



STUDI
E
RICERCHE

Nadia Ambrosetti

L'EREDITÀ ARABO-ISLAMICA
NELLE SCIENZE E NELLE ARTI
DEL CALCOLO
DELL'EUROPA MEDIEVALE

LED

—— Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto ——

ISBN 978-88-7916-388-0□

Copyright 2008

 *Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto*

Via Cervignano 4 - 20137 Milano

Catalogo: www.lededizioni.com - E-mail: led@lededizioni.com

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica e pubblicazione
con qualsiasi mezzo analogico o digitale
(comprese le copie fotostatiche e l'inserimento in banche dati)
sono riservati per tutti i paesi.

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume o fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633.

Le riproduzioni effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da:
AIDRO, Corso di Porta Romana n. 108 – 20122 Milano
E-mail segreteria@aidro.org - sito web www.aidro.org

Videoimpaginazione e redazione grafica: Claudio Corvino
Stampa: Digital Print Service

INDICE

<i>Introduzione</i>	7
<i>1. Tra tarda latinità e alto medioevo: la fondazione del Quadrivio</i>	9
1.1. Marziano Minneio Felice Capella – 1.2. Anicio Manlio Torquato Severino Boezio – 1.3. Flavio Magno Aurelio Cassiodoro – 1.4. Isidoro di Siviglia – 1.5. L'Alto Medioevo – 1.6. Gli epigoni dell'aritmetica boeziana	
<i>2. La tradizione greca e indiana nel mondo islamico</i>	35
2.1. Le traduzioni dal greco – 2.2. Le altre vie – 2.3. Le traduzioni di Euclide e Diofanto – 2.4. I numerali indo-arabici – 2.5. La comparsa dell'algebra in India	
<i>3. Mohammad ibn Musa al-Khawarizmi</i>	47
3.1. La biografia – 3.2. Le opere – 3.3. La tradizione araba dell'Algebra – 3.4. Il contenuto dell'Algebra – 3.5. La lingua dell'Algebra – 3.6. La questione delle fonti dell'Algebra – 3.7. Altri matematici arabi: Abu Kamil e Omar Kayyam (o dell'algebra che non è stata)	
<i>4. Da Oriente a Occidente</i>	95
4.1. Gerberto d'Aurillac – 4.2. Le vie d'accesso all'Occidente – 4.2.1. Italia Meridionale e Sicilia – 4.3. La fioritura del XII e XIII secolo – 4.4. Il contributo ebraico	
<i>5. La tradizione latina dell'Algebra di al-Khawarizmi</i>	113
5.1. I manoscritti – 5.2. Roberto di Chester – 5.3. Gerardo da Cremona – 5.4. Guglielmo de Lunis – 5.5. Confronto fra le tre versioni – 5.6. Il frammento del Liber Alchorismi	
<i>6. Modus Family</i>	135
6.1. I manoscritti – 6.2. Modus dividendi e altre differenze – 6.3. Lo stemma della Modus Family – 6.4. La collocazione dei manoscritti nella tradizione – 6.5. Collazione dei quattro manoscritti della Modus Family – 6.6. Paragrafi Modus	
<i>7. La traduzione latina del Kitab al-bisab al-bindi di al-Khawarizmi</i>	197
7.1. Le quattro opere latine – 7.2. I manoscritti e la loro classificazione secondo Allard – 7.3. Il contenuto dei manoscritti – 7.4. Le cifre arabiche orientali e occidentali nei manoscritti – 7.5. La scoperta di HC 397/726. – 7.6. Il XII secolo – 7.7. Abacisti e algoristi	

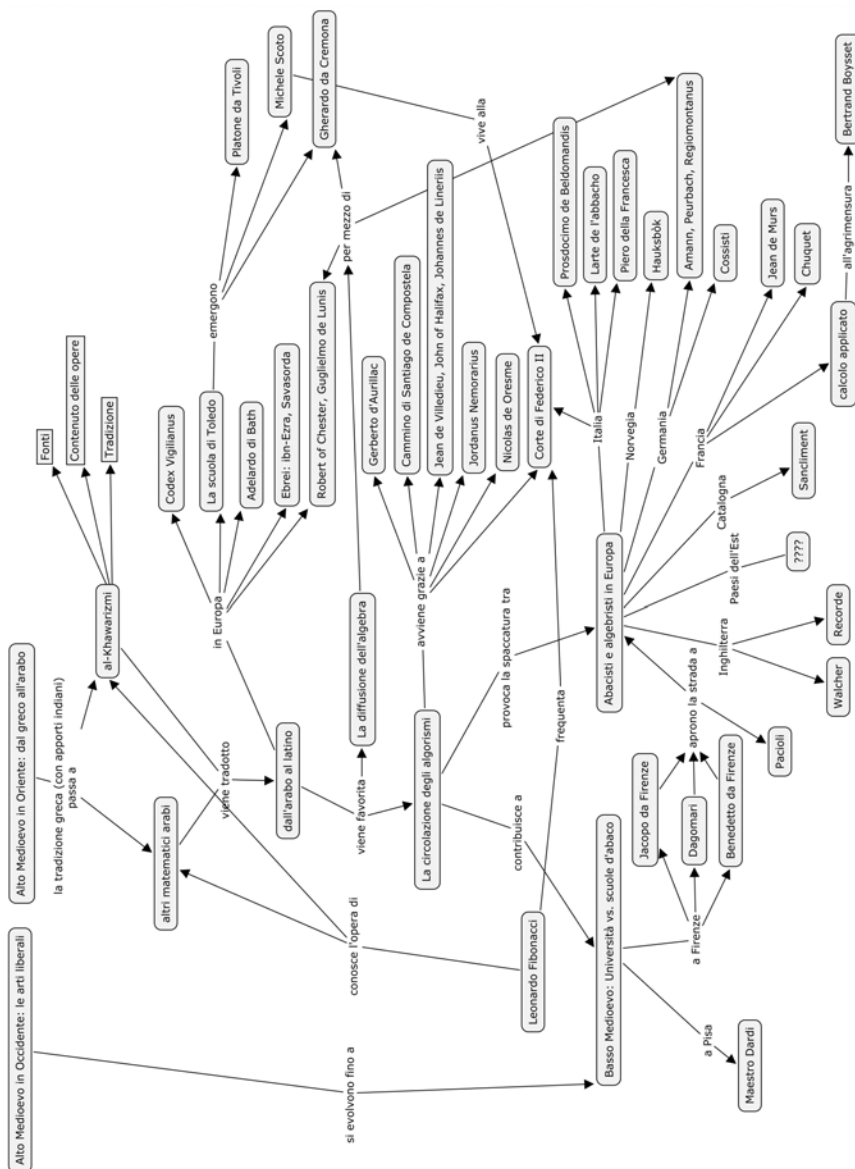
<i>8. Leonardo Fibonacci da Pisa</i>	215
8.1. Il Mediterraneo tra XII e XIII secolo – 8.2. La vita e gli scritti – 8.3. La fortuna	
<i>9. Gli algorismi</i>	233
9.1. Alexandre de Villedieu – 9.2. John of Halifax (Sacrobosco) – 9.3. Jordanus Nemorarius – 9.4. Johannes de Lineriis – 9.5. Per uno studio della diffusione degli algorismi	
<i>10. Algebra e calcolo nell'Europa tardomedievale</i>	247
10.1. L'Italia – 10.2. La Francia – 10.3. Il Belgio – 10.4. I paesi di area germanica – 10.5. Le Fiandre – 10.6. L'Inghilterra – 10.7. I paesi scandinavi – 10.8. La penisola iberica – 10.9. I paesi di area slava – 10.10. La Grecia e Bisanzio – 10.11. Università e scuole d'abaco	
<i>11. L'Umanesimo e l'eclissi dell'eredità algebrica araba</i>	291
11.1. Piero della Francesca – 11.2. Luca Pacioli – 11.3. Gerolamo Cardano – 11.4. Il definitivo tramonto	
<i>Riferimenti bibliografici</i>	307
<i>Allegati</i>	341
<i>Indice dei nomi</i>	401

INTRODUZIONE

Il presente lavoro ha lo scopo di ripercorrere, nel corso del Medioevo fino all'Umanesimo, le tappe e le personalità più significative della formazione del pensiero algebrico e dell'aritmetica con la notazione posizionale in base 10, del loro affermarsi nel mondo arabo orientale ed occidentale, della loro diffusione in Occidente.

Nel ricostruire questo percorso storico si è posta attenzione anche al contesto culturale tardoantico in cui si è inserita la nuova tradizione; alla civiltà indiana ed alle linee essenziali dei suoi apporti alla matematica araba; alla cultura matematica ebraica medievale; ai contributi originali o meno degli studiosi europei; al dilagare dell'applicazione dei nuovi metodi; alle svariate discipline che ne hanno beneficiato, non ultime quelle artistiche.

Il complesso intreccio delle vicende storiche qui sintetizzate viene presentato nella pagina seguente in forma di mappa concettuale, per illustrare anche graficamente la rete di connessioni, relazioni, cause, concause ed effetti, che lega fra loro i protagonisti. Su questo sfondo si è proceduto allo studio di un gruppo di manoscritti inediti, denominati *Modus Family*, appartenenti alla tradizione manoscritta della versione latina di Gerardo da Cremona dell'*Algebra* di al-Khawarizmi. Riunire le storie dei quattro manoscritti in una sola vicenda ha prodotto risultati sorprendenti, al di là delle aspettative che uno studio filologico poteva promettere. Si trovano così legate a filo doppio figure storiche apparentemente lontane nel tempo o nello spazio, come al-Khawarizmi, i maestri d'abaco, Johannes Müller di Königsberg (Regiomontanus), il cardinale Bessarione, Piero della Francesca, Francesco da Borgo San Sepolcro, papa Niccolò V, che permettono di comprendere meglio come studiassero i dotti umanisti europei nel Quattrocento.



1.

TRA TARDA LATINITÀ E ALTO MEDIOEVO: LA FONDAZIONE DEL QUADRIVIO

Le arti liberali (dette anche *disciplinae liberales*, *artes saeculares*, *saeculares litterae*, *artes magnae*) rappresentano un sistema di educazione fondato nell'antichità e passato poi nel Medioevo. I Greci le chiamavano anche arti logiche (λογικὰ τέχνη), base di un sapere ciclico e dunque universale (ἐγκύκλιος παιδεία), indicando con ciò il fatto che la padronanza di queste arti è il fondamento di ogni conoscenza della realtà.

La parola, come testimonia **Cicerone** (*De oratore*, I 16, 72), deriva etimologicamente da *liber* (libero): le discipline necessarie ad un buon oratore sono definite come «*artes quae libero sunt dignae*» (le arti degne di un uomo libero) in contrapposizione alle *artes serviles* o *vulgares* (arti servili o popolari), come già avveniva nella cultura greca, in cui l'antitesi si basava sul fatto che le prime comportano l'uso della mente, ma non l'esercizio fisico muscolare o manuale, tipico delle seconde.

Una prima classificazione di arti liberali fu indicata nel II secolo a.C. da **Dionisio Trace**, ma se ne hanno già anticipazioni nell'opera di **Pitagora** e dell'ultimo dei Pitagorici, **Archita di Taranto** (428-347 a.C.). Anche il retore-filosofo **Isocrate** (436-338 a.C.) si occupò delle discipline che oggi definiremmo umanistiche e **Platone** (427-347 a.C.) di quelle matematiche. Nel IV-V secolo d.C. ne parlarono poi **Agostino** (354-430) nel *De ordine* e nel *De doctrina Christiana*, in cui le discipline vengono intese come rigidamente strumentali al raggiungimento del fine ultimo dell'uomo, ossia la comprensione razionale della Verità rivelata; e più diffusamente **Marziano Capella** nel *De nuptiis Philologiae et Mercurii*.

1.1. MARZIANO MINNEIO FELICE CAPELLA

Marziano Minneio Felice Capella (IV-V sec. d.C.), originario di Cartagine e pagano, di orientamento filosofico prevalentemente neoplatonico, visse in un periodo critico per la storia di Roma, segnato, tra l'altro, dal sacco visigotico dell'Urbe del 410 d.C. e da quello di Cartagine del 439 d.C. da parte dei Vandali. In quell'epoca di decadenza, quando sembrava che geometri ed agrimensori fossero gli unici depositari della tradizione matematico-geometrica antica, ridotta a semplice arte del calcolo ¹, egli avvertì l'esigenza di scrivere un'opera adatta a sintetizzare il sapere classico, organizzato nella tradizionale suddivisione delle arti liberali, risalente a **Varrone** (116-27 a.C.) e destinata ad essere trasmessa al Medioevo, anche grazie a Marziano. La fama dell'opera infatti la portò ad essere uno dei testi più diffusi nelle scuole, ripetutamente copiato (Leonardi, 1959-1960) e commentato (Lutz, 1939, 1957) da studiosi di età carolingia come **Scoto Eriugena** (810-880) e **Remigio di Auxerre** (841-908).

L'influenza di Marziano si può facilmente immaginare anche pensando che la stessa ripartizione delle arti in due gruppi (*sermocinali* e *reali*) ² da lui presentata diventerà canonica nel Medioevo (Riché, 1966); in seguito avrebbe avuto successo anche la scelta dell'autore di ridurle a sette dalle nove indicate da Varrone in analogia con il numero delle Muse, contemplando perciò grammatica, retorica, dialettica, geometria, aritmetica, astronomia e musica ed escludendo architettura e medicina (Stahl, 1965; Stahl, 1992; Ramelli, 2001); infine si può notare che l'impianto allegorico delle arti liberali sarebbe stato ampiamente ripreso in numerose iconografie medievali.

Scritta in forma prosimetrica, l'opera si articola in nove libri, dei quali i primi due sono imperniati sul mito delle nozze celesti: Mercurio (l'Eloquenza), volendosi sposare, segue il suggerimento di Apollo e sceglie Filologia, figlia di Fronesi (la Sagghezza); la fanciulla, dopo aver superato un esame del concilio degli dei ed aver ottenuto l'immortalità per la vastità del proprio sapere, ascende in cielo e riceve dallo sposo, come dono di nozze, sette ancelle: le arti liberali; i sette libri successivi espongono una di seguito all'altra le discipline del Trivio (grammatica, retorica, dialettica) e del Quadrivio (geometria, aritmetica,

¹ Nel cap. VI del *De nuptiis Philologiae et Mercurii*, la presentazione che Geometria (*Permensio terrae*) fa dei contenuti che le sono propri, è caratterizzata dall'utilizzo dell'abaco a polvere ad indicare per questa disciplina la necessità di avvalersi di uno strumento a supporto della rappresentazione grafica e del calcolo. All'arrivo di Aritmetica, Minerva (*Innuba*) ordina di non spostare l'abaco (*sic abacum perstare iubet*), perché tale strumento servirà anche durante l'esposizione di Aritmetica.

² L'invenzione dei nomi (*Trivio* e *Quadrivio*) da attribuire ai due gruppi di discipline è boeziana, modellata sul concetto pitagorico di *bivium* (doppia via al Bene e al Male) a sua volta adattato alle quattro virtù platoniche/cardinali.

astronomia, musica). Lungo questo percorso si compiva la formazione ideale dello studioso per eccellenza, cioè del filosofo, perché le discipline del Quadrivio sono per Marziano, come già per Platone, fonte di verità e propedeutiche alla pura contemplazione intellettuale della natura dei numeri. La sua fonte di ispirazione per la parte sull'aritmetica è, tuttavia, neopitagorica: lo stesso Nicomaco di Gerasa su cui si basa la, pur posteriore, opera di Boezio.

Nel VII libro, a lei dedicato, l'Aritmetica viene così descritta: «Pedia ³ [...] entra allora con un'altra donna di mirabile decoro, a cui sul volto luminoso splendeva la maestà d'una antichità nobilissima, superiore, per natali ed origine, allo stesso [Giove] tonante: appariva venerabile anche per certi particolari straordinari del suo capo. Brillava di un primo candido raggio appena percettibile dal quale ne usciva un altro che continuava dal primo in una [stessa] traiettoria; poi un terzo, un quarto, fino al nono e all'undicesimo, che giravano attorno al capo nobile e venerabile, con duplice e triplice varietà di colori. Ma riuniva poi quei raggi che uscivano innumerevoli, attenuati in uno solo grazie ad un meraviglioso sfumarsi delle tinte. Un velo, in cui erano nascoste tutte le opere della natura, copriva la sua veste dalle molte pieghe e forme. Le dita della giovane si muovevano rapide innanzi e indietro ed erano percorse come da un inarrestabile formicolio. Fatto il suo ingresso ed ottenuto con le dita variamente piegate un numero pari a settecentodiciassette, alzò [le mani] per porgere il saluto a Giove. Allora Filosofia, poiché era accanto alla Tritonide ⁴, le domandò che cosa Aritmetica avesse inteso con quel numero. E Pallade le rispose: 'Ha salutato [Giove] con il suo proprio nome' ⁵.»

Il trattato mantiene anche nelle pagine seguenti la chiave allegorica che lo caratterizza nella presentazione della figura di Aritmetica. Marziano passa ad esaminare i singoli numeri da uno (la *monade*) fino a dieci, esplorandone tutti i significati filosofico-teologici e le sfumature simboliche e collegandoli con i rispettivi enti geometrici (la monade corrisponde al punto e così via).

Seguono la trattazione della natura dei numeri e la loro tassonomia (pari e dispari; composti e non composti; perfetti, imperfetti e più-che-perfetti; piani e solidi), i rapporti tra i numeri ed il concetto di proporzione ⁶.

³ Dal greco *Παιδεία* (Educazione).

⁴ Minerva.

⁵ Il riferimento al numero 717 è un vero enigma nella cui soluzione molti si sono cimentati: significativa la spiegazione di Remigio di Auxerre, che consiste nel notare come un epiteto del dio fosse ἡ ἀρχή (il principio); i valori numerici delle lettere greche corrispondono, sommati, proprio a 717 (H = 8, A = 1, P = 100, X = 600, H = 8). Vedi anche Williams e Williams, 1995).

⁶ L'esposizione dettagliata di questi contenuti viene rinviata al paragrafo 1.2., su Boezio, per la sostanziale coincidenza contenutistica dei due testi.

Aritmetica insegna anche a fare semplici calcoli attraverso esempi numerici, mai caratterizzati però da situazioni anche lontanamente realistiche. Ad esempio, Marziano dice 7: «in ogni numero che ha un altro [numero] divisore, quello che fa il divisore riceve dal medesimo anche il nome di membro. Sia [dato come esempio] il 9: il tre lo divide e la terza parte del numero nove consiste nel tre. Sia il 16: lo divide il 4 e la quarta parte di quello che è il 16 è il 4. E lo stesso si troverà in tutti gli altri numeri. Ne consegue allora che, se un numero ha un membro, esso ha come divisore quel numero che con quel membro abbia il nome in comune, come, ad esempio, del numero nove membro è tre, e il tre lo divide».

1.2. ANICIO MANLIO TORQUATO SEVERINO BOEZIO

Il più significativo contributo alla tradizione matematica altomedievale viene, tuttavia, da **Anicio Manlio Torquato Severino Boezio** (480-524 d.C.), unico filo conduttore con la grande cultura greca: secondo quanto riferito da Cassiodoro (v. 1.3.) in una lettera al re ostrogoto Teodorico (Bubnov, 1914), Boezio, soggiornando ad Atene, avrebbe letto e tradotto ⁸ in latino l'*Arithmetica* del neopitagorico **Nicomaco di Gerasa** (60-120 circa d.C.) e l'*Almagesto* ⁹ di **Tolomeo** (85-165 circa d.C.), oltre al primo libro degli *Elementi* di **Euclide** (325-265 circa a.C.).

Boezio compone quindi un trattato sull'aritmetica, cui aggiunge il *De musica* ¹⁰, forse con l'intenzione di illustrare in seguito tutte e sette le arti liberali (Folkerts, 1970; Masi, 1981, 1983; Folkerts, 2003c).

⁷ *In omni numero qui mensuram in aliquo numero habet, ex eodem et membri nomen acquirit, qui mensuram facit. Sint VIII: hos ternio metitur, et est novenarii numeri tertia pars in tribus. Sint XVI: hos quaternio metitur, et est quarta eorum, qui XVI sunt, IIII; idem in ceteris omnibus numeris reperietur. Sequitur autem ut, si numero membrum sit, in eo numero mensuram is habeat, cui cum eo membro comune nomen sit; ut novenarii numeri membrum in ternione est, eumque tres metiuntur* (VII, 801).

⁸ Una precedente (II sec. d.C.) traduzione apuleiana, dal titolo *Ars arithmetica*, è andata perduta.

⁹ *Almagesto* è l'adattamento arabo di [Σύνταξις μαθηματικὴ] μεγίστη, ossia la *Sintassi matematica massima*.

¹⁰ L'esistenza di un trattato sulla geometria è oggi molto discussa; esso sarebbe andato perduto, tuttavia ci sono state tramandate ben due geometrie sotto il suo nome: una più antica, scritta in Corbie, l'altra della prima metà del secolo XI, composta in Lotaringia, oggi definitivamente attribuita allo Pseudo-Boezio (Folkerts, 1970), (Folkerts, 1975).

1.2.1. Il contenuto del trattato

Il *De institutione arithmetica* (Friedlein, 1867; Masi, 1983), in due libri, è dedicato al suocero del filosofo, il suo maestro Simmaco; Boezio ammette nella *Praefatio*¹¹ il debito con l'opera nicomachea e avverte di averne rimaneggiato il contenuto, ricorrendo nell'esposizione a formule ed a illustrazioni, ove necessario per maggior chiarezza. Nel proemio del primo libro, l'autore afferma che non è possibile raggiungere la perfezione negli studi filosofici senza una buona conoscenza del Quadrivio, le cui discipline a loro volta devono essere affrontate in una sequenza stabilita: aritmetica, musica, geometria e astronomia. La ragione di questa difformità boeziana nell'ordine delle arti del Quadrivio va ricercata nella concezione gnoseologica di Boezio, sostanzialmente neoplatonica: «come dice Platone, ci sono gradi da percorrere nell'ascesa verso la verità, ma è necessario iniziare da quella che ne costituisce il principio, cioè l'aritmetica»¹². Essa detiene questo primato perché Dio, artefice di questo mondo, l'ha avuta come archetipo del suo pensiero e su di essa ha modellato ogni cosa; Boezio fornisce poi una dimostrazione del suo ruolo prioritario, necessario e fondante: sono precedenti per natura tutte le cose che, se vengono tolte, determinano la contemporanea scomparsa anche delle posteriori, mentre, se vengono meno le posteriori, non cambia nulla dello stato della sostanza precedente¹³. Lo stesso accade tra aritmetica e geometria: infatti l'aritmetica precede la geometria, perché, eliminando i numeri, periscono gli enti geometrici; viceversa, anche eliminando questi ultimi, non scompaiono i numeri¹⁴.

¹¹ [...] *Nam et ea, quae de numeris a Nichomacho diffusius disputata sunt, moderata brevitate collegi et quae transcurra velocius angustiore intelligentiae praestabant aditum mediocri adiectione reseravi, ut aliquando ad evidentiam rerum nostris etiam formulis ac descriptionibus uteremur* (I, I, 4-5).

¹² *Sunt enim quidam gradus certaeque progressionum dimensiones, quibus ascendi progredi que possit, ut animi illum oculum, qui, ut ait Plato, multis oculis corporalibus salvari constitui que sit dignior, quod eo solo lumine vestigari vel inspicere veritas queat, hunc, inquam, oculum demersum orbatumque corporeis sensibus haec disciplinae rursus inluminent. Quae igitur ex hisce prima discenda est nisi ea, quae principium matrisque quodam modo ad ceteras obtinet portionem? Haec est autem arithmetica* (I, I, 10).

¹³ *Non modo quod hanc ille huius mundanae molis conditor deus primam suae habuit ratiocinationis exemplar et ad hanc cuncta constituit, [...], sed hoc quoque prior arithmetica declaratur, quod, quaecumque natura priora sunt, his sublati simul posteriora tolluntur; quod si posteriora pereant, nihil de statu prioris substantiae permutatur, ut animal prius est homine* (I, I, 10).

¹⁴ *Hoc idem in geometria vel arithmetica videtur incurrere; si enim numeros tollas, unde triangulum vel quadratum vel quicquid in geometria versatur, quae omnia numerorum denominativa sunt? At vero si quadratum triangulumque sustuleris omnique geometria consumpta sit, tres et quattuor aliorumque numerorum vocabula non peribunt. Rursus cum aliquam geometricam formam dixeris, est illi simul numerorum nomen implicitum; cum numeros dixeris, nondum ullam formam geometricam nominavi* (I, I, 10-11).

