di logica*, a cura di F. Barone, Bari, Laterza, 1992, pp. 181-189, in part. p. 185.

<sup>52</sup>) Cfr. Friedman, *Kant* cit., p. 93.

tazione altrettanto potente. Questi, come note, potranno essere contenuti in un'infinità di altre rappresentazioni, ma lo spazio è *contenutisticamente* infinito e dunque non può essere concetto<sup>53</sup>. In questo modo si garantisce un luogo entro cui si possa svolgere un' indefinita *iterazione* del processo costruttivo. È possibile, ad esempio, *generare* il punto C necessario alla dimostrazione della proposizione I.1. Se si vuole cercare un addentellato con la logica moderna, deve essere riconosciuto piuttosto nel concetto di *decidibilità*. Prendo la definizione di questo termine da un testo di Ettore Casari: «Un insieme per il quale esiste un procedimento mediante cui sia possibile, in un numero finito di passi, decidere se un qualunque individuo dato appartiene o meno all'insieme lo diciamo decidibile»<sup>54</sup>. Come si vede dal modello  $Q^* \times Q^*$ , l'idea che il metodo matematico sia essenzialmente costruttivo, implica la possibilità che ogni suo elemento sia raggiungibile in un numero finito di operazioni elementari. Nella geometria euclidea queste operazioni sono quelle indicate nei primi tre postulati. Kant ci dà un esempio di come questo avvenga nella *Dottrina trascendentale del metodo*, dove mostra la «catena d'inferenze» che «sulla scorta dell'intuizione» conducono, partendo dai soli primi quattro postulati, a dimostrare quale sia la somma degli angoli interni di un triangolo. Riproduce cioè la dimostrazione della proposizione I.20 degli *Elementi*<sup>55</sup>. Naturalmente il punto centrale è il riferimento all'intuizione pura. Anche un'inferenza sillogistica “decide” dopo un numero finito di passi l'appartenenza o meno di un elemento all'insieme. Ma in questo caso il processo sarebbe banale e inadeguato a descrivere l'ambito della conoscenza matematica poiché, essendo la logica

<sup>53</sup> Nel senso tecnico che Kant dà a questo termine nella *Logica* (parte I, cap. I, §§ 7-14). Qui si distingue tra *estensione* e *contenuto* di un concetto (§ 7). Nel primo caso si intende il concetto come *nota* generica che contiene sotto di sé molti altri concetti specifici, mentre nel secondo caso l'esser contenuto del concetto, come concetto parziale, «nella rappresentazione delle cose». In riferimento a questa definizione, è interessante osservare come, nel secondo punto dell'*Esposizione metafisica del concetto di spazio*, Kant immagini una sorta di *annihilatio mundi* al termine della quale resta per l'appunto la rappresentazione di spazio (*KrV A* p. 24 / *B* p. 38 s., *Chiodi*, p. 66 s.). Kant poi prosegue nella *Logica* affermando che un concetto particolare conterrà *in sé* altri concetti generali (§ 13), questi andranno a formare la sua definizione. Più un concetto è particolare, più concetti generali conterrà e viceversa. Si ha dunque un *rapporto inverso* tra contenuto ed estensione dei concetti (§§ 7-8). Particolarità e generalità non sono termini assoluti, ma solo relativi (§ 9), né si danno, entro i concetti, generi sommi o specie infime (§ 11). Ora, se lo spazio è *contenutisticamente* infinito, in quanto ha *in sé* infinite rappresentazioni differenti possibili, ne segue che la sua estensione = 0 (ed infatti non è una rappresentazione particolare, ma addirittura *singolare*, cfr. *KrV A* p. 25 / *B* p. 39, *Chiodi*, p. 67). Esso dunque “viola” tutte le caratteristiche che caratterizzano un concetto e pertanto non può esserlo.

<sup>54</sup> E. Casari, *Computabilità e ricorsività. Problemi di logica matematica*, in *Quaderni della Scuola di studi superiori sugli idrocarburi dell'ENI*, n. 3, Varese, Multa Paucis, 1959, p. 14.

<sup>55</sup> *KrV A* pp. 716-717 / *B* pp. 744-745, *Chiodi*, p. 519.

del sillogismo essenzialmente monadica<sup>56</sup>, è incapace di rappresentare insiemi *infiniti*. L'intuizione dello spazio, in quanto «grandezza infinita data», fornisce invece gli strumenti per descrivere un dominio come quello matematico: è infatti un *quanto* continuo infinitamente divisibile<sup>57</sup>. Il limite di questa analogia diventa però evidente nel caso del V postulato.

L'intuizione dello spazio garantisce l'infinita iterabilità delle operazioni di costruzione, di più, garantisce a priori la densità del dominio geometrico. Ma il metodo della costruzione sembra fallire rispetto al significato del postulato delle parallele. Si ha cioè che, in questo caso, l'insieme risulta per l'appunto solo *costruibile*, ma non *decidibile*. Potrà sapere in un numero finito di passi *che* l'elemento *x* appartiene all'insieme *se esso vi appartiene*, ma non avrà un metodo per determinare in modo analogo che un altro elemento *y* non vi appartiene. *Costruibile* è «un insieme per il quale esista un procedimento mediante cui sia possibile, in un numero finito di passi, raggiungere ogni suo elemento»<sup>58</sup>. Il V postulato ci dice che *se* tra gli angoli si dà una certa relazione, allora sicuramente le due rette si incontrano e quindi potrò raggiungere il punto P d'intersezione. Ma quando quella condizione non si verifica non avrò mai la certezza *meccanica* che *per ogni* punto di una retta essa non si intersechi con l'altra. L'unica possibile giustificazione di ciò è allora non logica, ma trascendentale, si fonda sull'affermazione che lo spazio è *forma* dell'intuizione sensibile.

Così siamo tornati alla questione accennata all'inizio: in Kant non si darebbe una filosofia della matematica, dato che l'unico tipo di matematica che conosce è quella che serve alla conoscenza fisica del mondo, in termini moderni, la matematica applicata. Ma adesso si può osservare che, per così dire, *proprio il riferimento necessario* alla conoscenza scientifica del mondo esterno costituisce il nucleo della sua filosofia della matematica. Non nel senso che solo l'applicazione al mondo fenomenico determina lo statuto sintetico a priori dei suoi giudizi, ma perché i due aspetti trovano una giustificazione comune nella natura intuitivo-pura della rappresentazione di spazio, così come viene mostrata nell'*Esposizione metafisica*. I due elementi non stanno in un rapporto di subordinazione, ma di *coordinazione* immediata<sup>59</sup>.

<sup>56</sup>) Cfr. Friedman, *Kant* cit. pp. 59 e 71.

<sup>57</sup>) Sulle forme dell'intuizione come *quanta* continui, cfr. Kant, *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis*, in Ak. II, pp. 385-419, in part. p. 399; trad. it. *La Forma e i principi del mondo sensibile ed intelligibile*, in Kant, *Scritti precritici* cit., pp. 419-461, in part. p. 436.

<sup>58</sup>) Casari, *Computabilità* cit., p. 14.

<sup>59</sup>) E dunque non si può affermare che Kant conosce solo la matematica applicata, bensì, come ho già detto, che tale distinzione non è tracciabile all'interno del pensiero kantiano.

Che questo sia il giusto modo di intendere la relazione è confermato dalle vicende redazionali dell'*Esposizione trascendentale*. Essa si presenta come sezione autonoma solo con la seconda edizione della *Critica*. Nella prima redazione si faceva seguire l'argomento concernente la geometria ai primi due, dove è stabilita l'a priori del concetto di spazio. Il riferimento alla geometria aveva una funzione analoga, in quanto mostrava che, se la rappresentazione di spazio è semplicemente empirica, allora non si può dar conto dell'apodittività dei principi geometrici. Esso contribuiva alla determinazione dello spazio come intuizione *a priori*<sup>60</sup>. Kant si rende poi conto che il rapporto tra geometria e spazio è differente. È solo la natura intuitivo-pura dello spazio, dimostrata indipendentemente da considerazioni sulla geometria, che può legittimare la sua possibilità come scienza sintetica e a priori. È quel che Kant afferma nel secondo capoverso della nuova *esposizione trascendentale*<sup>61</sup>. Nel paragrafo successivo si mostra che la conoscenza geometrica appena legittimata è applicabile ai fenomeni solo se l'intuizione pura spaziale è forma dell'intuizione empirica. Il vero contributo di Kant alla filosofia della matematica consiste allora nell'aver mostrato, non la necessaria applicabilità ai fenomeni della geometria, ma che anche tale applicabilità deve e può essere giustificata a priori, senza alcun intervento di un qualche principio empirico<sup>62</sup>.

Se dunque si volesse decidere della possibilità di geometrie non euclidee, Kant risponderebbe che la sua filosofia della matematica vieta di farlo dal punto di vista esclusivamente matematico, da quello logico e da quello empirico. È possibile solo ponendoci in un'ottica trascendentale, ed in questo caso è esclusa dal necessario riferimento intuitivo della geometria. Dato che è impossibile per un concetto determinare il proprio oggetto senza un riferimento necessario alle forme dell'intuizione, è implicitamente esclusa la *conoscibilità* di forme di geometria diverse dall'euclidea: esse dovrebbero descrivere mondi che per noi restano inaccessibili<sup>63</sup>.

<sup>60</sup>) *KrV* A p. 24, *Chiodi*, p. 66.

<sup>61</sup>) *KrV* B p. 40 s., *Chiodi*, p. 68.

<sup>62</sup>) E che allora non posso valutare il grado di *verità* delle proposizioni geometriche *sperimentalmente*, come invece *sembra* volesse fare Gauss con la misurazione del triangolo avente per vertici le cime dei monti Hohenhagen, Brocken, Inselberg o lo stesso Lobačevskij. (Cfr. p. es. H.S.M. Coxeter, *Non-euclidean Geometry*, Toronto, University of Toronto Press, 1965, pp. 7 e 10 ss.).

<sup>63</sup>) In una nota al § 26 della *KrV* (B p. 161, *Chiodi*, p. 146) mi sembra Kant chiarisca bene la relazione che si instaura tra concetto ed intuizione nella geometria. Questa richiede non la semplice *forma* dell'intuizione sensibile, che di per sé dà solo il molteplice delle rappresentazioni empiriche, ma l'*unità* del proprio oggetto, ovvero dello spazio. Kant chiama tale unità «intuizione formale». Ora, come la *Deduzione* insegna, solo il concetto può dare unità alle nostre rappresentazioni. Deve pertanto darlo anche alla rappresentazione dello spazio che interviene nella geometria: essa è pur sempre «conoscenza *razionale* per costruzione di *concetti*. Il che significa allora che la possibilità di esplicitare lo spazio come «grandezza infinita



Ora, si potrebbe però dare del nesso trascendentale tra intelletto ed intuizione una lettura diametralmente opposta. La finitezza del soggetto conoscente, costretto a operare mediante sintesi, si risolve nella distinzione necessaria di due facoltà conoscitive e nella riconduzione di spazio e tempo alla specificità *umana* dell'intuizione. All'appercezione come cifra dell'a priori di ogni intelletto finito si affianca l'intuizione determinata secondo le forme spazio-temporali, in quanto caso particolare di *forme* a priori della facoltà recettiva. Questa posizione è effettivamente quella che Kant assume nella *Critica*.

L'idealità trascendentale di spazio e tempo, pertanto la necessità di limitare la conoscenza all'ambito fenomenico, implica un radicamento di queste specifiche forme a priori dell'intuizione nell'essere umano e l'impossibilità di estenderle, se non in modo ipotetico, ad altri enti razionali finiti: essi *possono* organizzare il materiale sensoriale secondo forme identiche alle nostre, ma non è dimostrabile che essi *debbono* farlo, pertanto, quando Kant parla di spazio e tempo, non può esimersi dal connettere alla negazione che questi ci diano gli oggetti come sono in sé un continuo riferimento al *nostro* modo d'intuire:

dunque, *soltanto da un punto di vista umano* possiamo parlare di spazio, di essere estesi ecc., ma se prescindiamo dalla condizione soggettiva, la sola sotto cui possiamo ricevere un'intuizione esterna ed in tal modo essere affetti dagli oggetti, la rappresentazione dello spazio perde ogni significato.<sup>64</sup>

Questo sembra aprire uno spiraglio alla considerazione di geometrie diverse da quella euclidea. Theodor Elsenhans, ad esempio, pensa che le «ricerche metamatematiche» di Gauss e dello stesso Riemann possano essere valutate in analogia con queste considerazioni di Kant. Il riferimento principale è in realtà agli studi di Helmholtz sul significato degli assiomi geometrici. Secondo lui la finzione di esseri razionali bidimensionali, che questi adotta, può essere considerata come un esempio di quella mancanza di necessità di cui parla Kant: a seconda che li si consideri come «spalmati» su un piano infinito o sulla superficie sferica essi darebbero origine a rappresentazioni spaziali completamente diverse, ad una geometria euclidea piana nel primo caso, ad una geometria sferica riemanniana nel secondo<sup>65</sup>.

data», contenente in sé i singoli spazi solo come sue limitazioni, è possibile esclusivamente grazie all'unità della sintesi fornita dalle categorie. L'*Estetica trascendentale* possiede per così dire solo una funzione descrittiva: essa dà un'esposizione metafisica e trascendentale dei concetti di spazio e tempo e mostra come la particolare struttura di quegli oggetti debba necessariamente far riferimento ad un'unità differente da quella solo concettuale. La possibilità trascendentale di quelle esposizioni è però *fondata* dalla funzione sintetica dei concetti puri dell'intelletto.

<sup>64</sup>) *KrV* B p. 42 s. / A p. 27, *Chiodi*, p. 69; corsivo mio.

<sup>65</sup>) T. Elsenhans, *Fries und Kant. Ein Beitrag zur Geschichte und zur systematischen Grundlegung der Erkenntnistheorie*, II, Giessen, Töpelmann, 1906, p. 50 ss.

Ma nel sostenere una tale prospettiva, si dimentica il fatto fondamentale che il «problema dello spazio di Riemann - Helmholtz» può sorgere solo dopo l'abbandono di quella concezione costruttiva della geometria, di cui la *Critica* è la fondazione trascendentale.

Helmholtz parte, come Riemann, dalla concezione generale dello spazio come varietà  $n$  dimensionale (anche se poi limita lo studio al caso dello spazio 3-dimensionale) e assume come *fatto primitivo* l'esistenza di *movimenti rigidi* nello spazio. Solo su questa base si può formulare il programma di «caratterizzare la geometria euclidea e le geometrie non euclidee per mezzo delle proprietà dei loro movimenti rigidi»<sup>66</sup>. Il problema di Kant è invece chiarire la natura eminentemente spazio-temporale del processo matematico: il movimento è visto non come concetto primitivo volto a dare una certa caratterizzazione dello spazio, ma come strumento per la sua *generazione* attraverso il moto di punti. È la sintesi dell'immaginazione produttiva, in quanto processo *nel tempo*, che presiede alla sua descrizione<sup>67</sup>.

### 3. *La filosofia della matematica di Fries*

Il nodo problematico fondamentale della filosofia kantiana della matematica è dunque la caratterizzazione del suo metodo come costruzione nell'intuizione pura. Si è cercato di mostrare come non lo si possa considerare una semplice involuzione del pensiero critico maturo. Esso è la risposta kantiana all'impossibilità del metodo *filosofico*, basato sulla scomposizione di concetti dati secondo le regole del sillogismo, a rendere ragione delle caratteristiche fondamentali del dominio della matematica. Ma si è visto anche il persistere della difficoltà a fornirne una caratterizzazione veramente compiuta. In particolare, esso non riesce a comprendere entro il proprio paradigma il significato del postulato delle parallele. Ciò accade per il semplice fatto che questo recalcitra ad essere considerato una semplice operazione elementare per la generazione di oggetti geometrici. Il V postulato esprime un'assunzione sulla *natura* dello spazio, lo caratterizza come spazio *euclideo*.

<sup>66</sup>) Cfr. H. von Helmholtz, *Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen*, «Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen», 9 (1868), pp. 193-221; ora in *Schriften zur Erkenntnistheorie* (1921), a cura di P. Hertz - M. Schlick, Berlin, Springer, 1998, pp. 59-78; trad. it. *Sui fatti che stanno a fondamento della geometria*, a cura di V. Cappelletti, in H. von Helmholtz, *Opere*, Torino, Utet, 1967, pp. 420-444, in part. p. 426. Cfr. R. Betti, *Lobačevskij. L'invenzione delle geometrie non euclidee*, Milano, Bruno Mondadori, 2005, p. 233.

La scelta di analizzare le pagine friesiane su questo specifico tema pare a questo punto meno arbitraria di quanto non fosse all'inizio. Ma la trattazione avrà successo solo se riuscirà anche a dar conto del diverso rapporto tra matematica pura e ricerca scientifica.

In Kant esso è apparso come *necessariamente immediato*. Se in Fries si deve poter parlare di una filosofia della matematica pura in senso più vicino a quello moderno, vuol dire che tale immediatezza risulta quanto meno indebolita e si apre allora il problema di che significato dare all'*applicazione* della matematica. È questa domanda che si dovrà tenere sempre a mente nel considerare la sua "dimostrazione" del V postulato.

### 3.1. La "dimostrazione" del V postulato: necessità del «metodo discorsivo»

Il modo in cui Fries imposta la questione delle parallele non pare molto promettente. Sembra che si voglia mettere sulla strada di chi cercò di fare meglio d'Euclide: «Non è possibile ottenere nuove conoscenze in questo campo, ma solo rispondere al seguente quesito: se non sia possibile comporre le più note tra tutte le verità in modo un po' più conforme a regole di quanto accade negli *Elementi*»<sup>68</sup>. Tuttavia, bisogna subito precisare che il problema per lui si allarga ad una considerazione sistematica generale sul metodo della geometria. Per venire a capo della questione è indispensabile una riconsiderazione sistematica del rapporto tra metodo matematico e metodo filosofico. La natura ipotetica del metodo matematico è caratterizzata, in modo simile a Kant, dalla possibilità di procedere mediante costruzioni arbitrarie. La costruzione nell'intuizione pura garantisce la comprensibilità immediata dei concetti e dei principi. Ma la funzione fondamentale dell'intuizione è, in questo contesto, solo mostrare l'esattezza del legame che la seconda premessa del sillogismo ipotetico instaura tra la prima e la conclusione<sup>69</sup>. Si caratterizza come semplice *Hilfsmittel*, non più come *Bestimmungsgrund*<sup>70</sup>. Per dar ragione dell'evidenza dei principi è necessario far riferimento *all'astrazione*: «un paio di aste, poste l'una sull'altra a mo' di croce costituiscono per l'intelletto un'immagine in cui riconosce che due rette possono tagliarsi solo una volta. Tale coscienza si

<sup>67</sup>) *KrV* A p. 169 s. / B p. 211 s., *Chiodi*, p. 177 s.