Si può dimostrare che l'aritmetica precede anche la musica, perché non solo sono precedenti per natura le cose che constano di se stesse rispetto a quelle che dipendono da qualcosa, ma anche perché la stessa armonia musicale viene descritta con termini numerici e si può quindi ripetere il medesimo ragionamento fatto sopra per la geometria ¹⁵. Lo stesso si può riproporre infine per l'astronomia, la quale a sua volta necessita della geometria per la descrizione di orbite, corpi e fenomeni celesti ¹⁶, e per la musica, perché il moto degli astri è scandito da intervalli armonici (*armonicis modulationibus motus ipse celebratur astrorum*). La geometria è però subordinata alla musica, perché spesso i rapporti geometrici sono rapporti musicali.

Boezio, dopo aver enunciato questa tassonomia logica delle discipline del Quadrivio, esplora la scienza dei numeri, l'aritmetica, perché aiuta a intendere la realtà ideale e immutabile; grazie alla musica e all'astronomia, tale comprensione si estende alla visione razionale della struttura dell'universo ¹⁷. La matematica è dunque indicata come uno strumento basilare per potersi addentrare nei segreti della Natura (Høyrup, 1996).

Il primo libro continua con un breve esame della sostanza del numero fondata sulla nota definizione euclidea «Numero è una collezione di unità o un mucchio di quantità costituito di unità» (*Numerus est unitatum collectio, vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus*): risulta evidente che sotto l'interesse di Boezio cadono esclusivamente i numeri naturali ¹⁸. Viene poi presentata una minuziosa classificazione dei numeri, distinti prima in pari e dispari, secondo varie definizioni risalenti a Pitagora ¹⁹ e ad altri matematici più antichi, di cui non viene indicato il nome ²⁰.

¹⁵ *Musica vero quam prior sit numerorum vis, hinc maxime probari potest, quod non modo illa natura priora sunt, quae per se constant, quam illa, quae ad aliquid referuntur. Sed etiam ea ipsa musicae modulatio numerorum nominibus adnotatur, et idem in hac evenire potest, quod in geometria praedictum est* (I, I, 11).

¹⁶ *Sphericam vero atque astronomicam tanto praecedit, quanto due reliquae disciplinae hanc tertiam natura praecedunt. In astronomia enim circuli, sphaera, centrum, parallelique circuli mediusque axis est, quae omnia geometricae disciplinae curae sunt* (I, I, 11).

¹⁷ *Quare, quoniam prior, ut clariuit, arithmeticae vis est, hinc disputationis sumamus exordium* (I, I, 12).

¹⁸ Nel seguito del paragrafo, per brevità, con «numero» si fa riferimento esclusivamente a numeri naturali, zero escluso.

¹⁹ *Par numerus est, qui sub eadem divisione potest in maxima parvissimaque dividi, maxima spatio, parvissima quantitate secundum duorum istorum generum contrarias passionem. Inpar vero numerus est, cui hoc quidem accidere non potest, sed cuius in duas inaequales summas naturalis est sectio* (I, IV, 13).

²⁰ *Par numerus est, qui in duo aequalia et in duo inaequalia partitionem recipit, sed ut in neutra divisione vel in paritati paritas vel paritati inparitas misceatur, praeter solum paritatis principem, binarium numerum, qui in aequalem non recipit sectionem, propterea quod ex duabus unitatibus constat et ex prima duorum quoddammodo paritate.* (I, V, 14).

Viene in seguito illustrato l'aspetto peculiare dell'unità, poiché ciascun numero è preceduto e seguito da due numeri, la cui semisomma è pari al numero stesso. Solo l'uno, appunto, fa eccezione, dal momento che ha un solo termine accanto a sé, il due, di cui è la metà ²¹. Come si può vedere e come ci si poteva aspettare, non è minimamente contemplato lo zero.

Boezio, dopo aver rapidamente introdotto la tecnica di divisione dei numeri pari, li ripartisce in:

- **Parimenti pari** ²², che con simbologia moderna si definirebbero del tipo 2^n , i quali hanno la caratteristica di essere divisibili per 2 fino a dare come risultato l'unità.
- **Parimenti dispari** ²³, ossia $2(2n + 1)$, che sono generati dalla successione dei numeri dispari; infatti, da $\{3, 5, 7, 9 \dots\}$ nasce $\{6, 10, 14, 18 \dots\}$, una progressione di ragione 4, così come la generatrice era di ragione 2.
- **Disparimenti pari** ²⁴, ossia il corrispettivo di $2^{m+1}(2n+1)$ con $m, n \in \mathbb{N}$: essi possono essere divisi almeno 2 volte (nel caso minimo di $m = 1$) per 2 prima di dare come risultato un numero dispari. Un esempio è il 28, nel cui caso $m = 1$ e $n = 3$. Essi sono una commistione degli altri due tipi: infatti, come è facile vedere, ne sono casi particolari, cui ci si può ricondurre ponendo, in $2^{m+1}(2n + 1)$, $n = 0$ oppure $m = 0$.

Alla natura ed alle proprietà dei numeri disparimenti pari vengono poi dedicati un paragrafo ed una figura (*descriptio*) in cui essi vengono collocati in uno schema simmetrico (una sorta di tabella, v. *fig. 1.1.*), che ne evidenzia le relazioni reciproche, se attentamente studiato. Infatti la presenza di soli numeri non permette, senza una guida, di comprendere immediatamente tali relazioni.

Boezio perciò invita il lettore ad osservare la *latitudo* (NB: le colonne) del quadrato centrale ed a notare come, nella prima colonna, ad esempio, XX sia la media aritmetica fra XII e XXVIII, allo stesso modo in cui XXVIII è la media aritmetica fra XX e XXXVI; ciò comporta, quindi, che la differenza tra i termini della prima colonna sia costante (e pari ad 8). Le stesse osservazioni si possono fare per le restanti colonne: questa è, secondo Boezio, una tipica proprietà dei numeri disparimenti pari.

²¹ *Sola enim unitas circum se duos terminos non habet, atque ideo eius, qui est prope se, solius est medietas. Nam iuxta .I. solus est binarius naturaliter constitutus, cuius unitas media pars est.* (I, VII, 16).

²² *Pariter par numerus est, qui potest in duo paria dividi, eiusque pars in alia duo paria partisue pars in alia duo paria, ut hoc totiens fiat, usquedum divisio partium ad indivisibilem naturaliter perveniat unitatem* (I, IX, 17).

²³ *Pariter autem impar numerus est, qui et ipse quidem paritatis naturam substantiamque sortitus est, sed in contraria divisione naturae numeri pariter paris obponitur* (I, X, 21).

²⁴ *Inpariter par numerus est ex utrisque confectus et medietatis loco gemina extremitate concluditur, ut, quo ab utroque discrepet, eadem ad alterutrum cognatione iungatur* (I, XI, 25).

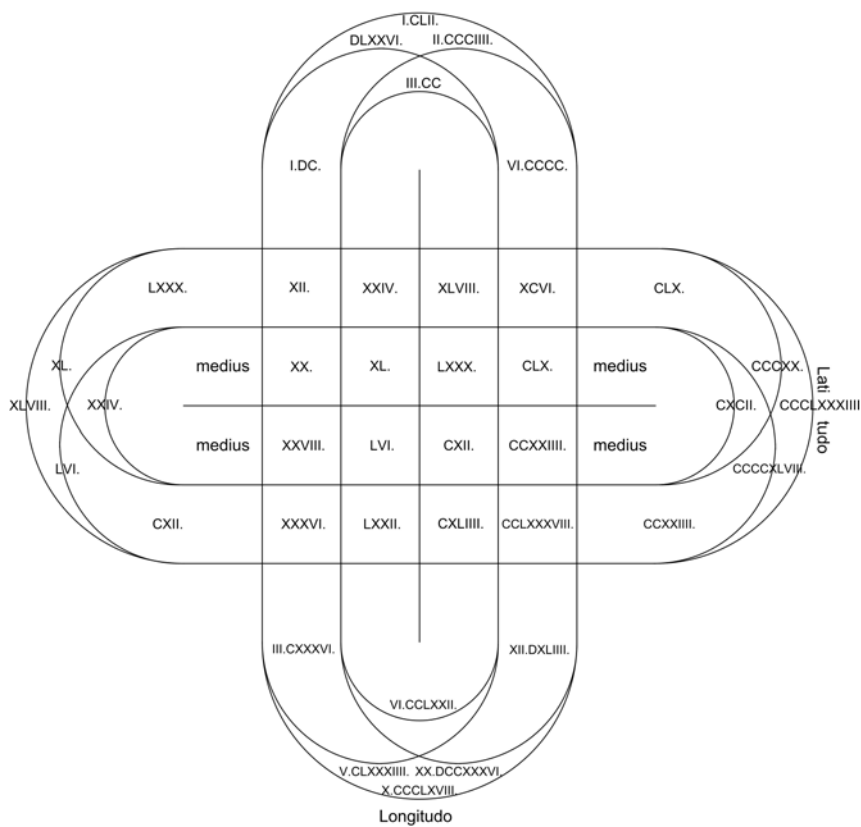


Fig. 1.1. – Da Boetius, *Arithmetica* I, 28.

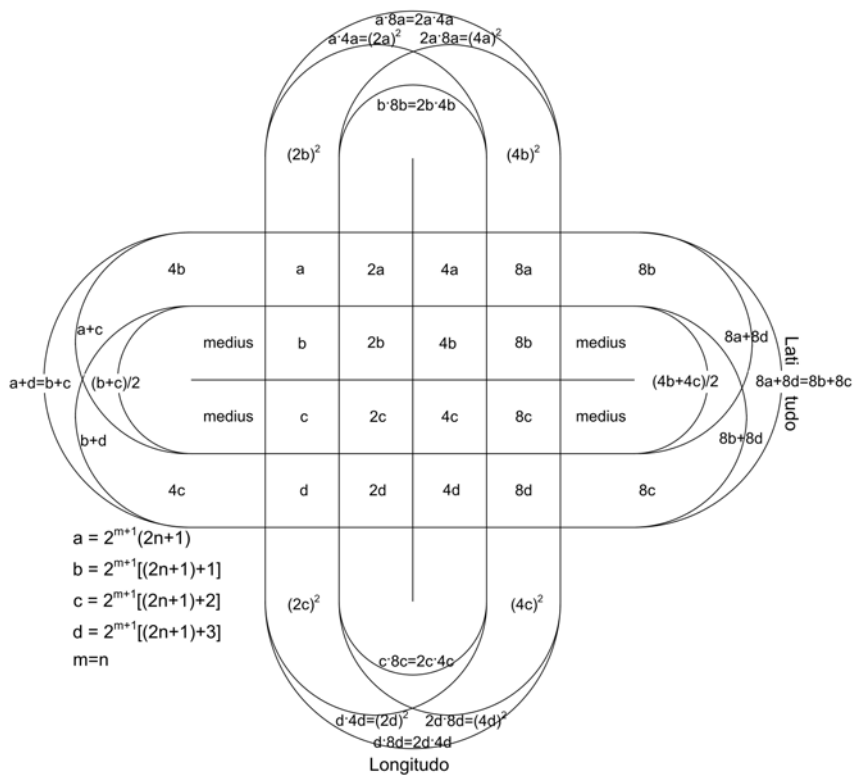


Fig. 1.2. – Tabella di figura 1.1. adattata alla simbologia attuale.

Poi l'autore passa all'esame della *longitudo* (le righe). In questo caso, rileva innanzitutto come il prodotto di due termini non contigui di una stessa riga, tra i quali si frappone un solo termine, sia uguale al quadrato del termine intermedio; infatti XII per XLVIII fa DLXXVI, che è appunto il quadrato di XXIII. Se poi si moltiplicano fra di loro due termini posti agli estremi della riga, il risultato sarà uguale al prodotto dei due termini intermedi. Questa caratteristica, sottolinea Boezio, è in comune con i numeri parimenti pari e si può verificare in ciascuna riga.

A pg. 17 si riporta una versione della figura di Boezio contenente parametri al posto dei numeri, per consentire di visualizzare più facilmente tutti i rapporti illustrati.

Nel paragrafo successivo l'autore si occupa dei numeri dispari, suddividendoli in 3 tipi:

- **primi e incomposti:** ossia i numeri primi, divisibili solo per se stessi e per l'unità ²⁵; il fatto che anche il numero due, benché pari, presenti la stessa caratteristica non viene citato;
- **secondi e composti:** scomponibili in numeri primi dispari ²⁶;
- **incomposti per sé e composti rispetto agli altri:** si tratta delle potenze di numeri primi interi con esponente intero maggiore di 1; essi infatti conservano sì i requisiti dei numeri primi, ma sono scomponibili ²⁷.

Il discorso sui numeri primi conduce Boezio ad interrogarsi sulle loro caratteristiche e ad introdurre il cosiddetto crivello ²⁸ di Eratostene, con cui individuarli nella successione dei numeri dispari. L'autore passa poi anche ad indicare le operazioni per determinare, sempre nella successione dei numeri dispari, i numeri del terzo tipo, ossia le potenze di numeri primi.

Per quanto riguarda i numeri pari, Boezio presenta la classificazione in:

- **perfetti:** uguali alla somma di tutti i loro fattori compresa l'unità, ma escluso il numero stesso; un esempio è dato dal numero $6 = 1 + 2 + 3$;

²⁵ *Et primus quidem et incompressus est, qui nullam aliam partem habet nisi eam, quae a tota numeri quantitate denominata sit, ut ipsa pars non sit nisi unitas* (I, XIV, 30).

²⁶ *Secundus vero et compositus et ipse quidem impar est, propterea quod eadem imparis proprietate formatus est, sed nullam in se retinet substantiam principalem compositusque est ex aliis numeris habetque partes et a se ipso et ab alieno vocabulo denominatas* (I, XV, 31).

²⁷ *His vero contra se positus, id est primo et incompresso et secundo et composito, et naturali diversitate disiunctis aliis in medio consideratur, qui ipse quidem [-33-] compositus sit et secundus et alterius recipiens mentionem atque ideo et partis alieni vocabuli capax, sed cum fuerit ad alium eiusdem generis numerum comparatus, nulla cum eo communi mensura coniungitur* (I, XVI, 32).

²⁸ Procedimento iterativo per l'individuazione dei numeri primi fino ad un numero n prefissato: consiste nel tabulare tutti i naturali da 2 a n , cancellando, ad ogni iterazione, i multipli (an , con $a > 0$) del primo numero non ancora esaminato; il procedimento si conclude quando tutti i numeri non cancellati sono stati esaminati.

- **imperfetti** o **superflui**: sono maggiori della somma suddetta e per la loro sproporzione vengono paragonati dall'autore ad un gigante centimane o con tre corpi, come Gerione; un esempio è dato dal 12;
- **ultraperfetti** o **deminuti**: inferiori alla somma delle parti, il loro termine mitologico di paragone è un Ciclope o comunque un essere privo di una parte del corpo; l'esempio è l'8.

Alla generazione dei numeri perfetti viene dedicato l'intero paragrafo successivo, dopo l'avvertimento che tali numeri, come le virtù, sono rari. Infatti, segnala Boezio, tra 1 e 10 c'è solo il 6, tra 11 e 100 solo il 28, tra 101 e 1000 il 496, tra 1001 e 10000 solo l'8128. Loro ulteriore caratteristica ²⁹ è il fatto che l'ultima cifra è alternativamente il 6 o l'8.

Il libro si conclude con lo studio delle relazioni fra i numeri: uguaglianza ³⁰ e disuguaglianza, quest'ultima a sua volta caratterizzata da due sottotipi: maggioranza/minoranza (mutuamente esclusive) e opposizione di contrari ³¹ (l'esempio è tratto dalla realtà quotidiana: discente/docente).

La disuguaglianza per maggioranza si distingue in varie categorie e sottocategorie, legate con le rispettive di minoranza da un rapporto di dualità:

- **multiplo**: a è multiplo di b se esiste un numero n tale che $a = nb$; per $n = 2$, a è detto superduplo di b ; per $n = 3$, supertriplo, etc.;

²⁹ *Est autem in his quoque magna similitudo virtutis et vitii. Perfectos enim numeros rareriter invenies, eosque facile numerabiles, quippe qui pauci sint et nimis constanti ordine procreati. At vero superfluos ac deminutos [-42-] longe multos infinitosque repperies, nec ullis ordinibus passim inordinateque dispositos et a nullo certo fine generatos. Sunt autem perfecti numeri intra denarium numerum .VI. intra centenarium .XXVIII. intra millenarium .CCCCXCVI. intra decem milia .VIII. CXXVIII. Et semper hi numeri duobus paribus terminantur, .VI. et .VIII., et semper alternatim in hos numeros summarum fine provenient.* (I, XX, 41-42).

Il quinto numero perfetto (33550336) viene comunemente attribuito a **Hudalricus Regius** (*Utriusque Arithmeticae Epitome*) nel 1536, ma lo stesso numero compare anche, insieme al sesto (8589869056), in una nota a margine su un manoscritto del XV secolo di uno studente della scuola d'abaco fiorentina di Domenicho d'Aghostino; il sesto è citato anche in un commento agli *Elementi* di Euclide di Johann Scheubel del 1555, che tuttavia è rimasto inedito fino al 1977 (Sándor e Crstici, 2004). Il bolognese Pietro Antonio Cataldi, nel 1603, nel suo *Trattato de' numeri perfetti* (Cataldi, 1603), si ascrive la scoperta del sesto e del settimo (137438691328).

³⁰ *Et aequale quidem est, quod ad aliquid comparatum neque minore summa infra est, neque maiore transgreditur, ut denarius denario vel ternarius ternario vel cubitum cubito vel pes pedi et his similia* (I, XXI, 45).

³¹ *Namque maius minore maius est et minus maiore minus est, et utraque non eisdem vocabulis, quemadmodum secundum aequalitatem [-46-] dictum est, sed diversis distantibusque signata sunt, ad modum discentis scilicet vel docentis vel caedentis vel vapulantis vel quaecunque ad aliquid relata aliter denominatis contrariis comparantur* (I, XXI, 45-46).

- **superparticolare:** a è chiamato superparticolare di b se $a = b + \frac{b}{n}$ per un qualche n ; per $n = 2$, a è detto sesquialtero ³² di b ; per $n = 3$, a è detto sesquiterzo, etc.;
- **superparziente:** a è detto n -multiplo super- m -parziente di b se $a = bn + m$ ad esempio, 16 rapportato a 6 è definito duplice superquadriparziente, perché dalla divisione risulta che il 6 è contenuto esattamente 2 volte con l'avanzo di 4;
- **multiplo superparticolare:** a è super- n -particolare se $a = n + \frac{1}{n}$ per qualche n intero: ad esempio $3/2 = 1 + 1/2$ (sesquialtero), $4/3 = 1 + 1/3$ (sesquiterzo), etc.;
- **multiplo superparziente:** a è superparziente se $a = \frac{(2b+c)}{b} + c$ per a, b interi diversi tra loro.

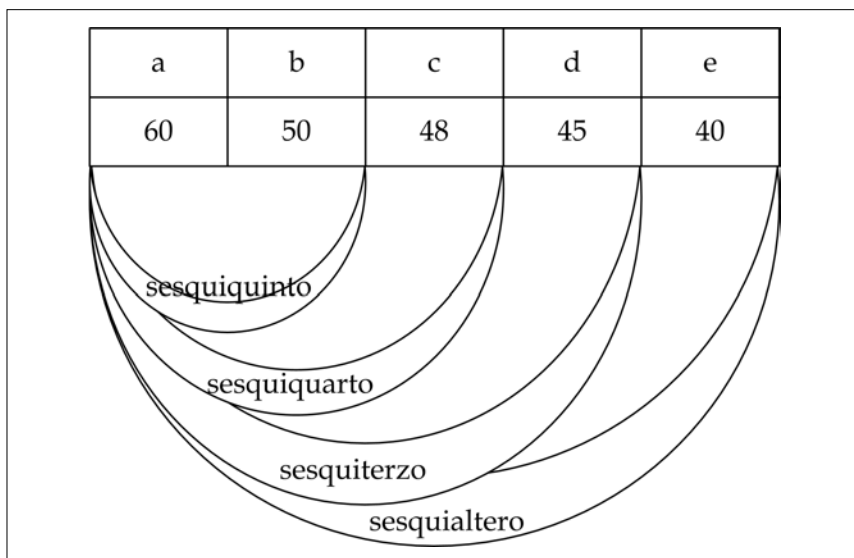


Fig. 1.3. – Adattato da Zarlino – *Dimostrazioni harmoniche* (1571)

³² Il termine *sesquialtera* è l'unico ad essere in uso ancor oggi: nell'arte organaria, esso indica un registro composto di due file di canne, la prima delle quali è accordata alla duodecima del suono fondamentale (ossia una quinta sopra l'ottava, con un rapporto pari a $3/2$ tra le rispettive frequenze, donde il nome di *sesquialtera*), mentre la seconda fila è accordata alla decimasettima del medesimo suono fondamentale (ossia una terza sopra la doppia ottava, con un rapporto pari a $5/4$ tra le rispettive frequenze). Detti suoni rappresentano quindi, rispettivamente, la seconda e la quarta armonica della fondamentale.

Questa laboriosa nomenclatura ³³ (Masi, 1983; Allard, 1999) assume significato se si pensa al suo impiego per la descrizione del ritmo musicale dall'epoca greca (Pitagora, Aristide Quintiliano e Claudio Tolomeo) fino almeno al Cinquecento, con le opere di Zarlino (Zarlino, 1571) e Pontio (Pontio, 1588).

Il secondo libro dell'*Institutio Arithmetica* è dedicato soprattutto allo studio di tradizione pitagorica dei numeri figurati piani (triangolari, quadrati, pentagonali, esagonali, ettagonali) e solidi (piramidali, a parallelelepipedo, sferici), e successivamente alla teoria delle proporzioni numeriche, dato che i contenuti strettamente aritmetici (la teoria dei numeri) possono dirsi conclusi ³⁴.

I numeri poligonal si basano sulla serie il cui n -esimo termine è

$$n + \frac{1}{2}n(n-1)a; n, a \in \mathbb{N};$$

ponendo $a = 1$, la serie descrive i numeri triangolari: 1, 3, 6, 10 ...; per $a = 2$, si hanno i quadrati: 1, 4, 9, 16 ...; per $a = 3$, i pentagonali: 1, 5, 12, 22, ...

Boezio mostra poi come dalla somma dei termini delle serie sopra descritte, attraverso complicati calcoli, si ottengono nuove serie denominate piramidali.

L'autore passa quindi a studiare le proporzioni (ad esempio, media aritmetica ³⁵, geometrica ³⁶ e armonica ³⁷), ricostruendone la storia a partire da Pitagora, Platone e Aristotele, e indicandole come protrettiche rispetto alla teoria musicale.

³³ Definizioni simmetriche sono fornite per sottomultiplo, subparticolare, subparziente, sottomultiplo subparticolare, sottomultiplo subparziente.

³⁴ *Nunc res admonet quaedam de proportionibus disputantes, quae nobis vel ad musicas speculationes vel ad astronomicas subtilitates vel ad geometricae considerationis vim vel etiam ad veterum lectionum intellegentiam prodesse possint, arithmetica introductionem commodissime terminare.*

³⁵ *Arithmetica medietatem vocamus, quotiens vel tribus vel quotlibet terminis positis aequalis atque eadem differentia inter omnes dispositos terminos invenitur* (II, XLII, 140).

³⁶ *Geometrica medietas expediatur, quae sola vel maxime proportionalitas appellari potest propterea quod in eisdem proportionibus [-145-] terminorum vel in maioribus vel in minoribus speculatio ponitur. Hic enim aequa semper proportio custoditur, numeri quantitas multitudoque negligitur, contrarie quam in arithmetica medietate* (II, XLIII, 144-145).

³⁷ *Armonica autem medietas est, quae neque eisdem differentiis nec aequis proportionibus constituitur, sed illa, in qua quemadmodum maximus terminus ad parvissimum terminum ponitur, sic differentia maximi et medii contra differentiam medii atque parvissimi comparatur* (II, XLVII, 152).