<sup>68</sup>) MN, p. 355.

<sup>69</sup>) MN, p. 45. Qui Fries stabilisce che, dal punto di vista logico, la differenza tra metodo matematico e filosofico corrisponde a quella tra sillogismo ipotetico e categorico.

<sup>70</sup>) Cfr. H. Pulte, *Axiomatik und Empirie*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 2005, p. 301.

fonda sulla capacità d'astrarre dell'intelletto»<sup>71</sup>. Questa analisi concettuale è opera della riflessione dell'intelletto, che svolge un ruolo preliminare fondamentale per la possibilità della matematica.

Tuttavia una simile funzione del metodo filosofico risulta legata al semplice chiarimento – empiristicamente connotato – di quali rappresentazioni permettano di trarre nozioni generali per enti geometrici. Nell'analisi della questione delle parallele il suo ruolo diventa più vasto e profondo, in quanto è ad esso che si deve la possibilità di impostare correttamente il problema sistematico e, dunque, risolverlo: l'analisi concettuale consentirà la definizione di un *sistema assiomatico* coerente e completo, ma non più fondato sul processo costruttivo, bensì ottenuto mediante il «metodo discorsivo»<sup>72</sup>.

Fries riconosce l'impossibilità per il metodo classico della geometria, la costruzione mediante riga e compasso, di fare a meno di una *postulazione* riguardante l'unicità della parallela. Limitandosi al metodo geometrico in senso stretto *non si può* andare al di là d'Euclide, ma semplicemente sostituire il V postulato con uno equivalente<sup>73</sup>. Individua l'unico possibile candidato per una tale sostituzione nella «dottrina della congruenza dei triangoli»:

Nel caso più semplice sia dato un angolo acuto. Per quanto sia grande è sempre possibile con esso costruire un triangolo rettangolo, infatti ogni perpendicolare da un punto di un suo lato all'altro lato è compresa tra i lati [...]. Ma che la base debba crescere con la stessa proporzione dell'ipotenusa non può essere derivato dalle premesse date. Alla dimostrazione del quinto postulato manca sempre questo: non si può mostrare come sia possibile costruire su *qualsiasi* base per quanto grande un triangolo che abbia due angoli in comune con un triangolo dato. La proposizione, determinata immediatamente grazie al quinto postulato, è: la somma degli angoli in ogni triangolo rettilineo è uguale, dunque riguardo alla possibilità di un triangolo nulla dipende dalla grandezza dei lati in rapporto agli angoli. Secondo il metodo euclideo dobbiamo sempre presupporre un assioma mediante il quale è assicurata questa proposizione, che non segue dalle sue definizioni iniziali.<sup>74</sup>

Fries, dunque, prova l'indimostrabilità geometrica del V postulato adottando un'ottica assai moderna sul problema del metodo. Uno degli ostacoli più grandi ad accettare anche solo l'idea di una geometria diversa da quella classica risiede proprio nella necessità, in un piano iperbolico, di ammettere una corrispondenza biunivoca tra segmenti ed angoli, considerata impossibile in quanto presunta violazione del principio d'omogeneità. Non è permesso

<sup>71</sup>) MN, p. 46.

<sup>72</sup>) MN, p. 375.

<sup>73</sup>) MN, p. 362.

<sup>74</sup>) MN, p. 363 ss.

considerare una grandezza dimensionale (il segmento) funzione di una quantità pura come l'angolo. La "prova" di ciò starebbe nella constatazione che si può variare la lunghezza del segmento senza minimamente variare l'angolo incidente. Per alcuni matematici (probabilmente Legendre, che Fries conosce e cita<sup>75</sup>) si poteva ritenere l'impossibilità di definire una tale funzione come dimostrazione sufficiente del V postulato<sup>76</sup>. Fries è perfettamente consapevole della fallacia di un tale ragionamento e ne fa seguire la necessità di *presupporre* il postulato stesso.

Non solo, una geometria depauperata del postulato non può determinare una *regola generale*, ma solo derivare un caso particolare. In un certo senso, chi si ponesse in una tale situazione si troverebbe ad affrontare un problema analogo ai fondatori di una geometria *non* euclidea. Deve cioè dimostrare che la nuova versione del postulato delle parallele consente l'edificazione di una teoria geometrica generale e non semplicemente di un paradosso entro lo spazio euclideo. Questo è il primo problema con cui si misura Lobačevskij: una volta introdotto il nuovo postulato delle parallele, è necessario dimostrare che la nuova nozione di parallelismo non è funzione dello specifico punto scelto esternamente alla retta. Il modo di procedere di Lobačevskij è il seguente.

Prima ancora di considerare il postulato delle parallele, si introduce una nuova *definizione* di parallelismo, che risulta logicamente compatibile con la concezione euclidea, ovvero la nozione di «parallelismo da un verso». Sia data una retta e un punto esterno ad essa. Si tracci la perpendicolare passante per il punto. Una volta elaborata questa costruzione, è possibile "dividere a metà" la nozione di parallelismo e parlare di «rette parallele da un solo verso» (rispetto alla perpendicolare). Ora, chiaramente una parallela euclidea sarà tale indipendentemente dal verso in cui si considera il parallelismo, ma questo non implica alcuna contraddizione, semplicemente connota il parallelismo euclideo come caso particolare della nozione generale «parallelismo da un verso». Indipendentemente dal postulato scelto, consegue logicamente dalle premesse che esiste una *prima* retta parallela da entrambi i versi. Essa costituirà l'elemento separatore tra quelle secanti e quelle non secanti. Nel caso euclideo è la prima e *unica* parallela da entrambe le parti. Nel caso di Lobačevskij, si postula l'esistenza di almeno un'altra retta parallela in entrambi i versi.

<sup>75</sup>) Cfr. MN, p. 357.

<sup>76</sup>) In realtà il principio di omogeneità non viene affatto violato, bensì stabilisce una relazione tra gli angoli ed il rapporto dei segmenti con *un segmento costante*. Si veda la lettera succitata di Gauss a Grelling (*supra*, nt. 11). In merito all'impostazione del problema in Lobačevskij, vd. p. es. Betti, *Lobačevskij* cit., p. 174. Per quel che riguarda Legendre, è utile consultare Agazzi - Palladino, *Le geometrie non euclidee* cit., p. 63 ss.

Bisogna osservare che *prima* ancora della scelta tra uno dei due casi, la stessa nozione di «parallelismo da un verso» permette di dimostrare l'indipendenza di tale proprietà dal punto scelto: essa è una proprietà *intrinseca* alla figura. La scelta del postulato determinerà per così dire, l'estensione di questo concetto<sup>77</sup>.

Da ciò segue che è il postulato delle parallele a connotare lo specifico spazio delle diverse geometrie, e si deve riconoscere che, dall'esempio dell'angolo acuto, Fries trae una conseguenza molto simile: riconosce lo statuto di *unico* assioma *propriamente* geometrico al V postulato<sup>78</sup>. L'impossibilità di dimostrarlo con metodi puramente costruttivi è data dal fatto che è questo, semmai, a essere condizione di possibilità per la descrizione dello spazio *in* cui si svolgono le costruzioni geometriche.

La conclusione di Fries è che c'è allora un limite insormontabile nella concezione costruttiva del metodo geometrico, solo passando al metodo filosofico di analisi dei concetti sarà possibile mostrare come «rendere questo assioma superfluo»<sup>79</sup>.

Il riconoscimento di un tale ruolo alla filosofia sembra costituire un definitivo divorzio dalla concezione kantiana del metodo. Per Fries tutta la conoscenza apodittica «è discorsiva, tanto la filosofica, quanto la matematica»<sup>80</sup>. Al contrario Kant riteneva *incompatibili* matematica e filosofia proprio per la loro differenza metodologica. Nell'*Opus postumum* la loro incompatibilità è espressa in modo chiarissimo: «I due [ambiti] sono separati da un abisso invalicabile, e, sebbene entrambe le scienze muovano da principi a priori, vi è tuttavia la differenza che la prima lo fa da *intuizioni*, la seconda da *concetti* a priori; e tale differenza è così grande che, nel passaggio dall'una all'altra mediante la stessa ragione [...], è come se si venisse trasportati in mondi interamente diversi»<sup>81</sup>.

Tuttavia, proprio nell'*Opus sembra* possibile trovare almeno dei cenni ad una prospettiva non dissimile da quella friesiana, con riferimento specifico al V postulato: «*Matheseos principia philosophica* sono possibili anche nella dottrina delle parallele»<sup>82</sup>. Non solo, altrove Kant riconosce che, trattandolo filosoficamente (ovvero procedendo analiticamente), lo si potrebbe dimostrare in modo del tutto rigoroso. Bisogna però riconoscere

<sup>77</sup>) Cfr. Betti, *Lobačevskij* cit., p. 160.

<sup>78</sup>) MN, p. 359. Cfr. p. 364.

<sup>79</sup>) MN, p. 365.

<sup>80</sup>) Fries, *System der Logik. Ein Handbuch für Lehrer und zum Selbstgebrauch* (3. Aufl. 1837), in. Fr. VII, p. 416.

<sup>81</sup>) Ak. XXII, p. 543; trad. it. *Opus postumum*, a cura di V. Mathieu, Roma - Bari, Laterza, 1984, p. 160.

<sup>82</sup>) Ak. XXII, p. 91; trad. it. *Opus* cit., p. 301. Mathieu afferma che «questo è l'unico punto in cui Kant sembra presagire la possibilità di geometrie non euclidee» (*ivi*, nt. 1). Ma vd. nota successiva.

che per lui resta *metodologicamente* impossibile, *perché si contravverrebbe ai principi della matematica*<sup>83</sup>.

Vi sono quindi delle oscillazioni, dei ripensamenti nelle tarde riflessioni di Kant, che sembrano in parziale contraddizione con la *Dottrina del metodo* della prima *Critica*. Una possibile soluzione potrebbe essere questa: il valore di una tale “prova” filosofica consiste nella chiarificazione dei concetti primitivi, in modo da rendere impossibile un’inferenza errata all’interno di una dimostrazione matematica, che non sarebbe comunque evitabile. Essa serve a garantire l’assoluta determinazione delle nozioni, operazione che non può essere svolta dalla costruzione (naturalmente in questo modo si perde il carattere *arbitrario* di quelle nozioni).

Una possibile conferma di tale interpretazione si trova in una riflessione kantiana su un tentativo di dimostrazione condotto da Wolff. Questi si era basato sulla nozione di distanza tra linee: sarebbero parallele rette che mantengono uguale distanza. Kant imputa alla dimostrazione il difetto di utilizzare una nozione non adeguatamente definita, dato che non si chiarisce come sia possibile *misurare* la distanza *globale* di due rette in un piano, ed osserva come un tale concetto determinato di lontananza «non può essere costruito»<sup>84</sup>.

Ora, se qui Kant sembra essersi reso conto di un *limite* del metodo costruttivo, Fries è, oltre che consapevole di ciò, convinto che il metodo filosofico di definizione dei concetti sia capace di quella assoluta determinazione che mancava alla «distanza» di Wolff.

<sup>83</sup>) Cfr. Ak. XXII, p. 80 s. Nella nota suddetta in Kant, *Opus cit.*, p. 301, Mathieu rinvia a un passo tratto da questa pagina a conferma di quanto dice riguardo a Ak. XXII, p. 91. Esso recita: «Il principio euclideo delle due parallele tagliate da una trasversale può essere dimostrato in modo rigoroso trattandolo filosoficamente». Questo tuttavia è solo una nota ad una riflessione che sembra *vietare* tale possibilità: «Principi sintetici a priori sono dati nell’intuizione, ossia nella *matematica* pura; essa consiste completamente di tali principi e, se si volesse tentare di far progressi in questa scienza procedendo in base a concetti (analiticamente), allora si contravverrebbe ancora una volta, in filosofia, ai suoi principi, al suo elemento formale in quanto scienza, senza tuttavia dimostrare in modo errato». Ora, mi sembra che nel complesso Kant escluda la possibilità di intraprendere questa strada *filosofica*. Come indica anche il punto delle *Riflessioni* citato nella nota successiva, Kant non considera adeguata alcuna dimostrazione matematica che coinvolga concetti non costruibili nell’intuizione pura. Tuttavia, mi sembra che i testi mostrino che Kant si fosse reso conto della natura non costruttiva del V postulato. E infatti il riferimento alla possibilità di un metodo filosofico è in tutti i passi riferito non alla geometria, ma *solo* al postulato delle parallele. Esso acquista, allora, l’aspetto di un vero *concetto-limite* della concezione kantiana della matematica, sia nel senso che ne definisce i confini, sia nel senso che non è definibile in esso (cfr. *infra*, nt. 116).

<sup>84</sup>) Ak. XIV, p. 48. Si tenga presente il riferimento alla *misurazione*. Vedremo che Fries ha un problema analogo e come lo “risolve”. Su questa *Reflexion*, cfr. G. Büchel, *Geometrie und Philosophie*, Berlin - New York, Walter de Gruyter (Kantstudien E.H., 121), 1987, pp. 40 s., 95 s., 132 ss., che sviluppa l’analisi in direzione diversa dalla mia.

Esso permette di edificare un *sistema assiomatico* rigoroso ed univoco nelle sue nozioni primitive, che può chiarire i “difetti” dell’assiomatizzazione euclidea:

La moderna geometria sistematica vuole essere *scienza dell’estensione spaziale*, pertanto alle richieste puramente geometriche riguardo alla produzione di figure si collegano anche esigenze filosofiche. Utilizza quindi un maggior numero di principi, in cui sono presentati l’intuizione dello spazio e delle sue misurazioni, la possibilità dei piani e le loro definizioni fondamentali devono essere determinate da analisi filosofiche.<sup>85</sup>

In questo passo sono presentati insieme sia elementi di novità sia la sopravvivenza di una concezione tradizionale della geometria. Da un lato Fries si rende conto della necessità di un numero maggiore di assiomi per connotare in modo completo la geometria euclidea. Le «analisi filosofiche» acquistano le sembianze di considerazioni *metateoriche* volte a determinare gli assiomi fondamentali, la metrica che si assume ecc. Dall’altro non vi è minima traccia di una considerazione esclusivamente formale della geometria: essa rimane «scienza dell’estensione spaziale».

A questo punto, nel § 68, dà una presentazione della teoria assiomatica che dovrebbe essere in grado di risolvere l’enigma.

In primo luogo fornisce una definizione degli enti fondamentali, non molto diversa da quella euclidea. Non c’è alcuno spazio per una definizione implicita degli enti fondamentali, l’unico aspetto degno di nota è lo sforzo di rigore sistematico. Ciò porta Fries ad invertire l’ordine euclideo delle definizioni: parte dal corpo, inteso come «figura spazialmente limitata secondo le tre dimensioni», dopo di che, come «limite» bidimensionale del corpo, è definita la superficie, come limite unidimensionale di questa la linea, ed infine il punto, come «limite di ogni estensione e della linea». In questo modo Fries rende la definizione di punto organica con quella degli altri enti.

Più interessante è il secondo gruppo di concetti fondamentali, che definiscono le *relazioni* tra gli enti geometrici<sup>86</sup>. Queste sono «luogo», «direzione», «posizione» e «movimento di ciò che si trova l’uno accanto all’altro». L’aspetto più importante è l’assunzione di luogo e *direzione* come nozioni fondamentali, da cui le altre sono derivate. La direzione, in particolare, determina i nuovi rapporti spaziali che questo secondo gruppo di definizioni introduce. Cosa questo significhi lo vedremo tra poco.

<sup>85</sup>) MN, p. 362. Cfr. anche p. 365: «Si può dunque assumere al di là della geometria euclidea un compito filosoficamente modificato rispetto a questa scienza, il cui interesse si limita ad un’esatta analisi dei concetti fondamentali».

<sup>86</sup>) MN, p. 366 ss.



Il terzo gruppo di definizioni riguarda i rapporti di uguaglianza, somiglianza e congruenza tra figure (tutti concetti ripresi, con significato identico, dagli *Elementi*).

Infine, la quarta definizione concerne quello che si potrebbe definire il concetto costruttivo per eccellenza, il *moto geometrico*. In questo Fries è molto vicino alla prospettiva kantiana<sup>87</sup>. Tuttavia è presente, anche se solo accennata, una distinzione importante. In precedenza si è spesso richiamata l'attenzione sul necessario riferimento al tempo che la costruzione implica in Kant. Lo schema del numero è addirittura descrizione della successione temporale. Al contrario, Fries specifica che il moto geometrico tiene conto solo del percorso descritto, *prescindendo* dal tempo. È palese lo sforzo di dare una rappresentazione adeguata della natura eminentemente *astratta* della geometria. Se anche è necessario il riferimento alla costruzione, bisogna distinguere quella *reale*, dove interviene la sintesi temporale, dalla sua considerazione *formale*, che ha che fare solo con il *prodotto* del moto dei punti, ossia con l'ente geometrico determinato e non con la sua determinazione.

Ai concetti fondamentali seguono gli assiomi, secondo il seguente schema<sup>88</sup>:

A. *Assiomi di misurazione.*

1. Tra due punti è sempre possibile una linea retta e *solo* una linea retta.
2. Tra una linea retta ed un punto fuori di essa è possibile sempre un piano e *solo* un piano.
3. Tra un piano e un punto fuori di esso è sempre possibile una e *una sola* estensione corporea (*uno* spazio).
4. L'estensione di ogni figura può essere aumentata senza fine.