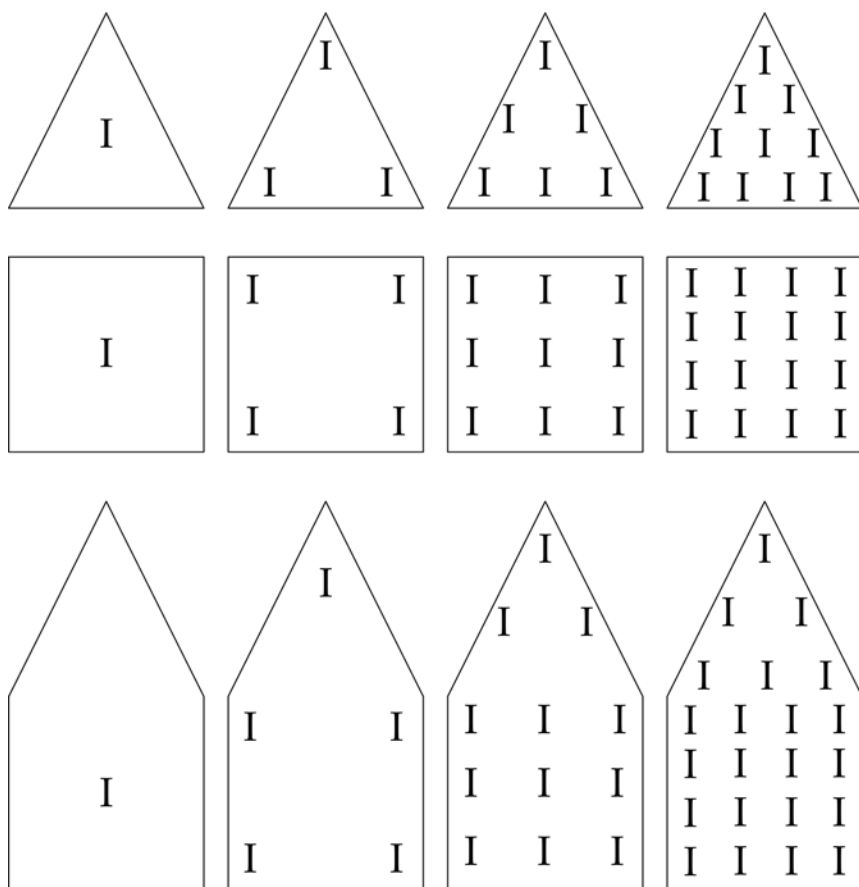


Fig. 1.4. – Numeri triangolari, quadrati e pentagonali.

1.2.2. La fortuna del trattato

La diffusione del trattato in Europa è già stata oggetto di studio da parte di Masi (Masi, 1983) e di Guillaumin (Guillaumin, 1995), che hanno individuato un gran numero di manoscritti, non tutti completi, il più antico dei quali risale al IX secolo e fu scritto a Tours per Carlo il Calvo; in seguito il codice entrò nella biblioteca di Gerberto d'Aurillac e di Ottone III, per finire nella Biblioteca di Stato di Bamberg (Ms. class. 5), dove oggi è conservato. Da una ricerca effettuata attraverso fonti cartacee, come incipitari e cataloghi, ed elettroniche (alcune, tra cui, in primis, la banca dati Jordanus³⁸, reperibili anche su Internet) è stato possibile studiare anche quantitativamente il corpus dei manoscritti boeziani (v. *Allegato n. 1.*). Si riportano di seguito due grafici che illustrano la distribuzione geografica (fig. 1.5.) e cronogeografica (fig. 1.6.) dei manoscritti: vengono esclusi i codici conservati negli Stati Uniti, dal momento che si tratta evidentemente di acquisizioni tarde rispetto all'epoca di copiatura dell'opera, di origine talvolta francese o inglese, e non sono quindi rappresentativi della popolarità del testo boeziano nel periodo storico qui considerato.

Spicca il considerevole numero di manoscritti conservati (e spesso copiati) in area francese, che datano in maggior parte al X secolo. Viceversa in Germania il numero di copie dell'opera boeziana sembra mantenersi pressoché invariato

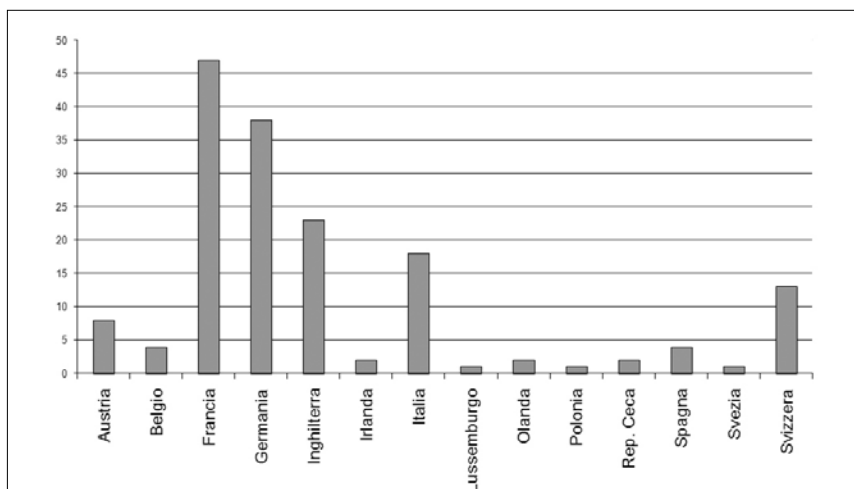


Fig. 1.5. – Distribuzione geografica attuale dei manoscritti boeziani.

³⁸ Realizzata congiuntamente dall'Università di Monaco di Baviera e dall'Istituto Max Planck di Berlino e liberamente consultabile (www.jordanus.org).

nei secoli X-XII. In Inghilterra si evidenzia invece un picco fra XI e XII secolo, mentre in epoche precedenti e seguenti il numero di manoscritti è molto esiguo (di norma, non superano l'unità). In Italia il numero di manoscritti boeziani conservati e databili nei secoli fra XIII e XV è ben superiore a quelli di secoli precedenti, segno forse di un interesse tardivo per l'opera, in una fase storica già caratterizzata dalla comparsa dei numerali indo-arabici, del *Liber Abaci* di Fibonacci e dalla presenza massiccia di trattatistica d'abaco in generale.

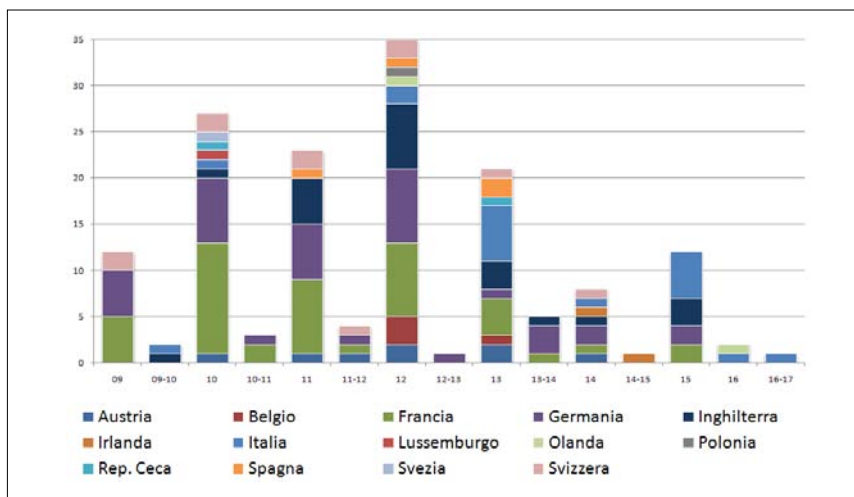


Fig. 1.6. – Distribuzione cronogeografica dei manoscritti boeziani.

1.3. FLAVIO MAGNO AURELIO CASSIODORO

Analogamente a Marziano, pur senza conoscerne l'opera, **Flavio Magno Aurelio Cassiodoro** (485/490-580 d.C.) raccoglie quanto rimane della tradizione antica di ispirazione varroniana sulle sette arti liberali; le sue *Institutiones divinarum et saecularium litterarum* o *lectionum* (Mynors, 1937) vengono scritte a Vivarium presso Squillace (fra il 554 e il 563), nel monastero da lui fondato; fin dalla *Praefatio*, Cassiodoro racconta di un suo progetto, ideato con papa Agapito (pontefice nel 535-536), di istituire a Roma, sull'antico modello alessandrino, una *schola* di studi cristiani, da dove l'anima ricevesse salvezza eterna e la lingua dei fedeli si nutrisse di un eloquio casto e purissimo ³⁹; la guerra gotica

³⁹ *Unde et anima susciperet aeternam salutem et casto atque purissimo eloquio fidelium lingua comeretur* (I,1, Praefatio).

(*bella ferventia et turbulenta*) era stata la causa dell'accantonamento di tale progetto, realizzato in seguito appunto a Vivarium e destinato ai soli monaci, per garantire loro una formazione culturale e cristiana di base, raramente posseduta a quei tempi anche dal clero. A tal fine, il primo dei due libri dell'opera è dedicato alle lettere sacre, il secondo a elementi delle arti liberali; le arti del Quadrivio vengono tutte concentrate nella sola disciplina matematica, accomunate dal fatto di trattare quantità. Fondamento delle quattro è senz'altro l'aritmetica, di cui le altre hanno bisogno per descrivere il proprio oggetto, mentre essa è indipendente ⁴⁰.

Cassiodoro spiega il significato del termine aritmetica ⁴¹ come ciò che presiede ai numeri, definiti come moltitudini costituite da monadi, e ne indica il fine: insegnare la natura del numero astratto ed i suoi accidenti (parità, disparità, etc.). Nonostante una premessa tanto ambiziosa, il testo non offre poi una trattazione ricca, anzi ripropone i contenuti marziane e boeziani in sintesi estrema, limitandosi quasi esclusivamente a fornire la tassonomia dei numeri e le relative definizioni delle classi ⁴² disposte in un lungo elenco. Cassiodoro aggiunge tuttavia alcune osservazioni sulla presenza del numero nella vita quotidiana (*Numerus est qui cuncta disponit; per ipsum discimus quid primo, quid secundo facere debeamus* ⁴³) e nella Bibbia, attribuendo in tal modo ai numeri quel significato mistico caratteristico del pensiero e dell'arte medievale. Come osserva la Franci (Franci, 1996), «ha così inizio una tradizione secondo la quale il fine dell'istruzione è la comprensione della verità rivelata all'uomo dalle Sacre Scritture. Da questo presupposto discende la necessità dell'istruzione dei chierici e quindi la presenza di scuole nei monasteri».

⁴⁰ *Scriptores saecularium litterarum inter disciplinas mathematicas primam omnium arithmetica esse uoluerunt, propterea quoniam musica et geometria et astronomia, quae sequuntur, indigent arithmetica ut uirtutes suas ualeant explicare, uerbi gratia, simplum ad duplum, quod habet musica, indiget arithmetica; geometria uero quod habet trigonum, quadriangulum, uel bis similia, idem indiget arithmetica; astronomia etiam quod habet in motu siderum numeros punctorum, indiget arithmetica; arithmetica uero ut sit, neque musica neque geometria neque astronomia egere cognoscitur* (II, IV).

⁴¹ *Arithmetica uero dicitur eo quod numeris praeest. Numerus autem est ex monadibus multitudo composita, ut iii, v, x, xx et cetera. Intentio arithmeticae est docere nos naturam abstracti numeri et quae ei accidunt, ut, uerbi gratia, parilitas, imparilitas et cetera.* (II, IV).

⁴² *Pariter impar numerus est qui similiter solummodo in duabus partibus diuidi potest aequalibus, ut x in v, xiiii in vii, xviii in viii et bis similia* II, IV.

⁴³ II, IV.

1.4. ISIDORO DI SIVIGLIA

Nel terzo dei 20 libri delle *Etymologiae* o *Origines* di **Isidoro di Siviglia** (c. 560-636), quello intitolato *De quatuor disciplinis mathematicis* (Lindsay, 1911), il significato della parola aritmetica è così spiegato ⁴⁴: «L'aritmetica è la disciplina dei numeri. I Greci chiamano il numero ἀριθμὸν. Gli scrittori di materie secolari hanno voluto che fosse la prima tra le discipline matematiche proprio perché essa non necessita di altre discipline. Invece la musica, la geometria e l'astronomia, che seguono, hanno bisogno del suo aiuto per esistere». Principali autorità nel campo, secondo Isidoro, erano stati Pitagora (il fondatore) e Nicomaco (il divulgatore) in Grecia, Apuleio e Boezio a Roma, con il ruolo di traduttori di Nicomaco ⁴⁵.

Confrontata con quella di Boezio, l'opera di Isidoro rivela sia notevole esiguità nei contenuti, sia una forma espressiva molto più semplice, segno evidente che erano mutate le esigenze culturali dei destinatari ai quali era rivolta. Il suo pubblico non aveva quasi familiarità con la lingua latina dotta e perciò l'autore desiderava riabituarlo all'uso di un linguaggio scientifico universale (Fontaine, 1959).

La semplicità della trattazione si dimostra facilmente leggendo, a titolo di esempio, la voce *numero* nel capitolo III: «Numero è una moltitudine costituita di unità. Infatti uno è il principio (lett. il 'seme') del numero, ma non un numero. *Nummus* (moneta) ha dato il suo nome a *numerus*, e per la frequenza del suo uso ha dato origine alla parola. *Unus* deriva il suo nome dal greco; infatti i Greci chiamano uno ἕνα, come *duo*, *tria* che quelli chiamano δύο e τρία. *Quatuor* ha preso il suo nome dalla figura quadrata. *Quinque* invece riceve il suo nome non secondo natura, ma secondo la volontà di colui che ha dato i nomi ai numeri. *Sex* e *septem* vengono dal greco. Infatti in molti vocaboli che in greco hanno l'aspirazione, noi poniamo una S al posto dell'aspirazione. Di qui deriva *sex* al posto di ἕξ e *septem* al posto di ἑπτὰ, come *serpillum* al posto di *berpillum*. *Octo* viene per traslazione, come essi anche noi [lo chiamiamo]: così quelli ἐννέα, noi *novem* e quelli δέκα e noi *decem*» ⁴⁶.

⁴⁴ *Arithmetica est disciplina numerorum. Graeci enim numerum ἀριθμὸν dicunt. Quam scriptores saecularium litterarum inter disciplinas mathematicas ideo primam esse voluerunt, quoniam ipsa ut sit nullam aliam indiget disciplinam. Musica autem et Geometria et Astronomia, quae sequuntur, ut sint atque subsistant istius egent auxilium* (III, I, I).

⁴⁵ *Numeri disciplinam apud Graecos primum Pythagoram autumant conscripsisse, ac deinde a Nicomacho diffusius esse dispositam; quam apud Latinos primus Apuleius, deinde Boetius transtulerunt.* (III, II, D).

⁴⁶ *Numerus autem est multitudo ex unitatibus constituta. Nam unum semen numeri esse, non numerum. Numero nummus nomen dedit, et a sui frequentatione vocabulum indidit. Unus a Graeco nomen trahit; Graeci enim unum ena dicunt: sic duo et tres, quos illi duo*

In conclusione, Isidoro riprende le definizioni, già presentate da Boezio, aggiungendo solo esempi immediati, del tutto privi di commenti (Codoñer, 1990). L'autore chiude la parte relativa all'aritmetica con un paragrafo dedicato all'infinità dei numeri ⁴⁷: «è certissimo che i numeri sono infiniti, poiché in qualunque numero tu pensi di collocare la fine, quello stesso può, non dico, aumentare di uno, ma, sia pure grande quanto vuoi e contenga una quantità grande a piacere, [può] non solo raddoppiare, ma anche moltiplicarsi per la stessa scienza del calcolo». Un'opera sul calcolo digitale, intitolata *De numeris*, è stata controversamente attribuita allo stesso Isidoro, che ne avrebbe ripreso i contenuti da Marziano (Stahl, 1965).

1.5. L'ALTO MEDIOEVO

Nei secoli VII-IX l'istruzione era impartita nei monasteri ed era destinata ai chierici, ma la sua qualità era estremamente bassa: si insegnavano i fondamenti essenziali del leggere e dello scrivere per il Trivio, mentre nel Quadrivio, per ragioni liturgiche, era attribuita grande rilevanza alla musica ⁴⁸. Quanto all'insegnamento dell'aritmetica, il computo digitale e quello con l'abaco affiancavano lo studio dell'aritmetica boeziana, di cui sopravviveva la parte più strettamente attinente alla teoria musicale. Grande rilievo aveva infine il *computus Paschalis* (o, più semplicemente, *compotus*), ossia il calcolo della data della Pasqua. Era un'aritmetica legata quindi essenzialmente a necessità religiose, liturgiche e pratiche della vita monastica (Evans, 1977). Un esempio significativo è costituito dal monaco inglese **Beda** (674-735), detto il Venerabile, nelle cui opere sono presenti un sintetico trattato sull'aritmetica boeziana, *De arithmetice propositionibus* (Folkerts, 1972, 2003a); uno sul calcolo del tempo, il *De ratione*

et tria appellant. Quattuor vero a figura quadrata nomen sumpserunt. Quinque autem non secundum naturam, sed secundum placitum voluntatis vocabulum acceperunt ab eo, qui numeris nomina indidit. Sex autem et septem a Graeco veniunt. In multis enim nominibus quae in Graeco aspirationem habent, nos pro aspiratione S ponimus. Inde est pro ex sex, [et] pro epta septem sicut pro herpillo serpillum. Octo vero per translationem, sicut illi et nos: ita illi ennea, nos novem: illi deka, nos decem. (III, III, 1-3).

⁴⁷ *Numeros autem infinitos esse certissimum est, quoniam in quocumque numero finem faciendum putaveris, idem ipse non dico uno addito augeri, sed quamlibet sit magnus, et quamlibet ingentem multitudinem continens, in ipsa ratione atque scientia numerorum non solum duplicari, verum etiam multiplicari potest. (III, IX, 1).*

⁴⁸ Come ricorda Riché (Riché, 1996), questo oblio calato sulla tradizione tardoromana è testimoniato bene in Francia da Gregorio di Tours (538-594) che nella sua *Historia* si riferisce a Marziano Capella come a *Martinus noster* e declassa le arti liberali rispettivamente a calcolo (soprattutto divisioni), agrimensura, canto e conoscenza della disposizione degli astri.

temporum, contenente un libro dedicato al calcolo digitale, intitolato *Liber de loquela per gestum digitorum* o *De computo vel loquela digitorum* (Lemoine, 1932; Jones, 1994); ed infine uno sul calendario ecclesiastico, *De temporibus cum martyrologio*. Proprio il calcolo digitale consentiva di introdurre gli studenti alla conoscenza del Quadrivio. Dalla scuola di Beda proviene il monaco **Albinus Flaccus** (732-804), nome assunto da **Alcuinus** in omaggio ai modelli classici, soprattutto ad Orazio; su di lui ci documenta un anonimo monaco (Peritz, 1829) del monastero svizzero di Sangallo: «Quando l'inglese Albino venne a saper quanto Carlo [Magnò], il più religioso fra i re, avesse gradito la visita di quegli uomini sapienti, si imbarcò e si presentò a lui. Fra tutti gli studiosi dei tempi moderni egli era il più esperto delle Sacre Scritture, che conosceva in tutta la loro estensione: cosa naturale, se si pensa che era discepolo del dottissimo Beda, il maggior espositore delle Scritture dopo san Gregorio. Beda⁴⁹ l'aveva tenuto con sé fino alla morte, sempre, tranne quando era stato in guerra: Alcuino voleva essere chiamato suo discepolo e voleva che si riconoscesse in Beda il suo maestro. A lui Carlo diede l'abbazia di San Martino presso Tours, affinché, quando il re era assente, potesse riposarvi, con l'impegno tuttavia di insegnare a coloro che quivi accorressero. La sua dottrina diede tali frutti che oggi i moderni Galli o Franchi possono essere paragonati agli antichi Romani ed Ateniesi» (Frova, 1973).

Alcuino scrisse opere di carattere didattico relative all'insegnamento dell'ortografia e della grammatica ed una di contenuto matematico, le *Propositiones ad acuendos juvenes*, che si rivelano più che altro una raccolta di enigmi e semplici giochi matematici (Folkerts, 1993; Butzer e Lohrmann, 2003; Franci, 2005). A titolo di esempio, si riporta la *Propositio prima*, detta «*de limace*» (la lumaca); il testo⁵⁰ recita: «La lumaca fu invitata a pranzo dalla rondine ad una distanza di una lega. In un giorno tuttavia non poté percorrere più di un'oncia. Dica, chi vuole: in quanti giorni la lumaca cammina per recarsi allo stesso pranzo?». La risposta è che «una lega misura 1500 passi, 7 piedi, 90 once; di conseguenza, i giorni furono tanti quante le once, e fa 246 anni e 210 giorni».

Alcuino presenta, tra gli altri, un problema di eredità (*Propositio XXXV: De obitu cuiusdam patrisfamilias*), che è stato studiato da Cantor (Cantor, 1907) e Smith (Smith, 1917) per individuare eventuali analogie con la contemporanea letteratura islamica sul medesimo argomento. Gli studiosi però indicano una

⁴⁹ L'attendibilità di questo passo è molto dubbia, soprattutto confrontando le date di nascita e di morte rispettivamente di Alcuino e Beda: maestro di Alcuino fu piuttosto un allievo di Beda, Egberto di York (Riché, 1996).

⁵⁰ *Limax fuit ab hirundine invitatus ad prandium infra leucam unam. In die autem non potuit plus quam unam unciam pedis ambulare. Dicat, qui velit, in quot diebus ad idem prandium ipse limax perambulat? In leuca una sunt mille quingenti passus, VII pedes, XC unciae. Quot unciae, tot dies fuerunt, qui faciunt annos CCXLVI, et dies CCX.*

fonte romana e non araba per il problema: la *lex Falcidia* proposta dal tribuno Falcidio nel 40 a.C. per garantire la quota legittima di eredità, limitando l'importo di eventuali legati ⁵¹.

Alcuino mantiene la classificazione delle arti liberali proposta da Marziano Capella, ma le difficoltà di mettere in pratica l'ambizioso programma marziano all'epoca erano enormi; anche **Giovanni Scoto Eriugena** (vissuto tra 810 e 875 e commentatore di Marziano nelle sue *Annotationes in Martianum*) ripropone nella sua opera *Periphyseon* le note definizioni delle arti liberali del Quadrivio (Lutz, 1939). Pure **Remigio di Auxerre** (841-908), benedettino del monastero di St. Germain, che insegnò a Parigi e Reims, scrisse numerosi glosse e commenti, compreso, come si è detto, quello alle *Nozze di Filologia e Mercurio* di Marziano Capella (Lutz, 1957) ⁵². A questo autore va il merito di aver cercato di mantenere vivo quanto più a lungo possibile lo spirito innovatore di Carlo e di Alcuino.

In ogni caso, osserva la Franci (Franci, 1996), «anche se da un punto di vista culturale la riforma dell'istruzione voluta da Carlo Magno e realizzata da Alcuino, non ebbe grandi effetti, un suo merito indiscutibile fu quello di avere istituito scuole anche presso le cattedrali, portando così l'istruzione fuori dai conventi più vicina ai cittadini». La cultura matematica altomedievale non presentava perciò quelle caratteristiche di isolamento e chiusura sulla propria tradizione che solitamente le si attribuiscono.

Tracce di questa apertura si ritrovano proprio nel suddetto filone della matematica divertente. Vale la pena di ricordare che alcuni studiosi di area tedesca (Folkerts, 1978; Vogel, 1988; Rebstock, 1994) hanno individuato tracce di contatti fra l'autore delle *Propositiones* e i testi arabi di matematica, in particolare quello di Abu Kamil (v. 3.7.). La *Propositio XXXVIII*, infatti, o *Propositio de quodam emptore in Oriente* ⁵³, ricalca quasi perfettamente nelle cifre e nel contenuto un problema presente pure nel *taraif al-Hisab* (Rarità aritmetiche)

⁵¹ *Lata est itaque lex Falcidia, qua cautum est, ne plus ei legare liceat quam dodrantem: itaque necesse est, ut beres quartam partem hereditatis habeat: et hoc nunc iure utimur* (Gai Institutionum Commentarii, II, 227). La stessa legge è ricordata da Isidoro di Siviglia (Etymologiae, V, xv, De legibus et temporibus): *Sub eodem quoque imperatore Falcidius tribunus plebis legem fecit, ne quis plus [in] extraneis testamento legaret quam ut quarta pars superesset hereditibus*.

⁵² Questo, miniato a Regensburg nel 1100, fu il modello iconografico per altre illustrazioni, fra cui il ciclo di affreschi dello *Zodiaco* nella Rocca di Angera.

⁵³ Un uomo volle comprare in Oriente 100 animali vari per 100 soldi; egli ordinò al suo servitore di acquistare un cammello per 5 soldi, un asino a 1 soldo, 20 pecore a 1 soldo. Dica chi vuole quanti (su 100) cammelli e asini e pecore ci furono [=poterono essere acquistati] con una somma di 100 soldi?.

Quidam homo voluit de C solidis animalia promiscua emere C in oriente; qui iussit famulo suo, ut camelum V solidis acciperet; asinum solidum I. XX oves in solidum compararet. Dicat, qui vult, quot cameli, vel asini, sive oves in negotio C solidorum fuerint?.

del matematico arabo. Lo studio delle fonti ha indotto gli storici a formulare ipotesi sull'occasione di questi evidenti contatti: Folkerts la fa risalire ad un incontro fra l'imperatore Carlo Magno e un emissario del califfo abbaside **Harun al-Rashid** a Ravenna; Hunger e Vogel invece pensano ad un vero e proprio carteggio diplomatico fra Aquisgrana e Bisanzio o almeno ad una mediazione bizantina (Hunger e Vogel, 1963), grazie ad un manoscritto bizantino del XV secolo della biblioteca di Reichenau, oggi conservato alla Biblioteca Nazionale di Vienna (Phil. Gr. 65), che contiene sempre lo stesso problema; Rebstock infine osserva che lo stato delle conoscenze sulle vie di trasmissione della scienza araba del calcolo in Occidente è talmente arretrato che nessuna ipotesi è attualmente inammissibile. Egli comunque rifiuta la tesi della mediazione bizantina, notando nelle *Propositiones* un altro problema (n. 52) di contenuto analogo ⁵⁴, già incluso in una copia della fine del IX secolo, dunque precedente al codice viennese, e assente da quest'ultimo.