B. *Assiomi di direzione.*

5. Due linee rette attraverso un punto producono sempre un angolo.
6. Due piani attraverso una linea retta producono sempre un angolo superficiale.
7. Si dà solo *uno* spazio, in cui tutte le estensioni corporee illimitate (spazi relativi) coincidono tra loro.

Come si vede, l'assiomatizzazione friesiana è molto lontana dalla nostra concezione. In particolare, mancano del tutto assiomi d'ordinamento, la cui

<sup>87</sup>) Fries arriva a criticare Euclide per non aver esplicitato tale concetto, che pure usa continuamente. Per Fries, quindi, la natura costruttiva della geometria non può essere semplicemente assunta, ma va *postulata*: «Nei suoi postulati non è di certo nominato il moto geometrico, ma il moto del punto per disegnare la retta e quello del raggio per descrivere il cerchio sono ciò nondimeno presupposti, infatti il moto geometrico è la rappresentazione che aiuta l'immaginazione produttiva in tali postulati. Non si pensi dunque di poter costruire la geometria senza il concetto di moto» (MN, p. 372).

<sup>88</sup>) MN, p. 368 ss.

importanza fu chiarita da Pasch solo nel 1882. Qualche (debole) analogia si può trovare solamente tra i primi tre assiomi e gli assiomi di collegamento hilbertiani. L'assioma 3 è considerato particolarmente importante da Fries, dato che su esso si può fondare una descrizione dei *movimenti rigidi* delle figure nello spazio, rotazioni e traslazioni. Inoltre garantisce la possibilità di un'applicazione allo spazio del sistema di coordinate cartesiane e dunque la definizione di una teoria delle posizioni degli enti geometrici:

la posizione di un punto è completamente determinata se è data in modo determinato rispetto agli *assi tra loro perpendicolari intersecatisi in un punto dato*. O anche: se in un piano fissato (orizzonte, equatore) è dato un punto ed una retta passante per esso come inizio delle direzioni, allora la direzione di ogni linea retta passante per questo punto è determinabile da un angolo superficiale (che può essere costante e retto) e da due angoli rettilinei (lunghezza e larghezza sulla superficie sferica). La posizione di ogni punto rispetto ad uno dato può essere determinata mediante la sua distanza e due diversi angoli rettilinei. Grazie a questa legge delle misurazioni sono determinati anche i rapporti fondamentali della geometria analitica cartesiana.<sup>89</sup>

L'importanza *filosofica* dell'assioma 3 consiste nell'escludere dall'ambito della geometria la considerazione di uno spazio assoluto. Lo spazio geometrico è inteso in modo eminentemente analitico, come sistema di coordinate per la determinazione relativa dei vari enti geometrici.

Il momento costruttivo è di fatto subordinato alla delineazione assiomatica delle proprietà dello spazio. Le tre «disposizioni» (*Forderungen*) euclidee (ovvero i primi tre postulati, specificatamente costruttivi) non sono considerate veri e propri assiomi, ma solo esplicitazioni degli assiomi di misurazione<sup>90</sup>.

A questo punto Fries compie il passo decisivo verso la “risoluzione” del V postulato, introducendo quella che ritiene una nuova definizione di linea retta e di piano:

*una linea retta è quella le cui parti mantengono un'uguale direzione*. Ad essa corrisponde la definizione di piano mediante l'analisi concettuale: *si chiama piano la superficie retta, ovvero la superficie, le cui parti giacciono tutte in una direzione*. La spiegazione usuale secondo cui una linea retta passante per suoi due punti giace completamente in esso, ne è una conseguenza.<sup>91</sup>

Lo stesso concetto di angolo è definito poco dopo in termini di direzione, cioè come *differenza nella direzione dei lati*.

<sup>89</sup>) MN, p. 369.

<sup>90</sup>) MN, p. 371.

<sup>91</sup>) MN, p. 372.

Il punto fondamentale sta nel fatto che per Fries la direzione è un concetto primitivo: rende possibile la descrizione delle relazioni spaziali, ma non è definita da queste. Dagli assiomi di direzione seguono le definizioni di enti geometrici fondamentali, rette e angoli, *indipendentemente* da considerazioni metriche. La metrica è determinata dagli assiomi di misurazione. Il “punto di intersezione” tra questi due aspetti è dato dalla definizione di angolo. Con esso, quindi, lo stesso concetto di direzione è specificato rispetto all’assunzione di una particolare metrica.

Di per sé, però, la direzione è una caratteristica *intrinseca* delle figure geometriche, non dipende direttamente dallo spazio in cui è immersa. Qui si potrebbe vedere un’anticipazione inconsapevole di risultati che Gauss raggiungerà cinque anni dopo nelle sue famose *Disquisitiones generales circa superficies curvas*<sup>92</sup>. Sintetizzando al massimo, Gauss dimostra l’*indipendenza* della curvatura di una superficie dallo spazio circostante. Essa è una caratteristica intrinseca alla superficie stessa. Non c’è bisogno, dunque, di far riferimento ad uno spazio ambiente, ma si può decidere se è piana o curva restando, per così dire, sulla superficie stessa. Tale caratteristica è dimostrata da Gauss introducendo un sistema di due coordinate curvilinee  $u$  e  $v$  indipendenti, in funzione delle quali si definiscono le equazioni parametriche per  $x, y, z$ , ovvero le coordinate cartesiane di una superficie  $F(x, y, z) = 0$ . Nel caso di una sfera,  $u$  e  $v$  possono essere latitudine e longitudine, dunque la distanza angolare di un punto rispettivamente dall’equatore della sfera e da un meridiano di riferimento. Gauss mostra come i coefficienti necessari a calcolare l’equazione per la curvatura  $K$  di una superficie, che secondo il punto di vista usuale sono dipendenti dalle coordinate cartesiane, risultano invece funzione delle coordinate indipendenti  $u$  e  $v$ , se al posto delle usuali equazioni cartesiane si utilizzano quelle parametriche. Il che implica una trasformazione nello stesso concetto di superficie: la sua definizione come limite di una figura (definizione presente anche in Fries) dipende dalla *scelta* di limitarci ad una considerazione cartesiana dello spazio. È invece dimostrato che è matematicamente possibile considerare la superficie in sé. La curvatura ne costituirà una proprietà intrinseca.

A questo punto emerge l’intreccio tra spunti originali e ripetizione di pregiudizi consolidati nell’opera di Fries. Da un lato, mediante la sua concezione di direzione, può dare una definizione di retta che *apparentemente* non implica riferimenti a distanze o a qualsiasi altro concetto metrico. Evita quindi di incorrere nella difficoltà che Kant aveva rintracciato nella

<sup>92</sup>) Per quel che segue, cfr. p. es. H. Wußing, *Carl Friedrich Gauß*, Leipzig, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1989, p. 57 ss. L’opera di Gauss si trova in Gauss, *Werke* cit., IV, pp. 219-258.

“prova” woffiana. Dall’altro, il sistema degli enti geometrici è però immediatamente chiuso rispetto al sistema cartesiano di coordinate, che risulta l’*unico concepibile*, mediante l’assioma 3 e l’assioma 7: il primo dà per così dire la possibilità di una descrizione cartesiana delle posizioni. Il secondo ne determina la necessità. Ma allora il concetto di direzione, lungi dall’essere interpretato come indipendente dagli altri, è fin da subito surrettiziamente inteso come descrivibile solo all’interno di uno spazio unico, cartesianamente misurabile, in cui «tutti gli spazi *coincidono*».

Fries ritiene di potere ora introdurre l’assioma indipendente da quello euclideo, che dovrebbe sostituirlo: «due linee rette intersecantesi in un punto determinano sempre un angolo tra loro». Dal che deriva:

Corollario 1. Due rette, che si incontrano in un punto non hanno mai più di un punto in comune. Infatti la più piccola lunghezza dell’una mantiene comunque una direzione diversa dell’altra e non giace dunque in quest’altra.

Corollario 2. Due linee rette intersecantesi in un punto giacciono in un piano, infatti se si determina un piano mediante una delle due ed un punto dell’altra, allora in questo piano giace completamente anche l’altra.

Corollario 3. Due rette intersecantesi in un punto formano sempre tra loro un *angolo piano*.

Corollario 4. Rette parallele non si incontrano mai. Infatti, se due rette si incontrano, o giacciono in una medesima retta o ne sono solo parti o devono formare tra loro un angolo, che determinerebbe una differenza delle loro direzioni. Dunque non sarebbero parallele.

Corollario 5. Attraverso ogni punto passa solo una parallela ad una retta. Infatti due formerebbero in questo punto un angolo e non avrebbero uguale direzione.<sup>93</sup>

Tutto dipende, allora, dall’assunzione *esplicita* dell’angolo rettilineo come quantità pura descrivibile solo secondo equazioni cartesiane. Non solo, Fries esclude che si possano considerare, nella trattazione delle parallele, angoli *curvilinei*. Infatti l’angolo è, per definizione, «differenza nella direzione di due rette» e quello curvilineo risulta «un’astrazione molto più indeterminata, infatti qui *la differenza si produce poco a poco, cresce con la lunghezza degli archi*»<sup>94</sup>. È esclusa, ma entro un sistema di *definizioni*, ogni possibile grandezza che contraddica l’assunzione. Fries sostiene di dover lasciare fuori dal proprio esame l’angolo curvilineo perché questo è in contraddizione con la *semplicità* delle “*astrazioni* che stanno alla base della geometria”.

Due rette saranno quindi parallele quando hanno uguale direzione. Il che si riduce ad una versione informale dell’equazione di geometria

<sup>93</sup>) MN, p. 377.

<sup>94</sup>) MN, p. 375; corsivo mio.

analitica per le parallele: esse sono tali quando hanno uguale coefficiente angolare. La fine non poteva che essere questa: l'assioma friesiano non è che una versione equivalente (e un po' confusa) del V postulato. Esso si limita a escludere (ma, si ricordi, lo fa mediante *un assioma*) che due linee rette possano avere tra loro un comportamento *asintotico*. La geometria iperbolica, negando il V postulato, *ammette* questa possibilità<sup>95</sup>. È evidente l'aria "saccheriana" della dimostrazione di Fries, se ne può trovare addirittura una traccia testuale: a conclusione della sua prova, Fries torna al problema della costruzione del triangolo rettangolo dato un angolo acuto, con cui aveva dimostrato l'insufficienza del metodo costruttivo. Nel dimostrare come, invece, il problema sia ora risolvibile, fa capolino la famosa, quanto oscura, «natura della retta»<sup>96</sup>.

In conclusione, tutto il guadagno che si è ricavato dal passaggio al metodo discorsivo è stato dover *scegliere* una metrica *euclidea* (e cercare di non darlo a vedere). La questione allora è: come è possibile per Fries giustificare la necessità di una tale scelta? La risposta è: per ragioni di *semplicità*. Siamo dunque tornati al problema dell'introduzione.

### 3.2. *Statuto e funzione della matematica in Fries*

Nell'introdurre la direzione come concetto primitivo, Fries analizza brevemente un'obiezione che potrebbe essere sollevata: L'impossibilità di *pensare* al concetto di direzione senza far riferimento a quello di retta. Essa riposa su un errore logico. Si assume la necessità di una raffigurazione della linea come dimostrazione di una precedenza concettuale. Ma così facendo si presuppone che funzione di una definizione analitica sia *spiegare* un concetto. In realtà essa serve esclusivamente a determinare in modo distinto le relazioni interne a un certo complesso concettuale. La necessità di tracciare una linea per *rappresentare* la direzione può al massimo provare che tra le due nozioni vi deve essere un legame necessario. Finché ci limitiamo a rilevare un tale legame non si è fatto il minimo passo avanti verso una reale definizione analitica, semplicemente si è esibita una forma *schematica* di connessione.

La concezione friesiana di schema è molto diversa da quella kantiana. Sicuramente non si può assimilare allo schematismo dei concetti dell'intelletto e neppure alla concezione, peraltro solo abbozzata, di schema dei concetti empirici. Questo è «un'arte nascosta nelle profondità dell'animo

<sup>95</sup>) Cfr. Betti, *Lobačevskij* cit., p. 161, e Agazzi - Palladino, *Le geometrie non euclidee* cit., p. 151, dove è data anche la dimostrazione rigorosa di questa proprietà.

<sup>96</sup>) MN, p. 380.

umano», grazie alla quale l'immaginazione possiede una regola per l'identificazione di un certo molteplice sensibile come fenomeno specifico<sup>97</sup>. Se si vuol cercare un'analogia, la si potrebbe forse trovare con il concetto di «immagine»<sup>98</sup>, quindi con un semplice prodotto dell'immaginazione empirica *reso possibile* dallo schematismo empirico. Schema è, secondo Fries: «la coscienza soggettiva di una rappresentazione generale separata, nel modo in cui io l'ottengo grazie all'astrazione, nota (*Merkmal*) e concetto sono invece la stessa rappresentazione parziale nel modo in cui essa è presente nella conoscenza»<sup>99</sup>. La caratteristica che più di ogni altra lo avvicina al *Bild* kantiano consiste nell'essere «diversa per ciascuno», così come posso avere diverse *immagini* dello stesso concetto, ad esempio del numero 5 (cinque punti, cinque sassolini ecc.).

Nello schema di Fries si sommano in realtà caratteristiche *sia* dell'immagine *sia* dello schematismo empirico. In primo luogo esso è una rappresentazione *generale*, frutto d'*astrazione*, ed in secondo luogo non è derivato da un'altra funzione (come invece l'immagine dallo schema); al contrario, la schema è una rappresentazione *preliminare* dello *stesso* contenuto, che sarà poi pienamente determinato nel concetto. Ha una funzione di aggregazione provvisoria di una serie di note, le cui relazioni reciproche non sono ancora ben delineate, ma comunque abbastanza completa da consentirci di orientarci nell'esperienza. Perché si dia un'autentica conoscenza, è però necessario che le regole di aggregazione soggettive si risolvano progressivamente in una *legge* di determinazione univoca e valida per tutti. È questa la funzione specifica della definizione analitica. Essa renderà *distinte* le relazioni tra note, in precedenza presenti alla coscienza solo con *chiarezza*, e le renderà quindi adeguate a un utilizzo *scientifico*.

A questo punto riemerge la domanda: cosa assicura che *debba* riconoscere come primitiva la nota «direzione» nella complessione «direzione - linea retta - distanza - ecc.»? La risposta di Fries è: perché solo così posso rendere ragione della forma della specifica *teoria scientifica* cui quella complessione si riferisce.

Il suo ragionamento è, grossomodo, il seguente: ho di fronte un ambito scientifico ben delineato come la geometria euclidea. In esso, pur se mi sembra possibile cogliere facilmente le relazioni reciproche tra gli elementi, persiste un difetto nella determinazione conforme a leggi, reso evidente dalla natura apparentemente anomala del V postulato<sup>100</sup>. Elaboro dunque

<sup>97</sup>) *KrV* A p. 141 / B p. 180, *Chiodi*, p. 158.

<sup>98</sup>) È questa l'opinione di Elsenhans. Cfr. *Fries und Kant* cit., I, p. 71.

<sup>99</sup>) Fries, *Neue oder anthropologische Kritik der Vernunft*, I, in Fr. IV, p. 357.

<sup>100</sup>) Che il problema delle parallele si configuri per Fries in questo modo lo testimonia la ragione che motiva la ricerca: l'individuazione di un "difetto" di simmetria entro gli *Elementi*. Difatti, la proposizione I.27 (se due rette, che giacciono su di un unico piano, hanno

un'*ipotesi* sulla struttura interna dei suoi concetti fondamentali. Dall'assunzione della primitività del concetto di direzione e dalle altre assunzioni sulla metrica dello spazio, sono riuscito ad inferire il V postulato. Dunque la mia definizione dei concetti e degli assiomi risulta *necessariamente* adeguata a legittimare lo statuto di *teoria* della geometria.

In questo modo Fries, al di là della pretesa d'aver risolto l'enigma delle parallele, dà un esempio precoce di *assiomatizzazione di una teoria scientifica*. Questa esigenza sorge solo a una fase di profonda maturazione dell'edificio del sapere. Per comprendere meglio questa caratteristica del metodo friesiano lo si paragoni alla seguente caratterizzazione del metodo assiomatico fatta da Hilbert:

Nella storia dello sviluppo scientifico è sempre avvenuto così, si cominciò a trattare senza molti scrupoli una certa disciplina e a spingersi quanto più lontano possibile, ma ci si imbatté poi, spesso solo dopo molto tempo, in difficoltà tali che si fu costretti a voltarsi indietro per riflettere sui fondamenti della disciplina stessa. L'edificio della scienza non viene costruito come un palazzo, dove per prima cosa si gettano delle fondamenta solide e solo in seguito si procede a costruire le stanze dove abitare; la scienza preferisce apprestare il più velocemente possibile degli spazi dove poter risiedere e solo dopo, quando si vede che qua e là le fondamenta traballano e non riescono a sostenere il peso dell'edificio, ci si preoccupa di sostenerle e consolidarle. Il che non è certo un difetto, ma il giusto e sano sviluppo.<sup>101</sup>

Ma su cosa posso fondare la certezza che il mio processo di scomposizione concettuale sia effettivamente giunto al termine? Questa è la domanda fondamentale, in cui si può cogliere la nuova concezione della teoria della conoscenza inaugurata da Fries. Il processo di definizione deve giungere ad una completa determinazione del contenuto concettuale di un certo termine, quindi ad un giudizio *analitico*. Ma la distinzione tra analitico e sintetico ha in Fries un significato *solo relativo*. Esso è funzione dell'ideale di un linguaggio scientifico perfettamente realizzato. Una distinzione tra giudizi analitici e sintetici ha senso solo in riferimento *al sistema concettuale*

angoli alterni uguali, le rette sono allora parallele) e la I.29 (se le rette sono parallele allora gli angoli alterni sono uguali), pur essendo una l'inversa dell'altra non hanno entrambe bisogno di riferirsi al V postulato per essere dimostrate: la I.29 ne ha bisogno, la I.27 no. Da questo "squilibrio" sorge la domanda: «non si dovrebbe trovare una catena deduttiva diversa da quella di Euclide o poter integrare la sua, in modo che la proposizione 27 insieme alla sua inversa si dimostri in modo uniforme?» (MN, p. 358).