1.6. GLI EPIGONI DELL'ARITMETICA BOEZIANA

I testi classici associati alle arti liberali (sia che fossero semplicemente riassunti, sia che venissero letti e commentati per intero) rimasero per tutta l'età medievale la base della formazione culturale, ma risentirono spesso del forte parallelismo che gli studiosi percepivano fra la tradizione pitagorico-boeziana e lo studio delle Sacre Scritture che invitava a cogliere il significato allegorico dei numeri (*esegesi aritmológica*). Questo è evidente in due compilazioni del XII secolo.

La prima, di ambiente scolastico, si intitola *Eptateuchon* e fu scritta da **Teodorico di Chartres** (?-1150): scopo dell'opera era offrire al lettore un percorso intellettuale per raggiungere la fede, facendo ricorso a *rationes mathematicae* (dimostrazioni non proprio rigorose dal punto di vista logico, basate sull'uso di numeri).

La seconda, di ambiente monastico è l'*Hortus deliciarum* di **Herrade di Landsberg** (1130-1195). Il forte, per non dire essenziale, legame non solo con la filosofia e la teologia, ma anche con le arti figurative, risulta evidente in un'illustrazione tratta da un manoscritto dell'*Hortus deliciarum* purtroppo an-

⁵⁴ *Quidam paterfamilias iussit XC modia frumenti de una domo sua ad alteram deportari; quae distabat leucas XXX: ea uero ratione, ut uno camelo totum illud frumentum deportaretur in tribus subuectionibus, et in unaquaque subuectione XXX modia portarentur: camelus quoque in unaquaque leuca comedit modium unum. Dicat, qui uelit, quot modii residui fuissent?* La tipologia di questo problema è indicata, con terminologia moderna, «della jeep».

dato perduto, ma fortunatamente copiato nel XIX secolo: nel disegno, forse un modello per la decorazione di un rosone ⁵⁵, le sette arti sono presentate come fanciulle all'interno di sette cerchi che ne incorniciano uno centrale più grande, nel quale è posta la filosofia in trono, accompagnata da Platone e Socrate (Masi, 1972, 1983). Ogni figura allegorica è corredata di una didascalia (posta entro le cornici curve) che ne indica i tratti caratteristici.

Pochi decenni più tardi, **Ugo da san Vittore** (1096-1141) compose un manuale per l'insegnamento, il *Didascalicon*, in cui accanto alle arti liberali classificava le arti meccaniche, ovvero i saperi tecnico-pratici fondamentali della civiltà medievale: tessitura, architettura, navigazione, agricoltura, caccia, medicina, scenografia (Evans, 1975).

Per trovare nuovi esempi dell'interesse per le arti liberali dopo l'anno Mille, la Franci (Franci, 2005) ritiene che si possa far riferimento ancora all'introduzione di un gioco, la *Rithmomachia*, (letteralmente la battaglia dei numeri, dal greco *ῥιθμός* equivalente di *ἀριθμός* e *μάχη*, battaglia) dalle regole estremamente complesse ⁵⁶ basate sulla conoscenza dell'opera boeziana. La diffusione di questo gioco è una dimostrazione indiretta del protrarsi dell'insegnamento dell'aritmetica boeziana.

Una testimonianza diretta ne è invece, come si è visto, l'esistenza di numerosi codici dei secoli IX-XII che la riportano per intero, e di compendi.

Un esempio di compendio dell'*Arithmetica* di Boezio, forse legato ad una scuola capitolare, è quello composto nel XII secolo da **Maestro Guglielmo di Lucca** (Arrighi, 1964c). Il trattato è inserito in un *«Liber elementarius quae Guglielmus Lucanus episcopus ecclesie beati Martini pro anime sue remedio tradidit»*. Il manoscritto comprende un vocabolario latino e i trattati delle arti liberali. Il trattato è diviso in due libri, il cui contenuto, anche se esposto in maniera sintetica, riproduce fedelmente il testo di Boezio, esplicitamente citato.

Un altro commento è documentato (Evans, 1978) nel manoscritto C.L.M. 4643 della Bayerische Staatsbibliothek di Monaco, che tratta in modo completo alcune parti dell'opera, trascurandone interamente molte altre. È significativo che le parti analizzate coincidano esattamente con quelle rilevanti per gli studiosi del XII-XIII secolo, soprattutto per i successori di Ugo da san Vittore, che continuavano ad operare nella scia della tradizione.

⁵⁵ Sull'influenza della teoria boeziana dei numeri sull'architettura religiosa medievale v. Beseler et al. (Beseler e Roggenkamp, 1954), von Simson (von Simson, 1956), Frankl (Frankl, 1960), Masi (Masi, 1983) e Grossi (Grossi, 2003).

⁵⁶ Una specie di gioco degli scacchi che oppone i numeri pari ai dispari; l'obiettivo consiste nell'allineare nella parte di scacchiera dell'avversario una progressione armonica; per una descrizione più dettagliata delle regole, oltre che dei più antichi manoscritti che le riportano, v. Moyer (Moyer, 2001) e Folkerts (Folkerts, 2003e).

Hec exercicia que mundi philosophia
Investigavit, investigata notavit, scripto
firmavit, et alumnis insinuavit.
Septem per studia docet artes philosophia.
Hec elementorum scrutator et abdita rerum.

Septem fontes sapientiae fluunt de
philosophia, que dicuntur liberales artes.
Spiritus Sanctus inventor est septem
liberalium artium que sunt grammatica,
rethorica, dialectica, musica,
arithmetica, geometria, astronomia.

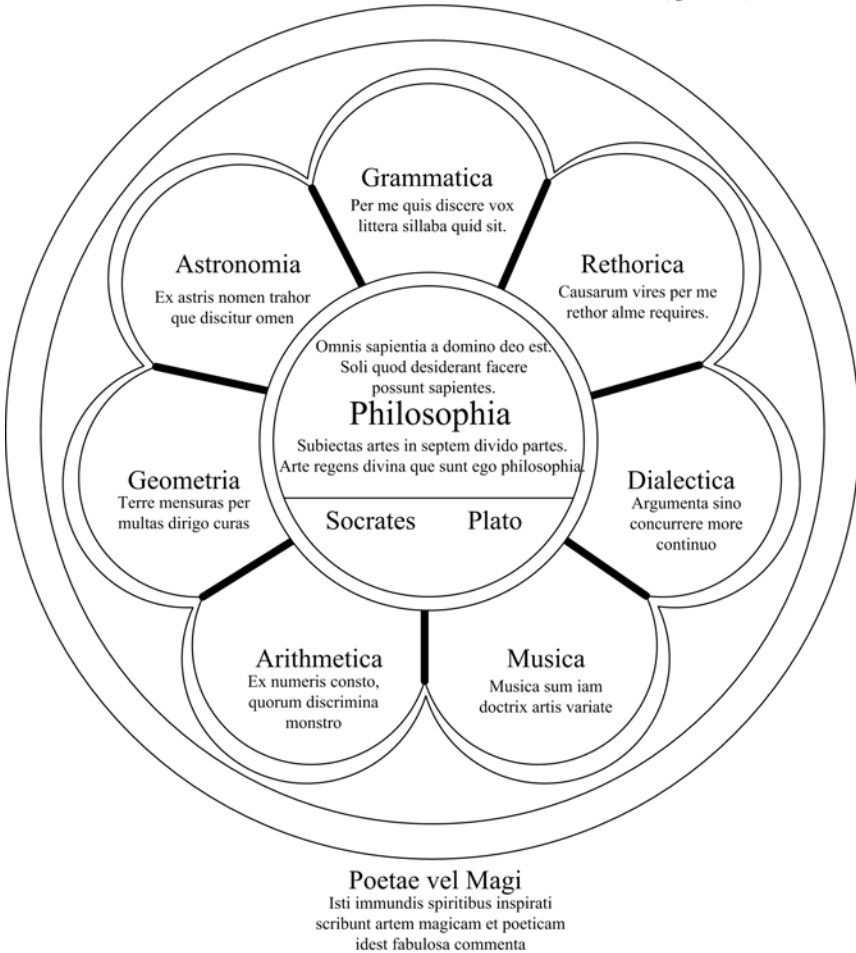


Fig. 1.7. – Riprodotto dall'*Hortus deliciarum* di Herrade di Landsberg.

La Franci (Franci, 1996) sottolinea come nei secoli attorno al Mille la lettura dell'aritmetica boeziana fosse parziale, limitata ai primi capitoli, che affrontavano contenuti generali, mentre erano trascurati quelli più complessi. Verosimilmente, fino alla metà del XII secolo, si cimentavano in questa lettura solo persone colte con specifici interessi matematici: non si trattava certo di un manuale diffuso nelle scuole (Luscombe, 1986). In seguito, invece, in piena fioritura di studi sull'opera teologica di Boezio, si assistette alla riscoperta anche di questo trattato, utile sia ai teologi (dimostrazione dell'unità e trinità per mezzo di analogie con punti, linee e superfici, ad esempio) sia ai dialettici sia agli studiosi che si occupavano di categorie, grazie ai suoi riferimenti a quantità continue e discrete, numero, moltitudine, grandezza. Tutto questo interesse porterà, nel XIV secolo, nelle università di **Oxford** e di **Parigi** all'utilizzo dell'opera nelle lezioni regolari nei normali corsi sulle arti liberali, come risulta dagli statuti delle accademie suddette (Gibson e Emden, 1934).

2.

LA TRADIZIONE GRECA E INDIANA NEL MONDO ISLAMICO

2.1. LE TRADUZIONI DAL GRECO

A partire dal IV secolo, per un centinaio di anni la cultura greca ed il suo studio si diffusero lentamente verso Oriente, arrivando in Asia: alla loro espansione contribuirono indubbiamente campagne militari e spedizioni commerciali, ma fu il fattore religioso ad essere determinante. L'attività di evangelizzazione e catechesi della Chiesa cristiana d'Oriente portò alla costituzione di comunità di Cristiani di lingua siriana anche in zone lontane, come l'altopiano persiano; le persecuzioni poi spinsero i gruppi cristiani allora considerati ereticali (soprattutto i cosiddetti Nestoriani) a migrare verso Est nel tentativo di sfuggire ai loro persecutori, evangelizzando successivamente il Centrasia, la valle dell'Indo, le coste del subcontinente indiano e delle isole adiacenti, il bacino del Tarim (l'attuale Xinjiang cinese) e infine – a metà del VII secolo – la stessa Cina (la storia di questa espansione a oriente si legge nella stele di Xi'an, allora capitale dell'impero cinese). Nel 457, i **Nestoriani di Edessa** in Siria oltrepassarono il confine persiano e fondarono una scuola di teologia a **Nisibis** (oggi Nusaybin al confine tra la Turchia e la Siria), dove, dato il contenuto di molte dispute, fiorì la logica aristotelica; anche a **Jundishapur**, altro centro nestoriano, oggi nell'Iran meridionale non lontano dal confine con il Kuwait, fu fondata una scuola che offriva formazione completa sui vari rami del sapere greco: filosofia e scienza, comprese la medicina e l'astronomia. In Persia, le comunità nestoriane non solo sopravvissero come enclavi di ellenismo all'interno di un territorio ostile, ma riuscirono anche a far nascere interesse per la cultura greca nei Persiani, almeno in quelli più colti ed influenti. Con la rapida espansione araba, dopo la morte di Maometto nel 632, le zone dove la cultura greca si era conservata, caddero sotto la dominazione islamica.

Nell'area del Medio Oriente, quindi, coesistevano varie culture: come si è visto, le più rilevanti furono quella **greca** (con la sua tradizione classica, elleni-

stica e poi cristiana) e quella **siriaca** (di impronta essenzialmente religiosa per via dell'influsso nestoriano), ma erano presenti anche componenti **ebraiche** e **persiane**, oltre a quelle manichee, zoroastriane e buddiste. Esse comunicavano principalmente attraverso traduzioni eseguite da dotti religiosi bilingui. Fin dal V secolo accanto alle versioni propriamente religiose (dalla Bibbia) apparvero quelle scientifiche e filosofiche greche, in particolare le opere più tarde neoplatoniche, neo-aristoteliche ed eclettiche.

L'espansione araba fu vastissima, subendo però due determinanti battute d'arresto a **Costantinopoli**, dove nel 717-718 la flotta araba fu sconfitta dai Bizantini, e a **Poitiers** (732), dove Carlo Martello vinse una battaglia che rappresentò la sospensione della conquista araba verso l'Occidente e l'inizio della riconquista cristiana della Spagna. Lo sconfinato impero musulmano ebbe dapprima come capitale Damasco e poi si scompose (VIII secolo) in due imperi, l'uno con capitale Baghdad (all'incrocio delle vie per la Persia, l'India e la Cina) e l'altro con capitale Cordova (Gabrieli et al., 1988).

Proprio questa rottura dell'equilibrio politico favorì l'incontro fra gli Arabi e le culture scientifiche straniere. Infatti, in Oriente, sotto il califfato abbaside, dopo il 749, i Musulmani cominciarono ad intrattenere proficui contatti intellettuali con i Cristiani e i Persiani ellenizzati. Nel 762, quando il califfo al-Mansur trasferì la capitale da Damasco a Baghdad, lo fece perché sarebbe stata abbastanza vicina a Jundishapur e i medici di quel luogo avrebbero potuto curare la famiglia reale: il capo dell'ospedale di Jundishapur, **Jurjis ibn Jibril ibn Bakhtishu**, fu nominato medico di corte, carica mantenuta poi da alcuni suoi discendenti.

La dominazione araba non fermò l'attività di traduzione, dal momento che i califfi, in particolare **al-Mansur** (754-775) e **Harun al-Rashid** (786-809), incoraggiarono e sostennero dotti, medici e scienziati nel loro compito di propagazione della cultura classica. L'attività di questi centri di traduzione acquistò maggiore importanza durante il regno del figlio di Harun, **al-Mamun** ¹ (813-833), che accrebbe la biblioteca voluta dal padre, facendola diventare un vero e proprio centro di ricerca, la **Bayt al-Hikma** (Casa del Sapere), in cui lavoravano soprattutto Nestoriani ². I califfi e i loro visir, soprattutto i **Barmecidi** ³, nel ruolo di mecenati resero possibile la nascita di un'officina culturale unica nel suo genere, ma erano ovviamente interessati in primo luogo ad opere dall'utilità pratica immediata, come trattati di medicina, astrologia, logica e scienze matematiche. Tuttavia, ben presto gli interessi dei dotti islamici si estesero fino

¹ Secondo quanto riferisce Boyer, si racconta che il califfo attribuisse questa sua volontà di riscoprire i testi greci ad un sogno in cui gli era apparso Aristotele.

² Nel suo saggio sulle biblioteche medievali in Oriente, Eche (Eche, 1967) rileva tuttavia la presenza di altri centri di traduzione, coevi e legati al califfo al-Mamun, e cita Abbas ibn Said al-Jawari come traduttore dal pahlavi.

³ Di origine persiana, furono promotori e finanziatori di numerose attività culturali.

alla filosofia di Platone ed Aristotele. I testi già disponibili in siriano (la lingua letteraria e liturgica dei Nestoriani) furono tradotti in arabo, le opere non ancora tradotte in versione siriana passavano direttamente dal greco all'arabo oppure mediamente attraverso il siriano. In varie occasioni, furono inviate spedizioni a Bisanzio per ottenere copie di opere greche altrimenti irrimediabilmente corrotte. Oggi il confronto fra manoscritto greco e traduzione araba lascia di frequente perplessi per la differenza di contenuto: va ricordato che spesso le copie greche a noi pervenute sono state realizzate dopo l'opera di traduzione in arabo e che i traduttori arabi incontravano molte difficoltà a trovare manoscritti validi (Lorch, 2001).

I repertori biografici arabi (Rosenthal, 1994) elencano decine di traduttori-scienziati: **Yuhanan Bekhtyashu**, **Hunayn ibn Ishaq** e suo figlio **Ishaq ibn Hunayn**, **Qusta ibn Luqa**, **Abd al-Masih ibnan-Naimah al-Himsi**, i fratelli Jafar Muhammad, Ahmad e al-Hasan **ibn Musa ibn Shakir** (più noti come **Banu Musa**), **Thabit ibn Qurra** furono alcune delle figure rappresentative di un'autentica scuola di traduttori, provvista di strumenti altamente qualificati, come dizionari bilingui, manuali e grammatiche. Essi realizzarono le traduzioni in arabo (passando spesso attraverso il siriano, lingua veicolare ideale che, essendo molto simile all'arabo, consentiva l'utilizzo di una tecnica già sperimentata di traduzione dal greco) delle opere memorabili della filosofia e scienza greco-ellenistica: i trattati di Galeno, Tolomeo, Euclide, Aristotele, Alessandro di Afrodisia, Dioscoride, Giamblico e Porfirio, oltre a tutta una serie di testi gnostici e sincretistici; ci furono anche traduttori di opere indiane, soprattutto di astronomia e matematica. Accadeva anche che un testo fosse tradotto più volte.

Uno dei più dotati, esperti e fecondi traduttori fu **Hunayn ibn Ishaq** (808 – fra 873 e 877), un medico nestoriano che diresse per un certo tempo la Casa del Sapere, godendo del supporto dei fratelli Banu Musa, ricchi mecenati. Verosimilmente era bilingue (conosceva perfettamente il siriano e l'arabo, avendo imparati nell'infanzia). In gioventù studiò medicina con **Yuhanna ibn Masawaih** a Jundishapur; poi si trasferì forse ad Alessandria e fece il suo ritorno con un'eccellente conoscenza del greco e delle tecniche alessandrine di critica del testo; a Basra completò la sua conoscenza della grammatica araba, grazie alla quale a Baghdad iniziò la sua carriera di medico e traduttore. La sua cura (Rosenthal, 1965) nello stabilire il testo corretto di un'opera, prima di procedere alla sua traduzione, è evidente da questa osservazione sul *De methodo medendi* di **Galeno**, opera che egli tradusse dal greco al siriano: «Per i primi sei libri avevo a disposizione solo un manoscritto, e per di più pieno di errori. Perciò non riuscii a realizzare un'edizione valida di quei libri. Poi mi imbattei in un altro manoscritto che mi permise la collazione e la correzione, per quanto possibile. Sarebbe [stato] meglio disporre di un terzo manoscritto per la collazione, se solo fossi stato tanto fortunato da trovarne uno». Secondo quanto riferisce ancora Rosenthal (Rosenthal, 1994), **al-Safadi**, un biografo del XIV secolo, ha

confrontato il metodo ermeneutico di traduzione di Hunayn con la traduzione brutalmente letterale di alcuni dei suoi predecessori: «I traduttori usano due metodi: uno è quello di Yuhanna ibn al-Bitriq, ibn an-Naimah al-Himsi ed altri. Secondo questo metodo, il traduttore studia singolarmente ogni parola greca e il suo significato, sceglie una parola araba dal significato corrispondente e la usa. Poi passa alla parola seguente e procede nello stesso modo fino a rendere in arabo il testo che desidera tradurre. Questo metodo è sconsigliabile per due ragioni: innanzitutto, è impossibile trovare espressioni arabe corrispondenti ad ogni parola greca e perciò, utilizzando questo metodo, molte parole greche restano nella lingua originale. Poi, alcune occorrenze sintattiche di una lingua non sempre corrispondono necessariamente a strutture simili nell'altra; inoltre, l'uso di metafore, che sono frequenti in ogni lingua, provoca ulteriori errori. Il secondo metodo è quello di Hunayn ibn Ishaq, al-Jauhari ed altri. Qui il traduttore considera un'intera frase, verifica il senso corretto, e poi lo esprime in una frase araba di identico significato, senza preoccuparsi della corrispondenza delle parole. Questo metodo è superiore e, perciò, le opere di Hunayn ibn Ishaq non richiedono revisione. Le opere di contenuto matematico rappresentano un'eccezione, poiché egli non padroneggiava queste scienze, diversamente da quanto avveniva per i lavori sulla medicina, la logica, la scienza naturale e metafisica, le cui traduzioni in arabo non richiedono affatto correzioni».

A Hunayn è attribuito un enorme numero di traduzioni in siriano e in arabo di testi degli argomenti più svariati: medicina, filosofia, matematica e astronomia; persino una versione dell'Antico Testamento. Egli trasmise la sua tecnica ad un gruppo di seguaci, tra cui un nipote ed un figlio.

L'imponente lavoro dei traduttori ebbe non solo il pregio di accendere il dibattito su nuovi problemi teologici e scientifici, ma anche quello di completare l'adattamento della filosofia antica, aristotelica soprattutto, al monoteismo, cosa che il Cristianesimo aveva fatto solo in parte. Infatti tutte le opere scientifiche e filosofiche furono non solo tradotte, ma anche parafrasate e spiegate. Boyer (Boyer, 1968) commenta quello che egli definisce il «miracolo arabo», dicendo che esso fu straordinario non solo per la rapidità con cui si svolse, ma soprattutto per l'alacrità con cui gli Arabi si appropriarono del sapere dei popoli incontrati. Il mondo arabo in questa fase si sentì vero e proprio erede e continuatore della tradizione greca di età ellenistica; Koyré (Koyré, 1973), a questo proposito, parla di vero e proprio rinascimento arabo e tenta di comprendere anche le ragioni della sua effimera durata, individuandole non nella presunta ripugnanza della mentalità araba per la filosofia, ma piuttosto in una reazione dell'ortodossia islamica, preoccupata dall'attitudine potenzialmente antireligiosa della filosofia, e nel susseguirsi di ondate di invasione che attraversarono i territori arabi (Turchi, Mongoli e Berberi, ad esempio). Già dalla fine del secolo VIII, infatti, le zone del Nord Africa, del Maghreb e della Spagna si liberarono dai legami che li vincolavano al califfato di Baghdad (Ifrah, 1981).

2.2. LE ALTRE VIE

L'influsso greco giunse agli Arabi non solo direttamente attraverso la Siria e l'Egitto, ma anche mediatamente dall'Oriente, attraverso l'India e la Persia (De Lacy O'Leary, 1949); si tratta di conoscenze elaborate da studiosi indiani, ma sicuramente a partire da materiale di provenienza alessandrina, passato in India o via mare, sulla rotta che connetteva Alessandria con l'India nord-occidentale, o via terra lungo l'antica strada imperiale achemenide che collegava il Mediterraneo con la Margiana e la Battriana, in particolare con la città di Merv (nell'attuale Turkmenistan), a sua volta a contatto con sapienti di religione buddista, che potrebbero aver avuto un significativo ruolo di tramite.

Sotto la dinastia dei *Gupta*, la città di Pataliputra (oggi Patna) diventò la patria degli studi scientifici, segnatamente di astronomia e matematica, che mostravano un'evidente matrice greca e una singolare somiglianza con l'attività contemporanea della scuola di Alessandria. L'astronomo **Aryabhata** (476-499) vi insegnò e lasciò un trattato di astronomia, con una sezione dedicata alla matematica. **Varahamihisa** (505-587) scrisse il *Pance-Siddhanlika*, una sintesi di cinque manuali di astronomia. Uno di essi riveste un interesse meramente storico, mentre gli altri quattro evidenziano una chiara influenza alessandrina: due di essi riportano i nomi di *Romank* e *Paulisa*, certamente non di origine indiana, mentre l'ultimo contiene una tavola basata sull'opera di Tolomeo (Alten et al., 2000). Questi trattati si riferiscono agli *Yavanas* (Greci) come a grandi autorità scientifiche. Uno di essi, risalente al V secolo, è noto col nome di *Surya Siddhanta* o *conoscenza del sole*, un manuale fondamentale per gli astronomi indiani. **Brahmagupta** (598-670) scrisse un manuale di astronomia in 22 capitoli con una sezione sull'aritmetica (*Ganitad'baya*) e sui sistemi di equazioni diofantine lineari (*Kutakhadyaka*). L'opera fu conosciuta dagli Arabi all'epoca del regno di **Harun al-Rashid** (766-809) e costituì la base del testo noto come *Sindhind*, adattamento dell'indiano *Siddhanta* (Youshkevitch, 1976; Ifrah, 1981).