<sup>101</sup>) D. Hilbert, *Logische Prinzipien des Mathematischen Denkens*, Vorlesung SS 1905, Ausarbeitung von M. Born, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 558a. Citato in Peckhaus, *Hilbertsprogramm* cit., p. 51. Cfr. anche V. Peckhaus - R. Kahle, *Hilbert's Paradox*, «Historia mathematica» 29 (2002), pp. 157-175, in part. p. 163 ss.

delle scienze di un dato periodo<sup>102</sup>. Il significato dei termini è individuato attraverso precise definizioni, che risultano analitiche, *rispetto allo stato attuale della conoscenza*. È quindi possibile uno sviluppo dei concetti, una oscillazione tra lo statuto sintetico e quello analitico, dipendente dal progresso della conoscenza. Inoltre ne consegue (in perfetto “spirito assiomatico”) che non si può considerare il significato del *singolo* giudizio, ma solo la *connessione* tra i vari giudizi di un sistema scientifico complesso<sup>103</sup>. La prospettiva olistica qui delineata costituisce la particolare maniera friesiana di declinare la domanda trascendentale fondamentale: «come sono possibili i giudizi sintetici a priori?». Entrambe «non hanno a che fare con le condizioni conoscitive per il singolo soggetto, ma si riferiscono a quelle della scienza in generale»<sup>104</sup>.

Quel che si nota, allora, è la determinazione di un rapporto di reciproca implicazione tra teoria scientifica e riflessione critica su di essa. Non può esistere *la* teoria della conoscenza, ma solo la teoria della conoscenza *di* uno specifico ambito scientifico. Corollario immediato di questa affermazione è che non potrà nemmeno esistere un *sistema completamente determinato ed unificato del sapere*. La stessa matematica non fa eccezione a questa caratteristica generale della riflessione friesiana. La sua specificità sta nell'essere la disciplina che presiede alla definizione delle massime euristiche mediante le quali si costituiscono le teorie scientifiche. Il che significa, dato la *pluralità irriducibile* della conoscenza scientifica, che oltre a svolgere un ruolo *costitutivo* è anche dotata di una *libertà* di sviluppo fondamentale. Cerchiamo di chiarire questo punto.

Fries definisce la teoria come «una scienza in cui i fatti sono conosciuti nella loro subordinazione alle leggi generali e sono chiarite le loro connessioni in base ad esse»<sup>105</sup>. Ora, questo tipo di unità è determinato non dall'esperienza, né dalla riflessione filosofica, ma dalla matematica. Solo la matematica può garantire il passaggio alla spiegazione autenticamente scientifica. Lungi dall'essere un limite alla possibilità di determinazione degli ambiti conoscitivi, il ruolo necessario della matematica garantisce il *pluralismo* indeterminato delle teorie<sup>106</sup>. Caratteristica dell'intuizione ma-

<sup>102</sup>) Su questo tema, cfr. Elsenhans, *Fries und Kant* cit., I, p. 135 ss.

<sup>103</sup>) Cfr. Fries, *System der Logik* cit., p. 170 ss., e *Neue o. anthr. Kritik der Vernunft*, I, cit., p. 379 ss.

<sup>104</sup>) Elsenhans, *Fries und Kant* cit., p. 136. Si tenga presente che questo non vuol dire che la filosofia sia costituita di meri giudizi analitici. Essa deve fornire i principi metafisici che fondano la possibilità di ogni ambito scientifico. In questo senso è sintetica, in accordo al dettato kantiano. Tuttavia la *critica* procederà analiticamente, ovvero sarà semplice *esplicitazione* di questo contenuto necessario.

<sup>105</sup>) Fries, *System der Logik* cit., p. 541.

<sup>106</sup>) A questo proposito, seguo l'analisi condotta da Pulte, in *Axiomatik* cit., p. 269 ss. Cfr. anche p. 300 ss. Mi sembra, tuttavia, che si debba considerare la distinzione massime



tematica è, infatti, l'omogeneità degli enti che essa può considerare. Questi dovranno poter rientrare sotto un unico *concetto di grandezza*:

Ne consegue che si devono dare nella nostra conoscenza tanti inizi teorici, quante sono le diverse qualità. Ora, nella dottrina della natura ne troviamo veramente moltissime, quindi il compito teorico nelle nostre conoscenze è limitato, le teorie della nostra scienza non si lasciano unificare in un sistema, bensì si danno tante teorie tra loro separate quante sono le qualità.<sup>107</sup>

Ma allora la funzione scientifica della matematica non è costitutiva nel senso fondativo del termine, bensì si caratterizza come strumento fondamentale della *metodologia* nel configurare una pluralità di possibili percorsi scientifici. Essa fornisce le condizioni di possibilità per la determinazione dei fenomeni solo nel senso che dà gli schemi generali per la loro conoscenza legale *all'interno dei singoli ambiti conoscitivi*. Il fulcro della sua funzione consiste nel definire quelle massime euristiche deputate alla guida dell'induzione. Sono queste massime euristiche le ipotesi di cui la matematica è l'«arsenale». La loro natura matematica fa sì che possano svolgere sia un ruolo costitutivo di un ambito d'esperienza (scientifico) sia un ruolo regolativo (dello sviluppo di un ambito non ancora assunto al rango di teoria) e che sia possibile il passaggio dall'uno all'altro<sup>108</sup>.

Esse presiedono sia alla funzione, esercitata dalla facoltà di giudizio determinante, di subordinare gli enti alla legge che li esplica, ma anche a quella di trovare, per una qualche ipotesi, il suo ambito d'applicazione concreto (e questa è funzione del giudizio riflettente)<sup>109</sup>.

Un esempio affascinante di questo intreccio è dato dalla valutazione epistemologica che Fries dà della rivoluzione avvenuta in astronomia:

Non l'*esperienza*, bensì la *geometria* ha deciso a favore delle ipotesi di Keplero e Copernico. Si potevano benissimo costruire sempre nuovi sistemi di epicicli con cui tentare di spiegare l'esperienza in base alle presupposizioni d'Ipparco o Tico Brahe, solo da un punto di vista puramente geometrico la *semplicità* delle ipotesi decise a favore dell'ellisse e del moto della terra intorno al sole.<sup>110</sup>

euristiche - massime costitutive anche *all'interno* della matematica, aspetto non sviluppato da Pulte. Inoltre non posso essere d'accordo con lui in un punto specifico (cfr. *infra*, nt. 114).

<sup>107</sup>) Fries, *System der Logik* cit., p. 552.

<sup>108</sup>) Vorrei fosse chiaro che per me il passaggio è inteso *in entrambi i versi*. Non così Pulte: cfr. *Axiomatik* cit., p. 272.

<sup>109</sup>) Si noti la diversa definizione di determinante e riflettente presente in Fries rispetto a Kant. Per il suo rapporto con il concetto di massima euristica, cfr. Fries *Neue o. anthr. Kritik der Vernunft*, II, in Fr. V, p. 325 ss.

<sup>110</sup>) MN, p. 22.

Per cogliere la modernità di tale prospettiva, basta esaminare i tentativi di determinare *per via sperimentale* la geometria corrispondente al mondo fisico. Tale tentativo è in palese contraddizione con il divieto kantiano di dimostrare l'applicabilità al mondo fisico della geometria *a posteriori*.

Ho già accennato ad un simile tentativo condotto da Lobačevskij<sup>111</sup>. Questi, osservando che le formule trigonometriche euclidee restano valide anche nella propria geometria per triangoli sufficientemente piccoli rispetto alla «costante di curvatura»  $k$ , ipotizzò che la geometria iperbolica potesse essere utilizzata per il calcolo delle distanze astronomiche. Cercò allora di risalire al valore di  $k$  corrispondente al nostro universo fisico misurando il «difetto angolare» (ovvero la differenza da  $\pi$ ) del triangolo di parallasse di alcune stelle. Considerando infatti che  $\Pi(x)$  (l'angolo di parallelismo, dipendente dalla distanza  $x$  tra la retta e la sua parallela iperbolica) decresce da  $\pi/2$  a 0 quando  $x$  cresce da 0 a  $\infty$ , e stabilito per continuità che  $\Pi(0) = \pi/2$  (nel caso euclideo  $\Pi(x)$  è costante =  $\pi/2 = \Pi(0)$ ), se si assume  $c =$  il raggio dell'orbita terrestre, espresso in termini della (sconosciuta) unità di misura  $k$ , avremo che, *per ogni* stella, l'angolo di parallelismo (funzione della sua distanza) sarà *superiore* a  $\pi/2 - \Pi(c)$ . È quindi possibile stabilire l'esistenza di un *limite superiore* del difetto angolare. Il problema è che gli strumenti di misurazione non possono fornire risultati significativi rispetto all'errore sperimentale<sup>112</sup>. Il che è una sorta di conferma empirica del divieto kantiano. Ma in realtà, i termini del discorso si sono invertiti. Lo stesso Lobačevskij è ovviamente consapevole del fatto che la *coerenza* della propria geometria non dipende affatto da un tale esperimento. Si osservi inoltre che egli sta cercando il valore di  $k$  valido *nel nostro universo*, fermo restando che *per qualsiasi valore*  $> 0$  assunto da  $k$  esisterà una *specifica geometria iperbolica*. La questione è, allora, non più stabilire la validità a priori della geometria (euclidea) nell'ambito di una riflessione sulle condizioni di *possibilità* dei fenomeni, ma *scoprire* quale specifica «ipotesi» (nel senso friesiano), entro l'«arsenale» che la matematica mette a disposizione, sia quella *determinabile* in legge<sup>113</sup>. E tale problema, afferma Fries, è risolvibile non sperimentalmente, ma solo adottando il *criterio di semplicità euristica*. È in funzione di tale criterio che le massime regolative possono determinarsi in massime costitutive di un *ambito esperienziale scientificamente definito*<sup>114</sup>.

<sup>111</sup>) Cfr. *supra*, nt. 62.

<sup>112</sup>) Cfr. Coxeter, *Non-euclidean Geometry* cit., p. 10 s., e Betti, *Lobačevskij* cit. p. 175 s.

<sup>113</sup>) Per un esempio analogo in fisica, e la differenza rispetto a Kant, cfr. *supra*, nt. 8.

<sup>114</sup>) Riguardo a tale concetto di semplicità, ritengo che la posizione di Fries sia più vicina a una concezione di tipo convenzionalistico, che *popperiano* (cfr. p. es. K.R. Popper, *The Logic of Scientific Discovery*, London, Hutchinson, 1959; trad. it. *Logica della scoperta scientifica*, a cura di M. Trinchero, Torino, Einaudi, 1995, §§ 20 e 46), per quanto la questione sia particolarmente complessa e meriterebbe una trattazione adeguata, qui impossibile. Basti ricordare

Bisogna osservare, in conclusione, che questo equilibrio dinamico tra momento costitutivo e regolativo riguarda la matematica stessa. È questa oscillazione a far emergere la necessità di una riflessione filosofica sulla matematica<sup>115</sup>. Lo sforzo friesiano di risolvere il problema delle parallele è appunto un esempio di quale debba essere il ruolo della filosofia, non solo rispetto al rapporto tra matematica e fisica, ma riguardo alla stessa matematica *pura*: porre in primo piano il problema dei *criteri* della sua conoscenza, ovvero costituirsi come *epistemologia*, non rivolta alla fondazione, bensì al

che Popper è forse l'unico grande filosofo della scienza contemporaneo che si sia misurato assiduamente con il pensiero di Fries (cfr. p. es. K.R. Popper, *Die Beiden Grundprobleme der Erkenntnistheorie*, Tübingen, J.C.B. Mohr, 1979; trad. it. *I due problemi fondamentali della teoria della conoscenza*, a cura di M. Trincherò, Torino, Einaudi, 1997, cap. V, pp. 81-138, e Id., *Logica* cit., cap. V, pp. 85-108). G. König e L. Geldsetzer (*Vorbemerkung* cit., pp. 34<sup>\*</sup>-36<sup>\*</sup>), così come Pulte (*Axiomatik* cit., p. 302 nt. 1022), evidenziano l'analogia tra la filosofia della scienza di Fries e Popper, che diventa palpabile, in particolare, nella seguente affermazione friesiana: «non si deve formulare alcuna presupposizione, che *non possa essere confutata dall'esperienza in modo preciso*» (MN, p. 21). Essa ricorda indubbiamente il criterio di falsificabilità. Ora, mi sembra che in Fries si possano effettivamente trovare le tracce del futuro criterio popperiano, ma bisogna considerare che per lui tale criterio è in primo luogo di *significato* e solo in un senso derivato di *demarcazione*, mentre per Popper è *solo* criterio di demarcazione (cfr. p. es. Popper, *Logica* cit., p. 22 nt. 3: «[la falsificabilità] traccia una linea all'interno del linguaggio significante, non intorno ad esso»). Inoltre, mi sembra che Fries *escluda* di poter definire, in base ad esso, una logica della *scoperta* scientifica. Queste differenze emergono abbastanza chiaramente se si osserva che il giudizio di Fries sulla acquisizioni di Keplero e Copernico, come dovute alla matematica e *non all'esperienza*, è espresso in qualità di *critica* all'idea di porre all'apice di una riflessione sulla scienza la confutabilità mediante l'esperimento (Cfr. MN, pp. 20-22). Quest'ultima può servire, da un lato, come criterio di *significato* per distinguere le autentiche proposizioni scientifiche da quelle che pretendono di esserlo, ma sono solo *Schwärmereien* (quindi in un senso che, semmai, prelude al positivismo), dall'altro, anche come criterio di demarcazione tra proposizioni scientifiche empiriche e *teoria pura* (ovvero la *reine Bewegungslehre*, come applicazione di matematica e metafisica alla scienza fisica). Tuttavia, il *progresso* della scienza, il passaggio da un dato assetto legale ad uno nuovo, *non* è determinato in base a quel principio, bensì, prima di tutto, da una riconsiderazione dei rapporti *all'interno dei concetti della teoria pura*. La *scoperta* avviene inizialmente entro un ambito, che proprio quel principio, usato come *demarcazione*, rende indipendente da ogni valutazione sperimentale. Potremmo dire, che l'evoluzione della scienza è determinata da un cambiamento nell'"ordine di *a priorità*" tra concetti matematici e metafisici, determinato per esempio da riflessioni, come nel caso delle orbite planetarie, che concernono il rapporto tra figure matematiche (tra circonferenze e coniche). La valutazione di Fries è più "ottimistica" circa il ruolo della ragione nella conoscenza: essa ha, proprio nella matematica, una possibilità illimitata di *edificazione* di teorie ipotetiche, che dovranno ovviamente essere sottoposte al vaglio insindacabile dell'esperienza. Ciò costituisce una sorta di *Leitmotiv* della riflessione sulla scienza di derivazione friesiana (influenzerà per esempio Paul Bernays: cfr. P. Bernays, *Die Grundgedanken der Friesschen Philosophie in ihrem Verhältnis zum heutigen Stand der Wissenschaft*, in *Abhandlungen der Friesschen Schule, neue Folge*, V, n. 2, pp. 99-113, e Id., *Reflections on Karl Popper's Epistemology*, in M. Bunge [ed.], *The Critical Approach*, Glencoe, The Free Press, 1964, pp. 32-44).

<sup>115</sup>) Cfr. MN, p. 37.

paziente e sempre rinnovato consolidamento del suo edificio. È, questo, un esempio «aurorale» di riflessione *metamatematica* <sup>116</sup>.

DAVIDE ROBERTO  
davide.roberto@unimi.it

<sup>116</sup>) Per una lettura in chiave esplicitamente assiomatico-matematica della filosofia friesiana, cfr. Nelson, *Kritische Philosophie und mathematische Axiomatik*, in Id., *Beiträge zur Philosophie der Logik und Mathematik*, Frankfurt a.M., Öffentliches Leben, 1959, pp. 89-125. Se si accetta tale interpretazione, si comprende anche la distanza *paradigmatica* tra riflessione kantiana e friesiana sulla matematica. La concezione kantiana, strettamente costruttivistica, caratterizza la matematica come, essenzialmente, sistema di calcoli (particolarmente evidente nel caso dell'aritmetica, composta solo di formule). In questo senso è molto vicina alla prospettiva di Wittgenstein, per il quale la matematica è sostanzialmente «composta da calcoli» e «non riposa su assiomi». In quanto tale, ogni gioco linguistico matematico determina in modo univoco non solo tutto quello che si può dimostrare entro il sistema stesso, ma anche quello che si può *domandare*. Ciò *esclude* la sensatezza di una riflessione metamatematica sulla matematica, che può dar origine al massimo ad un nuovo calcolo, quindi ad una nuova *matematica* (cfr. p. es. L. Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Oxford, Basil Blackwell, 1956; trad. it. *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, a cura di M. Trinchero, Torino, Einaudi, 1971, le osservazioni I.5-20, 164-167; II.45-51, 75; V.12, 16, 18-19, 40; Id. *Philosophische Grammatik*, hrsg. von R. Rhees, Oxford, Basil Blackwell, 1969; trad. it. *Grammatica filosofica*, a cura di M. Trinchero, Firenze, La Nuova Italia, 1990, parte II, capp. XI e XII. Per una breve analisi critica di queste pagine, cfr. Lolli, *Da Euclide a Gödel* cit., p. 166 ss.). Si comprende allora meglio quale sia il significato *matematico* dell'opposizione kantiana ad utilizzare il metodo filosofico con il V postulato, *nonostante sia effettivamente possibile arrivare ad una dimostrazione*: tale dimostrazione sarebbe priva di senso, in quanto «contravverrebbe ai principi [della matematica] in quanto scienza», cioè alla sua natura di sistema di calcolo (cfr. *supra*, nt. 83).