Esiste una leggenda⁴, poco fondata e molto romanzesca, che colloca la

⁴ Gli Arabi avevano occupato la zona del basso Indo, nei giorni della loro espansione, dopo la caduta della monarchia persiana, fatto che mostra un buon fondamento storico. Tale conquista non portò ad una completa occupazione della regione, tuttavia alcuni ufficiali arabi furono stanziati là come guarnigione militare, ma in breve tempo, com'era ovvio, divennero di fatto autonomi. All'epoca della rivoluzione abbaside, approfittarono dell'occasione per dichiararsi indipendenti, rifiutandosi di riconoscere la nuova dinastia regnante. Ma al-Mansur, non accettando la loro insubordinazione, mandò un esercito per punirli; furono così costretti a scendere a patti col califfo e a mandare un'ambasceria a Baghdad. Tra gli ambasciatori, c'era un saggio indiano, di nome *Kankah*, che rivelò agli Arabi la scienza indiana, una sintesi di astronomia e matematica. Poiché egli non conosceva né l'arabo né il persiano, le sue lezioni sarebbero state tradotte prima in persiano da un interprete e successivamente in arabo per mezzo di un secondo interprete, portando ad un risultato finale molto contorto ed oscuro.

traduzione del *Sindbind* all'epoca di al-Mansur, il fondatore di Baghdad. **Al-Biruni** (973-1048), uno dei massimi matematici musulmani, esperto del mondo indiano e della sua cultura, conosceva la storia, ma non le dava credito, considerandola un'invenzione, nata per spiegare l'oscurità della traduzione araba del *Sindbind*. Storicamente non si hanno conferme dei fatti narrati. È probabile che l'opera sia il risultato di una traduzione di una versione persiana del *Siddhanta* già diffusa a Jundishapur. In ogni caso, l'opera è una traduzione del manuale originale, realizzata forse dall'astronomo **al-Fazzari**. La ragione dell'oscurità è probabilmente da cercare nella numerose traduzioni intermedie cui è stata sottoposta: dall'indiano al persiano e all'arabo, passando forse anche per il siriano. Ifrah ritiene invece che si tratti di un testo risalente al 628 d.C., il *Brahmasphu-tasiddhanta* dell'astronomo indiano **Brahmagupta**.

La matematica e l'astronomia che gli Arabi avevano appreso dai maestri indiani, attraverso la mediazione della Persia, erano alessandrine, ma esse non furono accolte passivamente né circolarono nella forma originale: avvenne piuttosto che il loro insegnamento fosse assimilato e ridefinito dagli Indiani, che diedero ulteriori contributi al materiale conosciuto, in particolare introducendo l'uso della notazione decimale e di molti simboli.

Infine, non va dimenticato il piccolo ma significativo contributo di siti minori, come la città di Harran, una colonia greca accanitamente pagana in piena era cristiana ⁵. Qui (Youshkevitch, 1976) sopravvisse a lungo un circolo neoplatonico-ermetico, almeno fino a quando, nel secolo VIII, il califfo **Omar II** vi fondò la prima università islamica, dove volle riunire gli ultimi ermetici di Alessandria. Quando poi, sempre nel secolo VIII, a Baghdad fu fondata la Casa del Sapere, furono chiamati traduttori anche da Harran: un nome per tutti è quello di **Thabit ibn Qurra**. Famoso per i suoi studi matematici e per un teorema che porta il suo nome, guidò importanti e numerosi progetti di traduzione in arabo su incarico dei califfi della dinastia abbaside. Egli non solo tradusse molti testi, tra cui quelli di Apollonio, Tolomeo, Euclide e Archimede, ma compose anche un grande numero di opere originali, che spaziavano dalla matematica all'astronomia, all'etica, alla filosofia, alla fisica, alla medicina, alla biografia di filosofi greci.

2.3. LE TRADUZIONI DI EUCLIDE E DIOFANTO

La maggior parte dell'opera di Euclide (325-265 a.C.) si fondava sulla riorganizzazione delle scoperte dei matematici greci dell'epoca classica. Oltre agli *Elementi*, giunti per intero, Euclide compose una decina di trattati su varie scienze:

⁵ Oggi turca, è la *Carrae* parthica, di storica memoria, dove fu catturato Crasso nel 53 a.C.

ottica, astronomia, musica, meccanica e un libro sulle sezioni coniche, a noi pervenuti solo come frammenti.

Gli *Elementi* sono un'opera in 13 libri contenenti 465 teoremi di geometria elementare, algebra e teoria dei numeri. Per l'impostazione e il rigore, rappresentano il massimo esempio di sistema assiomatico, in cui postulati, definizioni e dimostrazioni costituiscono il fondamento di un nuovo modo di pensare, non solo di fare geometria.

Perciò furono richiesti e copiati abbondantemente nel corso dei secoli in tutta l'area del Mediterraneo, con problemi di scarsa fedeltà all'originale facilmente immaginabili. A queste copie di bassa qualità si aggiunse l'intervento di studiosi animati da ottime intenzioni, che pensarono di apportare migliorie al testo: è il caso di **Teone di Alessandria**, che visse nel IV secolo d.C., ossia 700 anni dopo Euclide, e ne riscrisse l'opera, semplificandone il linguaggio, aggiungendo passaggi alle dimostrazioni e inserendo altri teoremi secondari. Dopo altri 500 anni, nel IX secolo, una copia dell'opera di Teone fu tradotta in arabo da al-Hajjaj; Thabit ibn Qurra, come si è detto, ne fece una nuova traduzione qualche decennio più tardi. Non si dispone ancora di edizioni critiche complete delle versioni arabe: attualmente, esistono edizioni (provvisorie per via del nome e della data dei manoscritti utilizzati) del quinto libro (Engroff, 1980), dei libri VII-IX (De Young, 1981) della versione attribuita a Ishaq ibn Hunayn, rivista da Thabit ibn Qurra; questi studi sono contenuti in tesi americane, non pubblicate, e sono di difficile reperimento. Esiste però l'edizione del codice Leidensis Or. 399/1 (Besthorn et al., 1900; Saïdan, 1991), che si riteneva contenesse la versione di al-Hajjaj, ma che, secondo alcune ricerche (Engroff, 1980), ne conterrebbe solo una riedizione ampliata e commentata da al-Nayrizi.

L'opera di Diofanto (III secolo d.C.) è stata tradotta in arabo da Qusta ibn Luqa, medico cristiano e famoso matematico vissuto nel X secolo, che, secondo la tradizione, compose anche una chiosa ad una parte del testo. Un altro commento in arabo fu scritto da Abu-l-Wafa al-Buzjani, sempre nel X secolo: entrambi sono andati perduti. Nell'*al-Fakbri* (Woepke, 1853), un estratto dall'*Algebra* di **al-Karaji** detto anche al-Karkhi (morto nel secolo XI), si può chiaramente vedere l'influenza del testo greco; sono presenti evidenti tracce del lessico e del metodo di Diofanto, oltre ad una collezione di problemi di derivazione sicuramente diofantina (Suter, 1900-1902).

Va ricordato che lo scopo delle traduzioni non era di mantenersi fedeli all'originale, ma di divulgare le conoscenze, amplificandole con glosse, spiegazioni, considerazioni e commenti del traduttore. Nelle versioni sopra citate, l'*Aritmetica* di Diofanto, ad esempio, appare caratterizzata da uno stile e da un lessico che risentono dell'influenza esercitata dagli algebristi islamici del IX secolo. «Gli stessi titoli Arte dell'Algebra e Trattato d'Algebra, dati da questi traduttori all'Arithmetica di Diofanto, rispecchiano chiaramente questa influenza», spiega la Roero (Roero, 2002).

2.4. I NUMERALI INDO-ARABICI

Nella monumentale opera di Ifrah (Ifrah, 1981) dedicata alla storia dei numerali, è dedicato ampio spazio proprio alla trattazione dell'origine indiana dei numerali occidentali, per quanto riguarda sia il loro aspetto sia il sistema decimale posizionale sia l'introduzione dello zero. Dopo una minuziosa ricognizione di tutte le fonti europee ed arabe che attribuiscono alla cultura indiana tale invenzione, l'autore passa ad esaminare i documenti indiani che permettono di delineare una verosimile ricostruzione storica.

Già dal III secolo a.C.⁶ fanno la loro comparsa i numerali *brahmi*, che presentano simboli distinti per 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, le potenze e i multipli di 10 e di 100; sono inoltre scritti da destra a sinistra⁷. La più antica testimonianza ci è fornita dagli editti dell'imperatore *Ashoka* presenti in tutta l'India; ma non mancano anche a Nana Ghat, vicino a Poona nell'India centrale (150 a.C.), e a Nasik, vicino all'odierna Bombay (100 d.C.), sebbene questi due reperti ci presentino, nota Joseph (Joseph, 2000), esempi diversi fra loro, denominati *bakhsali* e *gwalior*, l'ultimo piuttosto simile ai numerali utilizzati oggi in Occidente, anche per la scrittura destrorsa.

Con il diffondersi dei numerali nelle varie regioni dell'India, si assiste ad una graduale diversificazione dei loro stili, che prosegue almeno fino al V secolo d.C., epoca a cui Ifrah fa risalire la scoperta dello zero e della notazione posizionale. Alla metà del secolo data infatti il più antico documento attestante il loro uso, il trattato astronomico *Lokavibhaga*, che reca nel *colophon* l'indicazione precisa della data di stesura: quest'ultima, trasposta nel calendario giuliano, risulta lunedì 25 agosto 458. Nel testo è parimenti utilizzato lo zero, denominato *shunya* (vuoto) e rappresentato con un piccolo cerchio.

Altra testimonianza dell'uso di una notazione posizionale, secondo Ifrah e Alten (Ifrah, 1981; Alten, et al., 2000), è l'iscrizione di **Gujarat** (regione del Nord dell'India), datata, a quanto essi riferiscono, 346 secondo il computo *Samvat*, corrispondente al 595 d.C., scritta in parole-numero (*bhuta Samkhyā*) *brahmi*, ossia nomi di oggetti il cui numero è risaputo; il numero uno era la luna, il due gli occhi, i gemelli, le mani o le ali; per il cinque si usavano i sensi; per il 27 la

⁶ I numerali *kharosthi* appaiono in iscrizioni databili tra il IV secolo a.C. e il II secolo d.C., site in India occidentale ed in Afghanistan. I numeri 10 e 20 erano indicati con simboli appositi. I numeri minori di 100 erano rappresentati additivamente, come avviene con i numerali romani; il principio della moltiplicazione dei numeri più grandi diventava in effetti un'operazione, con simboli speciali per le potenze di 10 più elevate (Joseph, 2000).

⁷ Joseph ritiene possibile che i nostri simboli 2 e 3 siano versioni in corsivo dei numeri brahmi: basta immaginare di congiungere le barrette orizzontali che li costituiscono, con un tratto di penna. Presentano forti somiglianze anche con l'alfabeto brahmi. Come i *kharosthi* utilizzano il sistema additivo per le migliaia e sono scritti da destra a sinistra.

casa della luna; le potenze erano rappresentate dalla più bassa alla più alta. Il ricorso alle parole-numero si spiega pensando che esse risultavano molto più poetiche e gradevoli, soprattutto se inserite in testi lirici di contenuto matematico laico o religioso, come quelli indiani di allora; l'uso delle parole-numero costituiva anche una valida mnemotecnica.

Ad esempio, il numero 1052, era:

	ali	sensi	vuoto	luna
1052	2	5	0	1

Fig. 2.1. – Parole numero brahmi.

Gli stessi autori (Ifrah e Alten) citano un altro documento, collocabile attorno all'876 d.C., un piatto votivo recante l'elenco delle donazioni fatte dagli abitanti di Gwalior al tempio di Visnu a Vaillabhattachasvamin, a 120 chilometri da Agra: come si può vedere dalla figura seguente in cui sono stati riprodotti, i numeri compaiono in notazione posizionale. Si noti, nella fig. 2.2., la grafia dello zero, un piccolo cerchio vuoto.

933 720 152
९३३ ७२० १५२

Fig. 2.2. – Numerali gwalior.

Ifrah riferisce anche di un'altra antica testimonianza dell'uso della notazione posizionale in India, un atto di donazione, denominato di Dadda III, proveniente da Sankheda nel Gujarat, datato al 346 dell'era Chhedi, ossia al 594 d.C. Dal VII al IX secolo, notano tutti gli studiosi, le iscrizioni e i manoscritti con il sistema posizionale sono ormai molto diffusi: si trovano esempi persino in Cambogia, a Sumatra e a Giava. Aryabhata I (476-550) utilizza un altro metodo in cui le cifre sono rappresentate attraverso sillabe; lo stesso fa Bhaskara I (600-680), utilizzando comunque il sistema posizionale e lo zero.

La ricerca dell'origine dello zero ha diviso gli storici: secondo gli studiosi tedeschi (Alten, et al., 2000) presumibilmente è comparso in scritti babilonesi di astronomia, in cui era usato il sistema sessagesimale; in epoche più tarde, era previsto il ricorso ad un segno per una cifra mancante solo nel mezzo del numero, mai alla fine (Boyer, 1944). I Greci utilizzarono, sempre secondo Alten et al., questo sistema per i calcoli astronomici, con una cifra come 0 per rappresentare lo zero. Gli studiosi indiani avrebbero conosciuto tutta questa tradizione a seguito delle campagne militari di Alessandro e l'avrebbero tramandata a

loro volta nel Siddhanta (v. 2.2.). Avrebbero integrato le loro cifre brahmi da 1 a 9 e lo zero greco e adottato la scrittura da sinistra a destra greco-babilonese. Ci sarebbe stata la fusione delle conoscenze derivate da tre culture, mentre, ribadiscono Ifrah e Alten, furono gli Indiani a costruire completamente da soli il sistema posizionale, con l'evoluzione sopra descritta.

Il più antico riferimento occidentale alla notazione indiana risale al 662 negli scritti di Severus Sebokht, un vescovo siriano (Smith, 1923-25; Sezgin, 1974; Alten, et al., 2000). Dopo la chiusura delle scuole filosofiche ateniesi imposta da Giustiniano, come si è visto, alcuni filosofi e scienziati erano espatriati in Siria, dove avevano avviato centri di cultura greca. Il presule, chiaramente risentito per la scarsa considerazione per ogni forma di cultura diversa da quella ellenica mostrata da qualcuno dei rifugiati, volle far notare loro che «c'erano anche altri popoli che avevano qualche conoscenza scientifica». A questo proposito si riferiva agli Indiani e alle loro «sottili scoperte astronomiche», soprattutto ai «loro preziosi metodi di calcolo, che superavano ogni descrizione» e concludeva «Voglio soltanto dirvi che questi calcoli vengono effettuati per mezzo di nove segni». Come si è visto, il sistema di notazione indiano era già in uso da almeno mezzo secolo, stante l'iscrizione di Gujarat. Il riferimento a soli nove segni implica che gli Indiani non avevano ancora ideato un simbolo specifico per indicare il posto vuoto, almeno secondo le notizie pervenute a Severus Sebokht.

2.5. LA COMPARSA DELL'ALGEBRA IN INDIA

Fin da opere come il manoscritto di *Bakhshali* (Joseph, 2000), di datazione controversa ⁸, fa la sua comparsa un'algebra primitiva, che si occupa di equazioni lineari e indeterminate e di sistemi di equazioni algebriche, ma ricca di regole (tra le altre, quella del tre) ed esempi che le illustrano. All'epoca di **Aryabhata** (V-VI secolo d.C.) quella che noi oggi chiamiamo algebra diventò un ramo autonomo della matematica, cui furono attribuiti nomi diversi. **Brahmagupta I** (598-665), che cominciò ad utilizzare i numeri negativi, la chiamò *kuttaka* (*ganita*), vocabolo che letteralmente significa [calcolo aritmetico] *polverizzatore* e in epoche successive fu usato solo in riferimento all'algebra relativa all'analisi indeterminata. **Pruthudakaswarni** (nel IX secolo) la denominò invece *bijaganita*, cioè *scienza di calcolo con le incognite*.

Una particolarità distintiva dell'algebra indiana antica rispetto ad altre culture matematiche (greca e araba, ad esempio, ma anche occidentale) fu proprio

⁸ Scoperto nell'Ottocento, il manoscritto non è stato finora datato, per la forte divisione degli storici. Hoernle (Hoernle, 1888) lo ritiene una copia di un'opera più antica e potrebbe essere databile al secolo VIII, in ogni caso non oltre il 950 d.C.

il ricorso alla simbologia, con punti (nel manoscritto di *Bakhshali*) o lettere, per rappresentare quantità sconosciute, ossia le incognite; di queste ultime i matematici indiani fecero un uso sistematico, chiamandole genericamente *yavat tavat* (letteralmente «tanto quanto»). **Brahmagupta I** poi ricorre a lettere in alfabeto sanscrito, abbreviazioni dei nomi di colori, in caso le incognite fossero numerose (v. *tab. 2.1.*).

Tabella 2.1. – Incognite in Brahmagupta I.

NOME	SIGNIFICATO	ABBREVIAZIONE	RIFERIMENTO	SIMBOLOGIA ATTUALE
Rupa	Forma	Ru	Termine noto	Numero
Yavat-tavat	Tanto-quanto	Ya	Prima incognita	x
Kalaka	Nero	Ka	Seconda incognita	y
Nilaka	Blu	Ni	Terza incognita	z
Pitaka	Giallo	Pi	Quarta incognita	w
Lohitaka	Rosso	Lo	Quinta incognita	t
Haritaka	Verde	Ha	Sesta incognita	u

Anche le operazioni aritmetiche erano denotate con abbreviazioni o simboli. Nel manoscritto di *Bakhshali*, l'addizione veniva rappresentata interponendo la sillaba *yu* (che stava per *yuta*, addizione) tra i numeri. Bhaskara II (1114-1185) invece nella sua *Bijaganita*, per rappresentare l'addizione, scriverà semplicemente tutti gli addendi uno dopo l'altro:

$$ya\ 5\ ka\ 2\ ni\ 8\ pi\ 7\ \text{ossia}\ 5x + 2y + 8z + 7w$$

nella simbologia attuale. La sottrazione era rappresentata da un punto o da un cerchio. Per le potenze e la moltiplicazione si ricorreva alle parole *varga* (quadrato), *ghana* (cubo), *ghata* (prodotto).

3.

MOHAMMAD IBN MUSA AL-KHAWARIZMI

Nel secolo VIII, presso gli Arabi e le popolazioni sottoposte alla loro dominazione, si manifestò un crescente interesse per l'aritmetica e, in particolare, per i sistemi di numerazione. Gli Arabi ancora non conoscevano l'uso di simboli per rappresentare i numeri e ricorrevano all'espressione verbale. A seguito delle conquiste, però, essi vennero in contatto con le abitudini e le conoscenze dei popoli sottomessi, che cercavano di rispettare, spesso adottandole. Perciò, per esigenze amministrative, furono adottate le convenzioni dei singoli popoli: greci o siriaci in Siria, copti in Egitto, aramaici in Palestina. Solo a partire dal secolo VIII cominciarono a ricorrere alle lettere dell'alfabeto per rappresentare le cifre del sistema decimale. Come nel caso dei primi numerali indiani (v. 2.4.), il sistema manteneva la caratteristica di essere additivo e basato su nove simboli; il progresso dell'introduzione dello zero e della notazione posizionale intervenne grazie agli interessi astronomici (calcolo della direzione della Mecca) che portarono gli Arabi alla lettura dei testi indiani, dove si faceva uso di questa notazione e dello zero. Gli scienziati arabi cominciarono allora, pur con molta lentezza e forti resistenze soprattutto da parte di scribi e funzionari (Ifrah, 1981), a privilegiare questa convenzione, che per la sua semplicità ed efficacia si dimostrava superiore alle altre, ed intrapresero studi specifici di aritmetica. Il primo autore di cui si ha notizia (Woepke, 1863) è Mohammad ibn Musa al-Khawarizmi.

3.1. LA BIOGRAFIA

Di origine persiana, abu Jafar Mohammed ibn Musa al-Khawarizmi (780-850 circa) lavorò a Baghdad, nella Casa del Sapere. Unico elemento certo nella ricostruzione della biografia sta nel nome al-Khawarizmi, che significa originario della Coresmia (l'attuale Uzbekistan): la città di Khiva, capoluogo della regione, fu fondata, secondo una leggenda, quando Sem, figlio di Noè, scavò un pozzo in questa zona; la città esisteva certamente nel secolo VIII come roccaforte e tappa

commerciale lungo la diramazione della Via della Seta che portava al Mar Caspio e al Volga, ed era entrata a far parte dell'impero arabo nel 712; altra città antica e importante della regione è Samarcanda. Al-Khawarizmi sarebbe nato a Kath, città oggi sepolta nel deserto, intorno al 780. Joseph (Joseph, 2000), usando come fonte Toomer (Toomer, 1970-1990), riferisce che uno storico arabo del IX secolo, al-Tabari, nomina al-Khawarizmi chiamandolo al-Majusi; l'etimologia della parola ne farebbe risalire la derivazione da *magus*, termine adottato in lingua *pahlavi* per indicare i seguaci della religione zoroastriana. Questo avvalorerebbe l'ipotesi di una sua prima formazione matematica ed astronomica legata allo Zoroastrismo. Che la sua religione fosse quest'ultima è però tutt'altro che dimostrabile sia per la cospicua presenza di preghiere e lodi a Dio ed a Maometto presenti nelle sue opere (introduzione all'Algebra) sia per il ruolo subordinato che avevano gli studiosi non musulmani, pur accolti a corte; al-Tabari l'avrebbe definito anche al-Qutrubbulli, ossia originario di Qutrubbull, un sobborgo di Baghdad, attribuendo alla Coresmia l'origine di tutta la famiglia. Rashed, invece, (Rashed, 1984, 2007) spiega il testo di al-Tabari in modo molto diverso; a suo avviso, il testo andrebbe emendato, reintroducendo la congiunzione *wa* (= e), caduta fra i due nomi: «Muhammad ibn Musa al-Khawarizmi e al-Majusi al-Qutrubbulli»; si tratterebbe di due persone distinte e tutte le ipotesi sopra riportate sarebbero destituite di fondamento. Infine si segnala la tesi dello storico turco Sayili (Sayili, 2004), secondo il quale l'origine dell'autore potrebbe anche essere turca per due ragioni: il fatto che i Turchi costituissero una buona parte della popolazione della Coresmia (a suo dire) e che il califfo l'avesse scelto per una spedizione proprio in quelle terre. Rashed (Rashed, 2007) traccia un profilo della formazione di al-Khawarizmi, attraverso i contenuti delle opere: era certamente esperto di astronomia indiana e greca; conosceva bene l'aritmetica indiana, araba e romana; aveva infine ricevuto una solida formazione giuridica, in particolare per quanto riguardava il calcolo; l'ampiezza degli studi fa concludere a Rashed che debbano essere avvenuti in un ambiente culturalmente vivace come Baghdad.

Verso l'820, quando al-Khawarizmi già godeva di grande rinomanza come scienziato a Merv, capitale delle province orientali del califfato abbaside, fu chiamato dal califfo al-Mamun a Baghdad, dove divenne primo astronomo e direttore della biblioteca annessa alla Casa del Sapere. Alcuni studiosi (Joseph, 2000) attribuiscono inoltre fondamento alle notizie di sue spedizioni lontano da Baghdad, in India e a Bisanzio, per compiere osservazioni scientifiche e per raccogliere il materiale necessario alle sue ricerche; altri (Brezina, 2006) invece negano sia il suo viaggio, per volere del califfo, presso i Cazari, popolo che controllava il commercio nei territori tra il mar Caspio ed il mar Nero; sia quello in Grecia alla tomba dei sette Dormienti; per Brezina si tratta di un omonimo Musa, uno dei fratelli Banu Musa.

Alla morte di al-Mamun, al-Khawarizmi rimase al servizio dei suoi successori. Al-Tabari racconta che, quando il califfo al-Wathiq si ammalò seriamente,

pregò lo scienziato di fargli l'oroscopo. Al-Khawarizmi giurò al califfo che sarebbe vissuto per altri cinquant'anni, ma dopo dieci giorni la profezia fu smentita dalla morte del sovrano. «È difficile dire se questo racconto illustra il senso di sopravvivenza molto sviluppato di al-Khawarizmi o la sua inettitudine come indovino», commenta sarcasticamente Joseph. Non ci sono altre notizie fondate, tranne la data della morte, collocabile intorno all'847, come afferma al-Tabari.

3.2. LE OPERE

Le opere dell'autore trattavano rispettivamente di:

1. aritmetica
 - a. *Hisab al-hindi*: Calcolo con i numeri indiani (perduto);
 - b. *Al-jam wa-al-tafriq*: Libro sull'unione e la separazione, citato da **al-Baghdadi** ¹ (980-1037);
2. algebra (*Hisab al-jabr w'al-muqabalab*: Calcolo con completamento e riduzione);
3. astronomia (*Zij*: tavole astronomiche);
4. geografia (*Kitab Surat al-Ard*: Libro sulla forma della Terra);
5. calendario (*Istikbraj Ta'rikh al-Yabud*: Il calendario ebraico), 823-824;
6. storia (*Kitab al-Tarik*: Croniche); un testo di storia e astrologia, databile dopo l'826.

Le opere 1.a. e 2. sono diventate celebri e hanno esercitato un notevole ascendente sulla matematica medievale in Occidente, oltre che sugli scienziati arabi posteriori. Lo stesso è avvenuto per lo *Zij* (3) in ambito astronomico.

3.2.1. Aritmetica

Il primo libro di **aritmetica** non ci è giunto nell'originale arabo, ma solo in varie traduzioni latine del XII e XIII secolo. Una di queste versioni, presente in un unico manoscritto (ms.Ii.vi.5) alla University Library di Cambridge, fu pubblicata a Roma nel 1857 da Baldassarre Boncompagni (Boncompagni, 1857-1862), col titolo *Algoritmi de numero Indorum*, e successivamente, a cura di Vogel (Vogel, 1963) e in *fac-simile* dalla von Kopelevitch (von Kopelevitch, 1964). Esiste l'edizione critica dei testi latini da essa derivati (v. 7.2.) con traduzione francese di Allard (Allard, 1992) ed è stata studiata successivamente da Folkerts

¹ Il nome completo dell'autore è Abu Mansur Abr al-Qahir ibn Tahir ibn Muhammad ibn Abdallah al-Tamini al-Shaffi al-Baghdadi; il testo è edito da Saïdan (Saïdan, 1987).

(Folkerts, 1997). Boyer (Boyer, 1968) ne spiega il titolo supponendo che si tratti di una traduzione da Brahmagupta ed aggiunge che infatti nel testo al-Khawarizmi non si attribuisce mai la paternità dell'invenzione di questo sistema di numerazione, anzi il matematico ne indica esplicitamente l'origine indiana fin dal titolo (Crossley e Henry, 1990).

Il termine *algorithmus* deriva dal nome di al-Khawarizmi, latinizzato in *algorismus* e poi alterato a causa di una errata ricostruzione dell'etimologia: da **Algus** [philosophus], nome attribuito all'autore, e dal greco ἀριθμός (numero). In un primo tempo il suo significato si riferì al sistema di numerazione posizionale in base 10 e solo in seguito ad un procedimento sistematico di calcolo. Probabilmente la mediazione araba nel passaggio dei numerali in Europa, la fama dell'opera di al-Khawarizmi e la completezza dell'esposizione hanno contribuito a diffondere l'erronea idea dell'origine araba (e non indiana) di questo sistema numerico.

Il secondo libro di aritmetica sarebbe passato in Occidente, secondo Rashed (Rashed, 2007), col titolo latino di *Liber augmenti et diminutionis*, variamente attribuito da altri (Libri, 1838; Tannery, 1901; Suter, 1902) al matematico ebraico **Abraham ibn Ezra** (v. 4.4.); a testimoniare la paternità di al-Khawarizmi stanno, sempre secondo Rashed, le testimonianze di al-Baghdadi, al-Buzjani e al-Karaji.

3.2.2. Algebra

Il trattato di algebra (813-833) rappresenta il primo vero testo di questa disciplina. Nonostante l'esistenza di studi greci ed indiani precedenti, l'opera rappresenta una svolta significativa.

Il titolo completo suona in arabo *Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabalah*, che tradotto risulta «Breve opera sul calcolo con restaurazione e riduzione».

Il più remoto testimone arabo dell'Algebra (Oxford, Bod., Hunt 214) pubblicato è piuttosto tardo, dal momento che è stato copiato al Cairo nel 1342; è stato riprodotto e tradotto in inglese in modo non esemplare, secondo il giudizio unanime della critica, da Rosen (Rosen, 1831) e trascritto in arabo da Musharrafa e Ahmad (Musharrafa e Ahmad, 1939 e 1968); nel 2007 Rashed ne ha dato l'edizione critica; sono invece più antiche le traduzioni latine, in particolare quelle di Roberto di Chester, realizzata nel 1145 a Segovia (v. 5.2.), di Gerardo da Cremona, redatta a Toledo intorno al 1170 (v. 5.3.), e di Guglielmo de Lunis, portata a termine il secolo successivo (v. 5.4.).

Allard (Allard, 1997) infine riferisce che nel *Liber Alchorismi de pratica arismetice* (v. 5.6. e 7.1.3.), traduzione latina del *Kitab al-hisab al-hindi* risalente al 1143, è presente un breve capitolo dal titolo «Exceptiones de libro qui dicitur geba et mucabala», il cui titolo denuncia chiaramente il contenuto: si tratta proprio

di una parte dell'opera algebrica di al-Khawarizmi. Allard la indica come versione I, in quanto cronologicamente antecedente alle traduzioni di Roberto (versione II) e di Gerardo (versione III), ma non fa riferimenti alla traduzione di Guglielmo.

L'opera è strutturata in una breve introduzione sui contratti commerciali e sui calcoli relativi eseguiti attraverso la regola del tre, già nota ai matematici indiani (v. il manoscritto di *Bakhshali*, già citato in 2.4.); e di tre capitoli di varia lunghezza dedicati rispettivamente all'algebra; alla geometria piana e solida; e ai problemi di spartizione di eredità, estremamente macchinosi nel diritto coranico.

3.2.3. Astronomia

Al-Khawarizmi compilò uno *zij* (una raccolta di tavole astronomiche derivate dal *Sindhind*, ma anche dall'astronomia babilonese e tolemaica), il cui originale è oggi andato perduto, ma fu trasportato in Europa, tradotto in latino da **Ade-lardo di Bath** nel 1126 dalla versione di Maslama dell'astronomo cordobese **al-Majriti** (risalente all'anno 1000 circa), e divenne uno dei testi astronomici più importanti dell'Europa medievale, utile per i calcoli legati alla liturgia della Pasqua (Busard, 1983). Il *Compotus* infatti sarebbe stata la porta principale attraverso la quale le tecniche di calcolo arabe sarebbero entrate in Occidente ².

3.2.4. Geografia

Le opere geografiche e cartografiche di al-Khawarizmi furono legate agli incarichi ricevuti dal califfo al-Mansur (Joseph, 2000):

1. trovare la misura lineare corrispondente ad un grado di longitudine alla latitudine di Baghdad (il risultato ottenuto, 91 chilometri, era abbastanza preciso);
2. utilizzare le osservazioni astronomiche per trovare la latitudine e la longitudine di milleduecento luoghi importanti sulla faccia della terra, tra cui città, laghi e fiumi;
3. confrontare le osservazioni personali dei viaggiatori sulle caratteristiche fisiche di zone diverse del califfato e sui tempi impiegati per raggiungerle.

Al-Khawarizmi raccolse le sue scoperte nel libro *Kitab Surat al-Ard*, in cui migliorò la precisione della stima della lunghezza del Mediterraneo fatta da Tolomeo e diede rappresentazioni più dettagliate e precise della geografia dell'Asia e dell'Africa.

² Già nel 984 l'arcidiacono **Senofredus Lupidus** di Barcellona tradusse in catalano un trattato arabo sull'astrolabio, spiegando le potenzialità di tale strumento ai suoi confratelli, forse un po' esitanti ad adottare una tecnica di origine islamica (Rebstock, 1994).

3.3. LA TRADIZIONE ARABA DELL'ALGEBRA

La più antica edizione dell'opera è quella di Rosen (Rosen, 1831), che riproduce il manoscritto copiato al Cairo nel 1342 e conservato ad Oxford nella Bodleian library, (vol. CMXVIII, Hunt. 214, secondo la segnatura riportata da Rosen ³). Il testo è stato nuovamente edito a cura di Musharrafa e Ahmad (Musharrafa e Ahmad, 1939 e 1968), studiato da Anbouba (Anbouba, 1978), e ha conosciuto edizione critica, basata su vari manoscritti, ad opera di Rashed (Rashed, 2007).

Nella sua edizione critica, Rashed indica i seguenti ⁴ testimoni:

A – Oxford, Bod., Hunt 214, ff.1v-34r; risalente al 24 giugno 1342

B – Berlino, Landberg 199, ff.60v-95v; (incompleto)

O – Medina, Arif Hikmat, 6-jabr, ff.1v-31v; risalente al 26 marzo 1222; (incompleto)

H – Medina, Arif Hikmat, 4-jabr, ff.1v-61v; risalente al 21 giugno 1767

M – Teheran, Malik 3418, ff.16-23

S – New York, Columbia, Smith Or. 40; copia di A fatta dal matematico americano David Eugene Smith (1860-1944)

L – manoscritto (perduto) fonte della traduzione di Gerardo da Cremona

K – manoscritto (perduto) fonte dell'appendice alla traduzione di Gerardo da Cremona

e traccia lo stemma presentato in *fig. 3.1*.

Come si vede, nello stemma compare anche il commento all'opera da parte del matematico e giurista al-Khuzai; esso è stato trascritto nelle glosse a margine dal copista dell'Oxford, ma è conservato integralmente in un manoscritto datato Ramadan 607 (ossia febbraio/marzo 1211) ritrovato da Rashed a Istanbul, Biblioteca Yeni Cami, n. 803.

³ Dal momento che la mia conoscenza della lingua araba è limitata, la versione italiana del testo di al-Khwarizmi qui presentata è stata realizzata nel seguente modo: sono partita dalla versione francese di Rashed (Rashed, 2007), confrontandola con traduzione contrastiva del testo di Rosen (Rosen, 1831); ho tenuto conto del lavoro di Høyrup (Høyrup, 1990) e della traduzione di Puig (Puig, 1996a) in spagnolo castigliano, delle edizioni critiche delle traduzioni latine di Roberto di Chester (Hughes, 1989) e di Gerardo da Cremona (Hughes, 1986).

⁴ Rashed dà notizia anche di due manoscritti in Afghanistan a Kabul: uno è conservato in una collezione privata ed è stato esaminato in loco dallo storico, che tuttavia non ha potuto approfondirne l'esame; il secondo, in base alla convinzione degli esperti del Museo del Cairo, si troverebbe nell'inaccessibile biblioteca dell'antico palazzo reale.

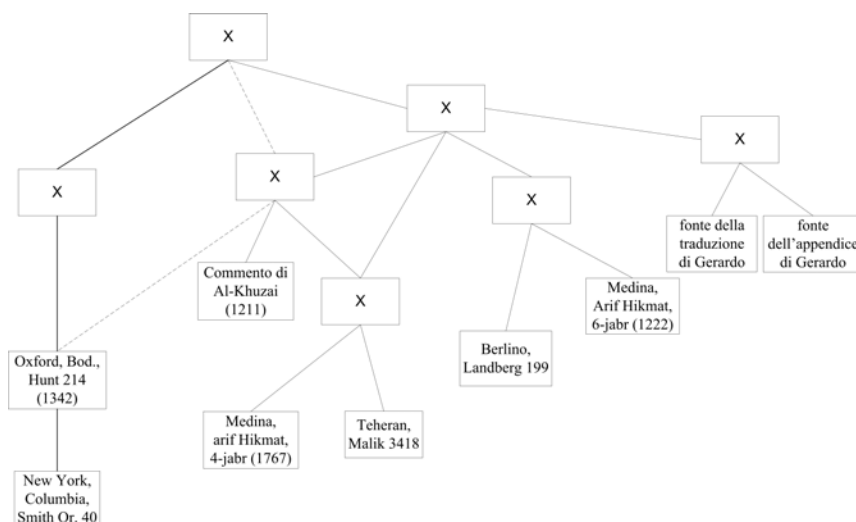


Fig. 3.1. – Stemma della tradizione dell'Algebra (da Rashed, 2007).

3.4. IL CONTENUTO DELL'ALGEBRA

Nella prefazione l'autore, dopo una lunga lode in esaltazione di Dio (come viene indicata nelle traduzioni latine la *basmala*) e del profeta Maometto, spiega che «gli uomini di cultura vissuti in altre epoche e in popoli che hanno cessato di esistere, si sono costantemente dedicati a scrivere libri su vari aspetti della scienza e vari rami del sapere, sia pensando ai posteri e ad una ricompensa adeguata alla loro abilità, sia confidando di ricavarne ricompensa, ricchezza e fama, sia di rispettare la lingua della verità di fronte alla quale svanisce la fatica sopportata per svelare i segreti della scienza e ciò che ella racchiude di nascosto. C'è un uomo che è giunto per primo a scoprire ciò che non era stato scoperto prima di lui e l'ha lasciato in eredità ai posteri; un uomo che ancora ha spiegato ciò che i suoi predecessori avevano lasciato inaccessibile, per chiarirne il metodo di studio o spianarne la strada o avvicinarne l'accesso; un uomo (infine) che ha scoperto un errore in certi libri, e allora ha riunito ciò che era disperso, ha criticato mantenendo una buona opinione dell'autore, senza arroganza verso di lui o orgoglio per il proprio lavoro». Grazie al mecenate al-Mamun, appassionato di cultura, al-Khawarizmi spiega di essersi sentito «incoraggiato a comporre una breve opera sul calcolo con [le regole di] completamento e riduzione; ha voluto che contenesse ciò che è acuto in aritmetica e ciò che è più nobile, ciò che necessariamente agli uomini serve in casi di eredità, lasciti, divisioni,

processi e commerci e in tutti i rapporti reciproci, o nei casi che riguardano la misurazione di terre, lo scavo di canali, computi geometrici, ed altri contenuti rilevanti sul calcolo e le sue tipologie [...]». Il fine essenziale di al-Khawarizmi è quindi di redigere un manuale utile alla soluzione dei problemi della vita quotidiana e ciò risulta evidente anche osservando lo stile decisamente allocutorio utilizzato dall'autore; l'opera però avrà una portata e un'importanza ben più grandi, nonostante l'assenza di richiami ad un quadro generale di riferimento.

L'algebra di al-Khawarizmi è completamente retorica: egli non ricorre all'uso di simboli e le sue spiegazioni risultano prolisse e ridondanti.

3.4.1. I termini primitivi

«Quando ho osservato ciò che gli uomini hanno bisogno nel calcolo, ho scoperto che è sempre un numero ed ho anche notato che tutti i numeri sono costituiti a partire dall'unità e che l'unità è inclusa in tutti i numeri. Inoltre, ho notato che tutti i numeri che si esprimono sono quelli che superano l'unità fino a dieci; così, si raddoppia e si triplica l'unità e si formano, a partire da essa, l'unità, il due, il tre fino alla decina completa. Il dieci occupa il posto dell'unità; poi lo si raddoppia e lo si triplica, come si è fatto con le unità: e si formano a partire da esso il venti, il trenta, fino al centinaio completo. Si raddoppia poi il cento e lo si triplica, come si è fatto per l'unità e per il dieci, fino a mille. Allo stesso modo poi si ripete il migliaio per ciascun ordine, fino alla fine di ciò che si cercava nel numero.»

Dopo aver brevemente ripreso il sistema di numerazione decimale, al-Khawarizmi passa alle definizioni dei numeri che saranno usati nel testo:

«Ho notato che i numeri necessari per il calcolo con completamento e riduzione sono di tre tipi: radici, quadrati e numeri semplici, che non sono né radici né quadrati.

«Una **radice** ⁵, tra questi tipi, è qualsiasi cosa venga moltiplicata per se stessa, a partire dall'unità, per un numero superiore ad essa [unità] o per una frazione, inferiore alla stessa [unità].

«Un **quadrato** ⁶ è ciò che si ottiene dalla radice moltiplicata per se stessa.

«Un **numero semplice** ⁷ è qualsiasi numero che può essere nominato senza fare riferimento a radice o quadrato.»

⁵ Presso gli algebristi successivi *jidbr* o *shay* (lett. cosa); in latino, *res* o *radix*.

⁶ In arabo *māl*, che letteralmente significa somma di denaro, tesoro; di qui la traduzione di Roberto di Chester (*substantia*) e di Gerardo da Cremona (*census*). La scelta di Rosen di tradurlo con quadrato non è condivisa da tutti gli studiosi (Oaks e Alkhateeb, 2005).

⁷ In arabo *adad mufrad* o, in alcuni esempi, *dirham*, ossia una moneta (forse dal greco *δράχμη*), a conferma della finalità pragmatica dell'opera.

3.4.2. Le forme normali e le regole per risolverle

«Fra questi tre tipi ⁸, alcuni sono uguali ad altri; tu puoi dire, per esempio, quando si dice *quadrati uguali a radici* o *quadrati uguali a un numero* o *radici uguali a un numero*.»

Con questa frase al-Khawarizmi passa dalla classificazione dei termini primitivi a quella delle equazioni in due gruppi:

- Equazioni semplici
 - **Caso 1:** Quadrati uguali a radici ($ax^2 = bx$)
 - **Caso 2:** Quadrati uguali a numeri ($ax^2 = c$)
 - **Caso 3:** Radici uguali a numeri ($bx = c$)
- Equazioni composte
 - **Caso 4:** Quadrati e radici uguali a numeri ($ax^2 + bx = c$)
 - **Caso 5:** Quadrati e numeri uguali a radici ($ax^2 + c = bx$)
 - **Caso 6:** Radici e numeri uguali a quadrato ($bx + c = ax^2$)

Il primo concetto presentato è quindi costituito dalle equazioni di primo e di secondo grado, a coefficienti numerici, con una peculiarità rispetto alla tradizione precedente. Si è abbandonata la modalità strettamente empirica, tipica di Egizi, Babilonesi e Greci, di risolvere problemi aritmetici e geometrici, traducibili in equazioni, e si inizia con la teoria delle equazioni: i problemi saranno presentati in seguito con un grado di realismo crescente (i primi problemi trattano astrattamente di trovare due numeri la cui somma è dieci, che soddisfino alcune condizioni; l'ultima sezione è quella invece dedicata a questioni di divisione ed alle eredità). Al-Khawarizmi considera metodicamente solo equazioni di primo e secondo grado, per le quali può eseguire la verifica geometrica dell'esattezza della soluzione, sfruttando le proprietà dimostrate, per esempio, negli *Elementi* di Euclide. Inoltre egli fornisce sempre non solo la radice dell'equazione considerata, ma anche il suo quadrato. Al-Khawarizmi studia l'equazione come ente matematico in sé, ne redige una casistica, presenta il metodo risolutivo e illustra con figure la discussione di ciascuno dei casi.

Per ciascun caso vengono quindi forniti l'algoritmo risolutivo, attraverso uno o più esempi, ed alcune indicazioni generali da tenere presenti nella risoluzione di altre equazioni dello stesso tipo. La ridondanza dei casi delle equazioni composte, almeno rispetto alla formula risolutiva attuale, dipende dal fatto che al-Khawarizmi considera ammissibili solo radici, coefficienti (a , b) o termini noti (c) strettamente positivi; la necessità di questo vincolo si desume facilmente dal riferimento monetario sopra accennato: valori negativi o nulli non avrebbero senso o non sarebbero di interesse in molti casi dell'esperienza pratica di

⁸ I corrispondenti di *incognita*, *quadrato dell'incognita* e *termine noto*, nella terminologia attuale.

calcolo, visti gli ambiti di applicazione indicati dall'autore. Ad esempio, nella soluzione di $x^2 = 5x$, l'autore indica come unica radice il 5, ignorando ⁹ deliberatamente il valore 0. In ciascun esempio, inoltre, al-Khawarizmi ribadisce l'importanza di ricondursi attraverso opportuni calcoli ad avere il coefficiente della x^2 pari all'unità, operazione denominata genericamente *al-batt* oppure *al-ikmal* se $0 < a < 1$ e *al-radd* per $a > 1$ (Oaks e Alkhateeb, 2007).

Rashed ha formulato una teoria sull'origine della classificazione delle equazioni qui presentata, basata sugli studi combinatori dei linguisti del secolo VIII; **Khalil ibn Ahmad al-Farahidi** (718-791) fu l'autore del primo vocabolario di lingua araba (*Kitab al-Ayn*), per compilare il quale si trovò di fronte ad un lavoro gigantesco. Decise così di procedere etimologicamente attraverso le radici della lingua e, per essere certo di catalogarle tutte, sapendo che in lingua araba la loro lunghezza è compresa fra 2 e 5 lettere, procedette generando tutte le combinazioni possibili di r lettere diverse ($1 < r \leq 5$) delle 28 lettere dell'alfabeto arabo e in seguito le loro permutazioni ¹⁰; il passaggio successivo fu quello di selezionare tra tutte le combinazioni quelle realmente utilizzate. L'opera di Khalil diventò un vero modello per i linguisti successivi e Rashed ipotizza che il metodo seguito dallo studioso di fonetica sia stato alla base della classificazione delle equazioni di al-Khawarizmi, che avrebbe prima individuato tutti i casi possibili, escludendo poi quelli ridondanti.

Al-Khawarizmi fornisce la risoluzione dei tre casi semplici attraverso meri esempi; più complessa la soluzione dei tre casi composti, che di seguito si riporta.

Caso 4: «Un quadrato e dieci delle sue radici fanno 39 *dirhem*; il che equivale a dire che, se si aggiunge a un quadrato qualsiasi una quantità pari a 10 radici, il risultato ammonta a 39. La soluzione è la seguente: dimezza il numero delle radici; in questo esempio fa cinque. Lo moltiplichi per se stesso e il prodotto fa venticinque. Sommalo a trentanove e fa sessantaquattro. Ora prendine la radice, che è otto e sottrai da essa la metà del numero delle radici, che è

⁹ Peraltro, questa limitazione a $\mathbb{R}^+$ viene utilizzata anche dagli algebristi fino al XVII secolo (ci sono esempi ancora nella *Géométrie* di Cartesio del 1637). Per una panoramica storica, v. Sesiano (Sesiano, 1985).

Oltre a ciò al-Khawarizmi impiega raramente un numero irrazionale, denominato *gizr asamm* (radice sorda). Nella sua versione latina dell'opera, Gerardo da Cremona, nel XII secolo, tradurrà il termine *asamm* col vocabolo latino *surdus*, fissandone così la denominazione fino al XVIII secolo. Rashed (Rashed, 2007) osserva che il termine *asamm*, che nell'*Algebra* compare solo due volte sempre abbinato a *malum* (= noto), viene utilizzato da al-Khawarizmi per indicare numeri, segmenti ed anche incognite. Ne risulta quindi un concetto più ampio e ricco di «irrazionale».

¹⁰ $A'_n = r! \binom{n}{r}$ dove $n = 28$ e $1 < r \leq 5$.

cinque; il resto è tre. Questa è la radice del quadrato che stavi cercando; il quadrato stesso è nove ¹¹.

«Allo stesso modo, se si considerano due quadrati, o tre o più, o meno, riconducili a un solo quadrato e riduci le radici e i numeri che sono con essi, come hai fatto con il quadrato.

«Per esempio, quando dici: due quadrati più dieci radici sono uguali a quarantotto *dirhem*; è come dire che, se si sommano due quadrati qualsiasi e se si aggiunge loro dieci volte la radice di uno di essi, si ottengono quarantotto *dirhem*. Bisogna allora ricondurre i due quadrati ad uno solo; tu sai che un quadrato in rapporto a due quadrati è la metà: quindi riconduci tutti i termini del problema alla loro metà. Come se si fosse detto: un quadrato più cinque radici sono uguali a ventiquattro *dirhem*: è come dire che, se si aggiunge a un quadrato qualsiasi cinque volte la sua radice, si ottengono ventiquattro *dirhem*.

«Dividi per due il numero delle radici, avrai due e mezzo; moltiplicalo per se stesso, si avrà sei e un quarto, sommalo a ventiquattro, fa trenta *dirhem* e un quarto. Estrai la radice, che è cinque e mezzo, sottrai da questa la metà del numero di radici, che è due e mezzo, resta tre, che è la radice del quadrato e il quadrato è nove.

«Ancora, se si dice: la metà di un quadrato più cinque radici è uguale a ventotto *dirhem*; è come dire che, per un quadrato qualsiasi, se si aggiunge alla sua metà 5 volte la sua radice, si ottengono ventotto *dirhem*. Tu vuoi completare il tuo quadrato, in modo che diventi un quadrato intero, e questo si ottiene moltiplicandolo per due. Moltiplicalo per due e moltiplica per due tutto ciò che hai che gli è uguale [= tutti gli altri termini]; si avrà un quadrato più dieci delle sue radici uguali a cinquantasei *dirhem*. Dividi per due il numero delle radici; fa cinque, moltiplicalo per se stesso; si ottiene venticinque, che tu sommi a cinquantasei; fa ottantuno. Estrai la radice, che è nove, dalla quale tu sottrai la metà del numero delle radici, che è cinque, da questa sottrai la metà del numero delle radici, ossia cinque; rimane quattro, che è la radice del quadrato che tu vuoi: il quadrato è sedici e la sua metà è otto. Procedi allo stesso modo in tutto ciò che si presenta, quadrati e radici uguali a un numero. Tu otterrai il risultato giusto, se Dio vuole».

In sintesi, dunque, si ottiene la formula

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2} + c - \frac{b}{2}$$

¹¹ Esempi analoghi si ritrovano in testi matematici babilonesi ed indiani, come fanno notare sia Neugebauer (Neugebauer, 1957) sia Joseph (Joseph, 2000) ; un esempio noto, espresso in notazione sessagesimale, è $x^2 - x = 14,30$ che viene risolto nel seguente modo: prendi la metà di 1, ossia 0;30; e moltiplica 0;30 per 0;30, che fa 0;15. Sommalo a 14,30 per ottenere 14,30;15. Questo è il quadrato di 29;30. Ora aggiungi 0;30 a 29,30. Il risultato è 30, il lato del quadrato (Stewart, 1973).

che coincide con quella utilizzata oggi, con gli opportuni aggiustamenti dovuti alle differenze di segno (il termine noto c dell'equazione del primo caso composto secondo al-Khawarizmi corrisponderebbe a $-c$, portando l'equazione nell'attuale forma canonica) ed alla ricerca limitata alla sola radice positiva, nell'ipotesi $a = 1$.

Come si vede, vengono esemplificati accuratamente entrambi i casi di normalizzazione: dapprima, il cosiddetto *al-radd*, poi *al-ikmal* con i rispettivi esempi.

L'algoritmo viene qui descritto attraverso un diagramma di flusso, in cui dopo l'eventuale riduzione di a al valore unitario (*al-batt*), si è aggiunto il passaggio relativo agli assegnamenti

$$b = \frac{b}{a} \quad e \quad c = \frac{c}{a}$$

indicati negli esempi di al-Khawarizmi (fig. 3.2.).

Caso 5: «Quadrati e *dirhem* sono uguali a radici; ad esempio, un quadrato e ventuno *dirhem* sono uguali a dieci radici dello stesso quadrato. È come dire, se aggiungi a un quadrato qualsiasi 21 *dirhem*, ciò che ottieni sarà uguale a dieci radici dello stesso quadrato. Procedimento: dimezza il numero delle radici; la metà è cinque. Moltiplicalo per se stesso; il prodotto fa venticinque. Sottrai da questo i ventuno, che, si è detto, vanno aggiunti al quadrato; la differenza è quattro. Estrai la radice; è due. Sottraila dalla metà delle radici, cioè cinque; la differenza è tre. Questa è la radice del quadrato che vuoi, e il quadrato è nove. Se vuoi, aggiungi la radice alla metà delle radici; la somma è sette; [anche] questa è la radice del quadrato che stavi cercando, e il quadrato stesso è quarantanove. Quando trovi un esempio che puoi ricondurre a questo caso, verifica l'esattezza della soluzione sia con l'addizione sia, altrimenti [= se non dà un risultato accettabile, cioè maggiore di zero], necessariamente con la sottrazione: Questo procedimento si applica di volta in volta sommando o sottraendo, cosa che non si fa in nessuno degli altri tre casi in cui bisogna dimezzare il numero di radici. Sappi che, se dimezzi il numero delle radici, in un problema riconducibile a questo tipo, e moltiplichi una metà per se stessa, in modo che il prodotto sia minore del numero di *dirhem* che viene aggiunto al quadrato, allora il problema diventa impossibile. Se invece il prodotto è uguale al numero di *dirhem*, allora la radice del quadrato è esattamente uguale alla metà delle radici, senza eccesso o difetto. In ogni esempio, in cui hai due o tre quadrati, o di più o di meno, riducili al quadrato [con coefficiente] unitario, come ti ho spiegato per il caso precedente.»

Come si può notare chiaramente nella fig. 3.3., questo è il caso di equazioni che prevede la risoluzione più complessa, con controlli dei valori numerici ottenuti; infatti, oltre a ricondurre $a = 1$ per semplificare i calcoli successivi, il solutore potrebbe trovarsi di fronte ad un'equazione che non ammette soluzioni reali ($\Delta < 0$), oppure che ammette una sola soluzione, o, meglio, due soluzioni

coincidenti ($\Delta = 0$)¹², oppure che ammette due soluzioni distinte. Nell'ultimo caso, le due radici distinte saranno accettabili solo se entrambe strettamente positive, come nei casi precedenti.

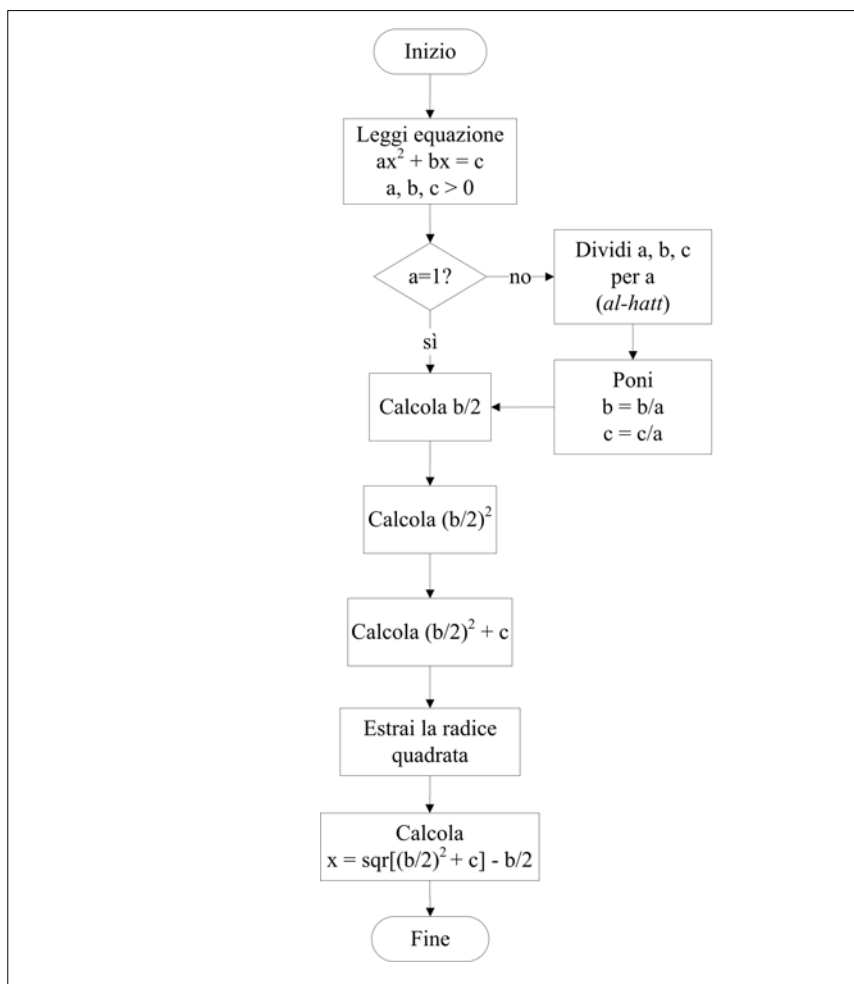


Fig. 3.2. – Algoritmo per la risoluzione di equazioni del quarto caso.

¹² Posto il vincolo $a, b, c > 0$, non può invece darsi il caso $\frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2} - c$ che implicherebbe $c = 0$ e l'equazione rientrerebbe nel caso 1.

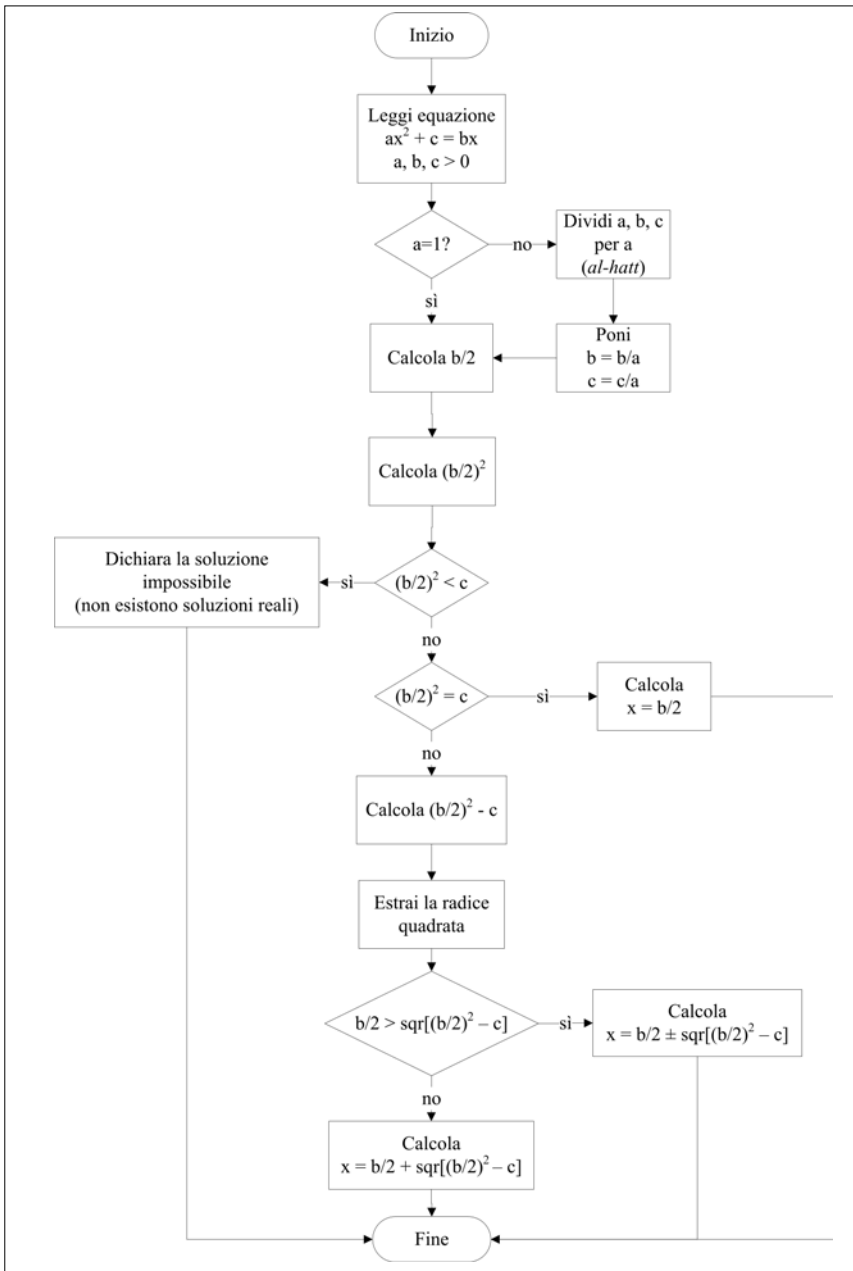


Fig. 3.3. – Algoritmo per la risoluzione delle equazioni del quinto caso.

In numerosi testi babilonesi (Franci, 1979) compare l'equazione corrispondente al caso 5, trattata come equivalente al sistema di equazioni $\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$ con una risoluzione molto simile a quella utilizzata da al-Khawarizmi.

Caso 6: «Radici più il numero uguali a quadrati; per esempio, quando dici: tre radici e quattro *dirhem* sono uguali a un quadrato. Procedimento: dimezza il numero di radici; la metà è uno e mezzo. Moltiplica questo risultato per se stesso; il prodotto è due e un quarto. Aggiungilo a quattro; la somma fa sei e un

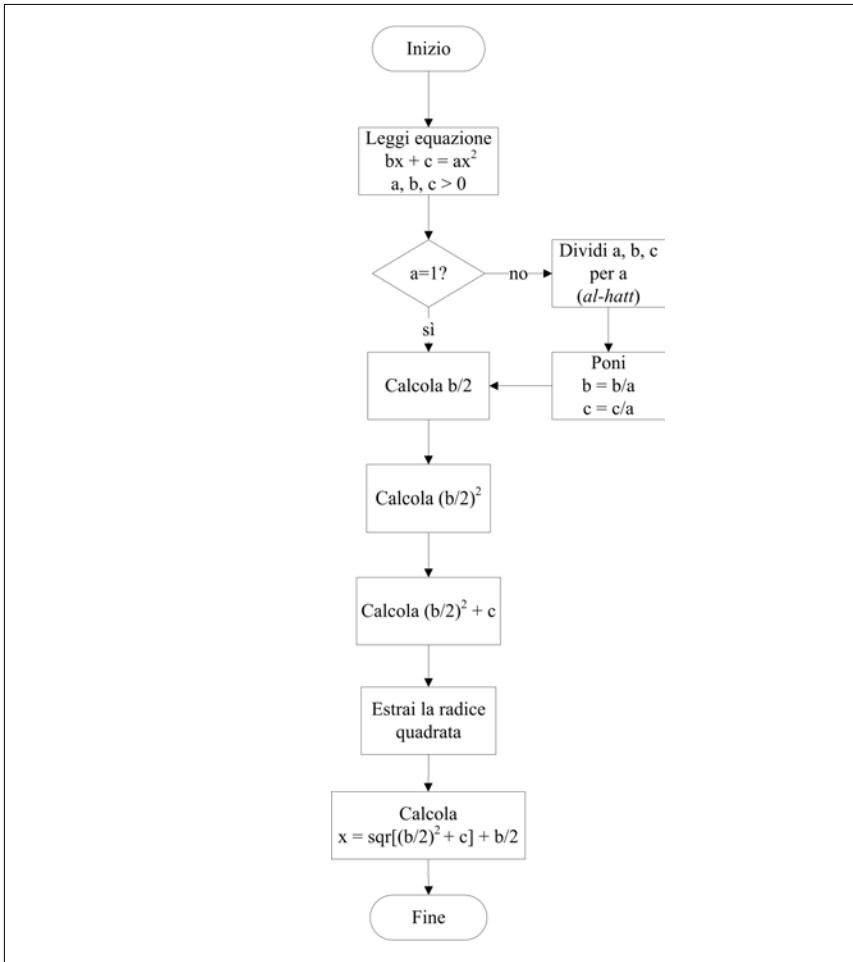


Fig. 3.4. – Algoritmo per la risoluzione delle equazioni del sesto caso.

quarto. Estraine la radice; il risultato è due e mezzo. Sommalo alla metà del numero di radici, che era uno e mezzo; la somma è quattro. Questa è la radice del quadrato e il quadrato è sedici. Tutto ciò che è maggiore o minore del quadrato, ridicolo al quadrato [con coefficiente] unitario.

«Questi sono i sei casi che ho citato nell'introduzione a questo mio libro. Ho completato la loro spiegazione. Ho mostrato che tre di essi non richiedono il dimezzamento delle radici ed ho insegnato la loro inferenza e la loro necessità. Quanto ai tre tipi restanti, in cui il dimezzamento delle radici è necessario, io li ho descritti per mezzo di esempi dimostrabili ed ho predisposto per ogni caso una figura, per mezzo della quale scoprire la causa del dimezzamento.»

3.4.3. Dimostrazioni delle regole

Dopo le regole risolutive con i radicali, al-Khawarizmi procede quindi in questa parte con le dimostrazioni geometriche delle formule proposte; nel primo caso sono presenti due diverse costruzioni, basate sul procedimento del completamento del quadrato. Come si è detto, esse presentano analogie con l'algebra geometrica greca, soprattutto euclidea. Rashed (Rashed, 2007) sottolinea, a proposito delle dimostrazioni, come esse fossero un'esigenza imprescindibile per fondare la teoria delle equazioni, poiché permettono di stabilire perché l'algoritmo porta al risultato¹³, utilizzando un linguaggio differente da quello dell'algebra, per dare a quest'ultima fondamento epistemologico.

Per evitare ambiguità nel testo della traduzione, in questo paragrafo si mantiene *mal* per indicare il quadrato dell'incognita (δύναμις, secondo il lessico diofantino) e si lascia *quadrato* per indicare la figura geometrica (τετράγωνος).

3.4.3.1. Dimostrazione del caso: «un *mal* e dieci radici sono uguali a 39 dirhem»

«La figura per la dimostrazione è un quadrato di lato ignoto. Questo [quadrato] rappresenta il *mal* che cerchi di conoscere, come pure vuoi conoscere la sua radice. Sia data la figura AB¹⁴, ciascuno dei suoi lati è la sua radice; e se tu moltiplichi ciascuno di questi lati per un numero, allora i risultati rappresentano il numero di radici. Ogni radice [del *mal*] è uguale alla radice di questa superficie. Così, quando si dice: ci sono 10 radici con il *mal*, noi prendiamo un quarto di dieci, cioè due e mezzo, e aggiungiamo ogni quarto a uno dei quattro lati della figura. Perciò al quadrato iniziale, che è la superficie AB, vengono aggiunte quattro figure uguali, la cui lunghezza è uguale alla radice della superficie AB

¹³ L'autore sottolinea anche lessicalmente questa ricerca del legame causale con il frequente ricorso al termine *qiyas*, reso in latino da Gerardo proprio con il termine *causa*.

¹⁴ Al-Khawarizmi denomina il poligono indicando le lettere corrispondenti agli angoli opposti.

e la larghezza è due e mezzo. Siano esse le figure H, I, K e C. Si è così costruita una figura con lati uguali, tutti ignoti, ridotta nei suoi quattro angoli di [un quadrato di] due e mezzo per due e mezzo. Per completare la quadratura della figura, sarà necessario aggiungere [alla figura che già abbiamo] quattro volte [il quadrato di] due e mezzo per due e mezzo, la cui somma fa venticinque. Ora noi sappiamo [per ipotesi] che la prima figura, che è il quadrato che rappresenta il *mal*, insieme con i quattro quadrati attorno ad esso, che rappresentano le dieci radici, è uguale a trentanove *dirhem*. Se dunque ad essi aggiungiamo venticinque, ossia l'equivalente dei quattro quadrati, agli angoli del quadrato AB, si completa allora la quadratura della figura più grande DE. Ora sappiamo che il totale è sessantaquattro e che un lato [del quadrato grande] è la sua radice, ossia otto. Se dunque noi sottraiamo da otto il doppio di un quarto di dieci, ossia cinque, a partire dalle due estremità del lato della figura grande, che è la superficie DE, allora il resto del lato sarà tre, che è il lato della prima figura, che è la figura AB, che è la radice del *mal*. Abbiamo in effetti dimezzato il numero di radici, moltiplicato la metà di dieci per se stessa, aggiunto il risultato al numero, che è trentanove, perché ci fosse possibile completare la costruzione della figura grande nei suoi quattro vertici; perché, se si moltiplica il quarto di un numero per se stesso e poi per quattro, questo prodotto sarà uguale alla metà del numero moltiplicata per se stessa ¹⁵. Di conseguenza, abbiamo semplicemente moltiplicato la metà delle radici per se stessa, invece di moltiplicare prima il quarto per se stesso e poi per quattro.

Ecco la figura:

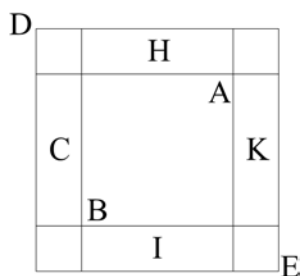


Fig. 3.5. – Prima dimostrazione caso 4.

¹⁵ Ossia $\left(\frac{1}{4} \frac{b}{2}\right) \cdot 4 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$. In termini algebrici il procedimento mostra che:

$$x^2 + bx = c \rightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 +$$

«Esiste anche un'altra figura che porta alla stessa dimostrazione. Sia data la superficie AB, che rappresenta il *mal*. Noi aggiungiamo dieci delle sue radici. Dimezziamo il dieci e si otterrà cinque con cui noi costruiamo due quadrilateri su due lati opposti del quadrato AB; siano C e N. La lunghezza di ciascuna delle due figure sarà cinque, che è la metà di dieci radici, mentre la larghezza è uguale al lato del quadrato AB. Allora ci rimane un quadrato a partire da uno dagli angoli del quadrato AB, che è [uguale a] cinque per cinque e cinque è la metà delle dieci radici che abbiamo aggiunto a ciascuno dei due lati del primo quadrato. Perciò sappiamo che il primo quadrato è il *mal*; che i due quadrilateri [costruiti] sui suoi lati equivalgono alle dieci radici; che insieme fanno trentanove e che, per completare il quadrato grande, ci vuole solo un quadrato di cinque per cinque, ossia venticinque. Lo aggiungiamo a trentanove, per completare il quadrato grande, che è la figura DE. In totale si ottiene sessantaquattro. Ne estraiano la radice, cioè otto, che è uno dei lati del quadrilatero grande. Se noi sottraiamo da questo la stessa quantità che prima abbiamo aggiunto, cioè cinque, otteniamo tre come differenza. Questo è il lato del quadrilatero AB, che rappresenta il *mal*, ed è la sua radice; e il *mal* è nove.

Questa è la figura:»

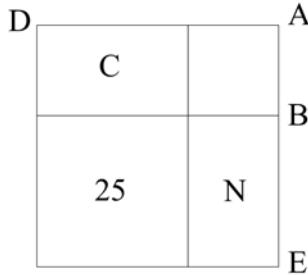


Fig. 3.6. – Seconda dimostrazione del caso 4.

Questa seconda dimostrazione ricorda la proposizione II.11 (rapporto aureo) degli *Elementi* di Euclide, che recita: «Tagliare una retta in modo che il rettangolo contenuto nel tutto e in uno dei segmenti sia uguale al quadrato sul restante segmento», proposizione ripresa in VI. 30 parlando di dividere una retta nel rapporto estremo e medio. Questo potrebbe confermare che già i Pitagorici erano in grado di fornire soluzione geometrica di equazioni del caso $a(a - x) = x^2$.

Una dimostrazione dello stesso caso è presente anche nell'opera di **Thabit ibn Qurra** del X secolo (Franci, 1979).

3.4.3.2. Dimostrazione del caso: «un mal e ventuno dirbem sono uguali a dieci radici»

«Noi rappresentiamo il *mal* con il quadrato di lato ignoto AD. A questo aggiungiamo un rettangolo, la cui larghezza equivale a uno dei lati di AD, ad esempio EN, la cui figura è EB. La lunghezza complessiva delle due figure è il lato CE. Noi sappiamo che la sua lunghezza è dieci, poiché, dal momento che ogni quadrato ha lati ed angoli uguali, uno dei lati moltiplicato per l'unità è la radice del quadrato; moltiplicato per due, è il doppio della radice. Quando si chiede, perciò: un *mal* e ventuno *dirbem* sono uguali a dieci radici, sappiamo che la lunghezza del lato EC è uguale a dieci, poiché la linea CD riproduce la radice del *mal*. Dividiamo il lato CE in due parti con il punto H e lo prolunghiamo fino al punto I: è evidente che il segmento EH è uguale al segmento HC; è altrettanto evidente che il segmento HI è uguale al segmento CD. Ora prolunghiamo il segmento HI di un segmento equivalente alla differenza tra CH e HI, in modo tale che da costruire un quadrato; chiamiamolo HK. Allora il segmento IK sarà uguale a KM; si costruisce dunque un quadrato con angoli e lati uguali, ossia MI. Ma si sapeva che il segmento IK misura cinque; i lati di MI hanno la stessa lunghezza: il quadrato è quindi venticinque, essendo il prodotto della moltiplicazione della metà del numero delle radici per se stessa, che è cinque per cinque, ossia venticinque. Ma era evidente che la figura EB rappresenta il ventuno, che abbiamo aggiunto al *mal*. Tracciamo sulla figura EB il segmento IK (che è uno dei lati del quadrato MI), che delimita la figura EI. Rimane la figura IA. Ora prendiamo dalla linea KM il segmento KL, uguale a HK; è evidente che il segmento IH è uguale a ML; il segmento LK, tolto da KM, è uguale a KH. Il quadrilatero MG è equivalente a EB, che misura ventuno. Ma la superficie MI misurava venticinque; poiché noi abbiamo tolto da MI le superfici EI ed MG, che sono ventuno, rimane una piccola superficie, ossia la superficie GK, che rappresenta la differenza tra venticinque e ventuno, cioè quattro. La sua radice, rappresentata dal segmento GH, uguale a HA, è due. Se sottrai quest'ultimo dal segmento HC, che è la metà delle radici, allora il resto del segmento è AC, ossia tre, radice del primo quadrato. Se aggiungi due al segmento CH, ossia metà del numero delle radici, ottieni sette, rappresentata dal segmento GC, radice di un quadrato più grande di questo quadrato e, se aggiungi ventuno a questo quadrato, allora la somma sarà uguale a dieci radici.

Questa è la figura.» (fig. 3.7.).

Questa dimostrazione geometrica contempla distintamente le due possibili soluzioni. Della prima è fornita una costruzione minuziosa e precisa, mentre della seconda si ha solo l'indicazione «se aggiungi ventuno a questo quadrato, [...]»; per la seconda l'autore si limita a dire che si ricava la maggiore delle radici aggiungendo GR a CG. Gerolamo Cardano nell'*Ars Magna* (1545) critica questa conclusione sommaria della dimostrazione: «*nam ille [al-Khawarizmi] immutata figura magis ex re ostendit, sed tamen obscurius*» (infatti egli, senza cambiare la

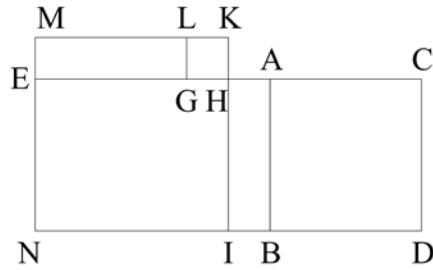


Fig. 3.7. – Dimostrazione del caso 5.

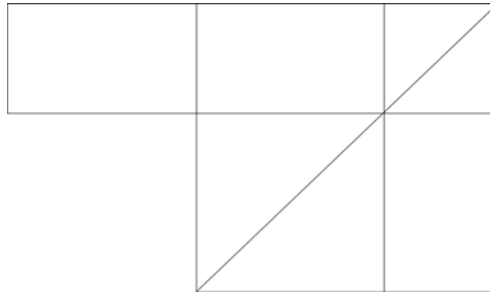


Fig. 3.8. – Proposizione 6 del libro II degli *Elementi* di Euclide.

figura, dimostra soprattutto di fatto, ma piuttosto oscuramente). «È tuttavia molto probabile che egli ne avesse la dimostrazione, dal momento che nelle versioni latine si trovano le figure relative» ipotizza la Roero (Roero, 2002): infatti nella figura presente nell'edizione critica della traduzione di Roberto di Chester realizzata da Karpinski (Karpinski, 1915) sono stati aggiunti dettagli al disegno. A questo proposito, Heeffer (Heeffer, 2006) ricorda che tale edizione si basa su un solo manoscritto (quello di Scheubel), che è più di una revisione dell'originale: pertanto il disegno potrebbe non risalire al manoscritto di Roberto. Boyer (Boyer, 1968) inoltre fa notare l'affinità di questo disegno (con opportune rotazioni) con quello della Proposizione 6 del II libro degli *Elementi* di Euclide «Se un segmento viene bisecato e a esso viene aggiunto in linea retta un altro segmento, il rettangolo contenuto dall'intero (con il segmento aggiunto) e dal segmento aggiunto, insieme al quadrato costruito su metà del segmento bisecato, è uguale al quadrato costruito sul segmento formato da metà del segmento bisecato e dal segmento aggiunto», che conduce alla soluzione dell'equazione $ax + x^2 = b^2$.

La Malisani (Malisani, 1996) invece rileva l'affinità tra questo caso e la proposizione 28 del II libro degli *Elementi* di Euclide che recita «Su una retta costruire un parallelogrammo uguale ad un poligono dato, mancante di un parallelogrammo simile ad un parallelogrammo dato. Occorre che il poligono dato non sia maggiore del poligono costruito sulla metà della retta data, e simile al poligono mancante.» «Questo teorema è l'equivalente geometrico della soluzione dell'equazione di secondo grado: $ax - \frac{b}{c}x^2 = S$, dove a è la retta, S è l'area del poligono dato, b e c sono i lati del parallelogrammo dato. La seconda parte: $S < \frac{a^2c}{4b}$ corrisponde alla limitazione necessaria perché le radici dell'equazione siano reali. Si costruisce il rettangolo AKFG di area S e tale che il suo rettangolo mancante sia D' simile a D . Ma $AKFG = ABHG - D'$; e D' , essendo simile a D , è equiesteso, ossia $\frac{bx^2}{c}$. Quindi $ax - \frac{b}{c}x^2 = S$. Così per costruire AKFG bisogna trovare AK e x tali che x soddisfi questa equazione.» (Malisani, 1996)

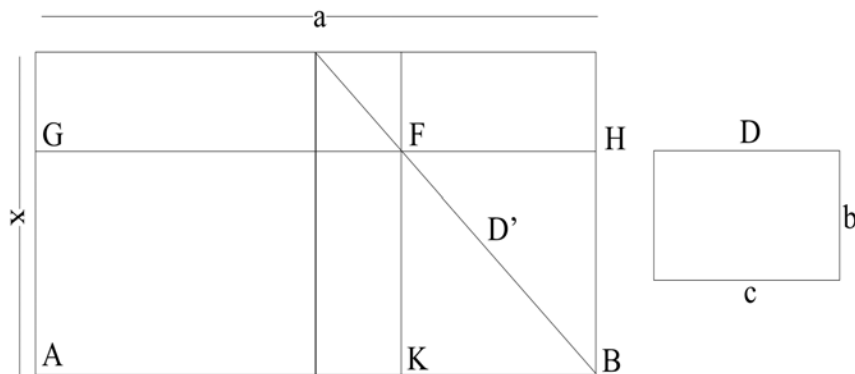


Fig. 3.9. – Proposizione 28 del libro II degli *Elementi* di Euclide.

3.4.3.3. Dimostrazione del caso: «tre radici e quattro numeri sono uguali a un quadrato»

«Rappresentiamo il *mal* con un quadrato, con lati (di lunghezza sconosciuta) ed angoli uguali. Sia il quadrato AD; questa figura equivale alle tre radici e quattro *dirhem* citati [nel problema]. Per un quadrato qualsiasi, uno dei lati, moltiplicato per uno, è la radice. Ora noi togliamo il quadrilatero ED da AD, e prendiamo uno dei suoi lati, cioè EC, come tre, che è il numero delle radici ed è uguale a

GD. È evidente che la figura EB rappresenta il quattro sommato alle radici. Ora dimezziamo il lato EC, che è uguale a tre radici, nel punto H; con questo segmento costruiamo il quadrato EI, che è il prodotto della metà delle radici (uno e mezzo) per se stessa, cioè due e un quarto. Prolunghiamo il segmento HI di una lunghezza uguale al segmento AE, sia [questo] il segmento IL. Il segmento HL sarà quindi uguale ad AH, e il segmento KN uguale a IL. Si ottiene un nuovo quadrato, con lati ed angoli uguali, che è la figura HM. Ma era già evidente che il segmento AC è uguale ad EG e che il segmento AH è uguale a EN. Il segmento HC risulta uguale a NG, e il segmento MN è uguale a IL. Dalla figura EB resta una superficie uguale a KL. Ma noi sappiamo che il quadrilatero AG rappresenta il quattro che è stato sommato alle tre radici. I quadrilateri AN e KL sono complessivamente uguali al quadrilatero AG, che rappresenta il numero quattro.

«È quindi evidente che il quadrilatero HM è la metà delle radici, ossia uno e mezzo, moltiplicata per se stessa, cioè due e un quarto, cui si aggiunge il quattro, rappresentato dai quadrilateri AN e KL. Rimane sul lato del primo quadrato grande AD, che rappresenta l'intero *mal*, la metà delle radici, ossia uno e mezzo, cioè il segmento HC. Se noi lo aggiungiamo al segmento AH, che è la radice del quadrato HM, essendo uguale a due e mezzo, e poi gli aggiungiamo il segmento HC, ossia la metà di tre radici (uno e mezzo), si ottiene come risultato quattro, che è la lunghezza del segmento AC, ossia la radice del *mal*, che è rappresentato dal quadrato AD.

«Questo è quello che bisognava dimostrare. Questa è la figura.

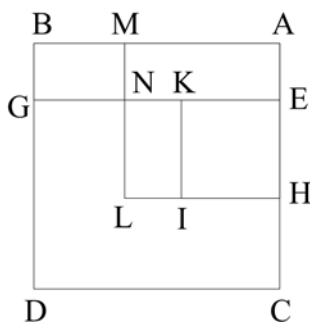


Fig. 3.10. – Dimostrazione del caso 6.

«Abbiamo dimostrato che ogni problema che richiede completamento e riduzione per la sua soluzione, ti riporta ad uno dei sei casi presentati nell'introduzione a questo libro. Ora ho anche esposto le dimostrazioni. Perciò tienile a mente.»

3.4.4. Le quattro operazioni

In questa sezione l'autore insegna alcune regole fondamentali delle equazioni algebriche per eseguire le operazioni con l'incognita, esponendo alcuni esempi in forma che potremmo definire, con terminologia attuale, parametrica, ossia indicando per il termine noto un valore generico, altre con casi numerici.

Ad esempio, al-Khawarizmi illustra come svolgere la moltiplicazione di monomi e di binomi, come ricondurre i termini simili a somme e differenze di monomi. Sono presentati anche i prodotti notevoli, dimostrati successivamente sempre con il supporto della geometria.

3.4.4.1. La moltiplicazione

È il paragrafo più dettagliato e lungo: parla di come moltiplicare le incognite tra loro:

1. quando sono da sole (*monomi*);
2. quando numeri sono sommati ad esse ($ax + b$) o sottratti da esse ($ax - b$);
3. quando sono sommate a numeri ($a + x$) oppure sottratte da essi ($a - x$).

Con la definizione di moltiplicazione (moltiplicare un numero per un altro significa ripetere il primo tante volte quante sono le unità del secondo), al-Khawarizmi tratta implicitamente il primo caso, poi illustra in modo compatto il secondo caso: $(ax \pm b)(cy \pm d)$; sono necessarie quattro operazioni. I termini noti saranno positivi o negativi a seconda della concordanza o discordanza di segno nella combinazione presente nel problema. Seguono alcuni esempi numerici facilmente comprensibili prima di passare ad introdurre l'operazione con l'incognita, applicata al terzo caso ed a casi «misti», come $(10 - x)x$ oppure $(10 + x)(x - 10)$.

3.4.4.2. L'addizione e la sottrazione

Paragrafo sintetico, dedicato a calcoli con radicali o incognite. Una differenza significativa rispetto alle consuetudini di oggi sta nel fatto che si preferisce evitare il coefficiente davanti ad un radicale: si vede chiaramente nell'esempio

$$20 - \sqrt{200} - (\sqrt{200} - 10) = 30 - 2\sqrt{200} = 30 - \sqrt{800}.$$

Si chiude il paragrafo con l'invito ad operare sempre in questo modo, sia con numeri sia con incognite, fatte le opportune distinzioni per il segno.

3.4.4.3. La divisione

Il paragrafo riguarda soprattutto l'uso di questa operazione con i radicali ed è costituito tutto e solo da esempi, prevalentemente numerici, salvo la generalizzazione

$$\frac{m\sqrt{p^2}}{\sqrt{q^2}} = \sqrt{\frac{m^2 p^2}{q^2}}.$$

Interessante notare come le frazioni improprie (non apparenti) siano ricondotte alla

somma di un intero più una frazione propria: ad esempio,

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}.$$

Vale la raccomandazione di procedere in questo modo con radici dal segno positivo o negativo.

3.4.4.4. Dimostrazioni degli esempi

Affrontando addizioni e sottrazioni tra segmenti, al-Khawarizmi insiste sulla necessità di rispettare sempre l'omogeneità dimensionale: ribadisce il fatto che non si può operare su grandezze differenti.

«Quanto alla dimostrazione di radice di duecento meno dieci sommato a venti più radice di duecento, è come segue:

«Il segmento AB è la radice di duecento; la parte da A al punto C è il dieci, allora il resto della radice di duecento corrisponderà al resto del segmento AB, ossia al segmento CB. Unisci poi con un segmento il punto B con il punto D, per rappresentare il venti, che è, perciò, il doppio del segmento AC, che rappresenta il dieci; [individua una parte di] segmento tra il punto B e il punto E uguale ad AB, che rappresenta anch'esso la radice di duecento; il resto di venti sarà uguale alla parte di segmento tra E e D. Poiché il nostro scopo è quello di aggiungere il resto della radice di duecento, dopo aver sottratto dieci, vale a dire il segmento CB, al segmento ED, che è venti meno la radice di duecento, noi togliamo dal segmento BE una parte uguale a CB, cioè il segmento GE. Ora è chiaro che il segmento AB, ossia la radice di duecento, è uguale al segmento BE, e che il segmento AC, che rappresenta il dieci, è uguale al segmento BG, ed anche che il resto del segmento AB, ossia il segmento CB, è uguale al resto del segmento BE, cioè GE. Aggiungiamo perciò questo segmento GE ad ED; sarà evidente che si è tolta dal segmento BD, ossia dal venti, una porzione uguale ad AC, che è il dieci, ovvero il segmento BG e che rimane il segmento GD, che è uguale a dieci. Questo è ciò che dovevamo dimostrare. Ecco la figura.

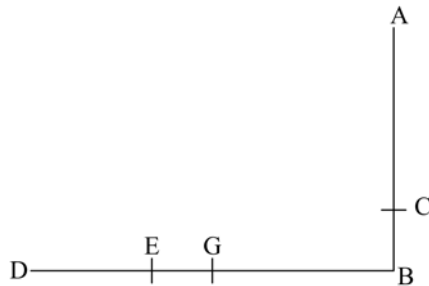


Fig. 3.11. – Dimostrazione della somma di radicali.

«Quanto alla dimostrazione che la radice di duecento meno dieci, sottratta da venti meno la radice di duecento, è come segue: il segmento AB rappresenta la radice di duecento e la parte da A al punto C rappresenta il dieci citato nell'esempio. Ora tracciamo un segmento dal punto B al punto D, per rappresentare il venti. Poi tracciamo da B ad H, un segmento della stessa lunghezza del segmento che rappresenta la radice di duecento ed è uguale al segmento AB. È evidente che il segmento CB è ciò che resta della radice di duecento, dopo che è stato sottratto il dieci e che il segmento ED è ciò che resta dal venti, dopo aver sottratto la radice di duecento. dal segmento HD. Tracciamo dal punto B un segmento fino al punto G, uguale in lunghezza al segmento AC, che rappresenta il dieci. Allora tutto il segmento GD è uguale a GB, più BD. Ora è chiaro che la somma totale ammonta a trenta. Ora togliamo dal segmento ED una parte uguale a CB, cioè EH; poi è chiaro che il segmento HD è il resto del segmento GD, che rappresenta il trenta. Vediamo anche che il segmento BE è la radice di duecento e che il segmento risultante dalla somma di GB più BC è parimenti la radice di duecento. Poiché il segmento EH è ora uguale a CB, è evidente che la parte sottratta al segmento GD, che rappresenta il trenta, è uguale a due volte la radice di duecento, ma due radici di duecento è uguale alla radice di ottocento. Questo è ciò che dovevamo dimostrare. Ecco la figura.».

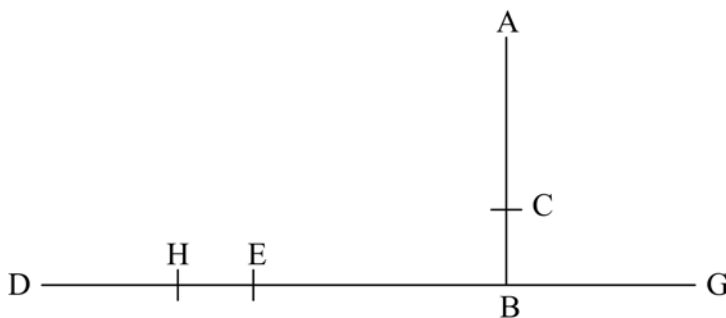


Fig. 3.12. – Dimostrazione della differenza di radicali.

«Per cento e un quadrato meno venti radici più cinquanta e dieci radici meno due quadrati, non è possibile utilizzare alcuna figura, poiché in questo problema compaiono tre tipi diversi, cioè quadrati, radici e numeri, e [non c'è] niente corrispondente ad essi con cui possano essere rappresentati graficamente. Noi avevamo tentato di costruire una dimostrazione anche per questo caso, ma non grafica. Quanto alla sua necessità, è evidente anche attraverso una spiegazione verbale. Sai per ipotesi di avere cento e un quadrato meno venti radici. Quando hai aggiunto a questo cinquanta e dieci radici, il risultato è centocinquanta

più un quadrato meno dieci radici, poiché le dieci radici si sono sommate algebricamente alle venti negative. Fatto questo, restano centocinquanta e un quadrato meno dieci radici. Con il cento era presente un quadrato. Così, poiché tu hai sottratto da cento più un quadrato i due quadrati meno il cinquanta, allora un quadrato si annulla con un quadrato e resta un quadrato. Il risultato è centocinquanta meno un quadrato meno dieci radici. Questo è ciò che dovevo dimostrare»

3.4.5. I sei problemi

«Ho presentato prima i procedimenti di calcolo; le sue modalità sono [presentate attraverso] sei problemi che ho ideato come esempi dei sei casi presentati nell'introduzione al mio libro e ho ricordato che il calcolo di *al-jabr* e *al-muqabalab* deve condurti ad uno di questi procedimenti. A questo ho aggiunto problemi di facile comprensione, leggeri da affrontare e sufficientemente significativi, se l'Altissimo lo vuole».

Ogni equazione rappresentativa di un problema viene metodicamente riportata ad uno dei casi presentati e per la sua risoluzione si utilizzano due operazioni basilari: *al-jabr* (completamento, riempimento; in latino *restauratio*¹⁶), che consiste nell'eliminare i termini di segno negativo, aggiungendo termini positivi uguali nei due membri dell'equazione, e *al-muqabalab* (opposizione, bilanciamento; in latino *oppositio*) che permette di sommare algebricamente i termini dello stesso grado nei due membri.¹⁷ Il coefficiente del termine di secondo grado, come si è detto, viene spesso ridotto all'unità con l'operazione *al-batt*, applicata soprattutto nella risoluzione delle equazioni dei casi 4 e 5. Le espressioni *al-jabr* e *al-muqabalab* compaiono anche nei titoli di opere di matematici islamici posteriori; il loro significato, perdendo il preciso riferimento ad un'operazione, si estende in seguito a indicare i testi sulla risoluzione di equazioni. Esse vengono riprese in Europa a partire da Fibonacci e mantenute fino a tutto il XV secolo, sia in manuali manoscritti delle scuole d'abaco sia più tardi in testi a stampa, nel significato esteso. La locuzione *al-muqabalab* cessa di essere usata dopo il XV secolo.

¹⁶ Boyer (Boyer, 1968) fa notare che l'idea di riordino implicita nel vocabolo *al-jabr* è sopravvissuta nel lessico spagnolo almeno fino a Cervantes. Nel capitolo XV del romanzo *El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha* (1605) infatti si fa riferimento ad un algebrista come ad un esperto nella riduzione di fratture e lussazioni. Anche nella lingua araba come precisa Saliba (Saliba, 1972), la radice *jabara* ha un doppio significato: 'ridurre (una frattura)' oppure 'forzare, costringere'.

¹⁷ Questo comprende anche l'elisione di termini uguali nei due membri dell'equazione.

In definitiva, il procedimento presentato dall'autore per la soluzione di un problema si può sintetizzare nei seguenti passi:

1. Tradurre il problema in un'equazione algebrica;
2. Ricondurre l'equazione ad uno dei casi noti, ossia ad una sorta di *forma normale* (Rashed, 1997);
3. Applicare l'algoritmo appropriato per arrivare alla soluzione.

I sei casi completano tutte le possibilità di equazioni lineari di secondo grado con radici reali positive, pertanto lo studente poteva certamente trovare la modalità più idonea per risolvere il proprio problema.

3.4.5.1. Primo problema

«Tu hai diviso dieci in due parti; hai moltiplicato la prima delle due parti per l'altra; poi hai moltiplicato la prima delle due per se stessa in modo che il prodotto sia il quadruplo del prodotto della prima delle parti per l'altra ¹⁸.

«Si ricava così: poni una delle due parti uguali alla cosa e l'altra uguale a dieci meno una cosa: moltiplica la cosa per dieci meno la cosa; fa dieci cose meno un quadrato. Poi moltiplicalo per quattro, perché l'esempio dice che è il quadruplo. Il risultato sarà il quadruplo del prodotto di una parte per la seconda, ossia quaranta cose meno quattro quadrati. Dopo tu moltiplichi una cosa per una cosa, vale a dire una parte per se stessa. Si ottiene allora un quadrato uguale a quaranta cose meno quattro quadrati. Riduci ora di quattro quadrati [*al-jabr*] e aggiungili al quadrato unitario [*al-muqabalab*]. Allora [l'equazione] è: quaranta cose sono uguali a cinque quadrati e un quadrato è uguale a otto radici [*al-battl*], cioè a sessantaquattro; la radice di questo è otto e questa è una delle due parti, in particolare quella che viene moltiplicata per se stessa. Il complemento a dieci è due che è l'altra parte. Questo problema ti riconduce ad uno dei sei casi, in particolare a quello *quadrati uguali a radici*. Ricordalo».

3.4.5.2. Secondo problema

«Hai diviso dieci in due parti e hai moltiplicato ciascuna delle parti per se stessa; poi hai moltiplicato dieci per se stesso in modo che il prodotto di dieci per se stesso sia uguale a due volte e sette noni il prodotto di una delle due parti moltiplicata per se stessa o uguale a sei volte e un quarto il prodotto dell'altra moltiplicata per se stessa ¹⁹.

«Lo si ricava così: supponi che una delle parti sia una cosa e l'altra dieci meno una cosa. Tu moltiplichi una cosa per se stessa ed è un quadrato; poi per

¹⁸ $x^2 = 4x(10 - x)$

¹⁹ $10^2 = x^2 \left(2 + \frac{7}{9} \right); 10^2 = \left(6 + \frac{1}{4} \right) (10 - x)^2$

due e sette noni, che fa due quadrati e sette noni di un quadrato. Tu poi moltiplichi dieci per dieci; fa cento uguale a due quadrati e sette noni di un quadrato. Riducilo ad un solo quadrato, attraverso la divisione per nove venticinquesimi, cioè un quinto per quattro quinti di un quinto, prendi ora anche il quinto di cento e i quattro quinti del quinto di cento; questo fa trentasei, che è uguale ad un quadrato. Prendine la radice, sei, che è una delle due parti; e di conseguenza l'altra è quattro. Questo problema ti ha ricondotto ad uno dei sei casi, in particolare a quello *dei quadrati sono uguali a un numero.*»

3.4.5.3. Terzo problema

«Hai diviso dieci in due parti, poi hai diviso la prima per la seconda e il quoziente ottenuto è quattro ²⁰.

«Si ricava così: poni che una delle parti sia una cosa e l'altra dieci meno una cosa. Poi dividi dieci meno una cosa per una cosa in modo da ottenere quattro. Tu sai ²¹ che, se moltiplichi il quoziente per il divisore, ritrovi la somma che era stata divisa. Nel presente problema, il quoziente è quattro e il divisore è una cosa. Moltiplica perciò quattro per una cosa; il risultato è quattro cose, che sono uguali alla somma da dividere, che è dieci meno una cosa. Ora riduci la cosa, che aggiungi alle quattro cose: abbiamo cinque cose uguali a dieci; perciò una cosa è uguale a due, e questa è una delle due parti. Questo problema ti ha ricondotto ad uno dei sei casi, in particolare a quello *radici uguali a un numero.*»

3.4.5.4. Quarto problema

«Hai moltiplicato un terzo di una cosa più un *dirhem* per un quarto della cosa e un *dirhem* e il prodotto è venti ²².

«Si ricava così: moltiplica un terzo di una cosa per un quarto di una cosa; è un mezzo di un sesto di un quadrato. Inoltre, moltiplica un *dirhem* per un terzo di una cosa, è un terzo di una cosa; e un *dirhem* per un quarto di una cosa, è un quarto di una cosa; e un *dirhem* per un *dirhem* fa un *dirhem*. Tutto questo è: la metà di un sesto di un quadrato, e un terzo di una cosa, e un quarto di una cosa, e un *dirhem*, è uguale a venti *dirhem*. Ora sottrai un *dirhem* da questi venti *dirhem*, rimangono diciannove *dirhem*, uguali alla metà di un sesto di un quadrato, e un terzo di una cosa, e un quarto di una cosa. Ora rendi unitario il [coefficiente del] quadrato: esegui questo moltiplicando tutto quello che hai da

²⁰ $\frac{10 - x}{x} = 4$

²¹ Non serve porre la condizione $x \neq 0$, dal momento che $x \in \mathbb{R}^+$.

²² $\left(\frac{1}{3}x+1\right)\left(\frac{1}{4}x+1\right) = 20.$

venti. Perciò hai un quadrato e sette radici, uguali a duecentoventotto *dirhem*. Dimezza il numero delle radici e moltiplicalo per se stesso; è dodici e un quarto. Addiziona questo al numero, cioè a duecentoventotto; la somma è duecentoquaranta e un quarto. Estrai la radice di questo; è quindici e mezzo. Sottrai da questo la metà delle radici, cioè, tre e mezzo, rimane dodici, che è il quadrato richiesto. Questo problema ti riconduce ad uno dei casi, in particolare a quello *quadrati e radici uguali a numeri*.

3.4.5.5. Quinto problema

«Tu dividi dieci in due parti; moltiplichi ciascuna di queste per se stessa e sommi i prodotti tra loro; la somma fa cinquantotto *dirhem* ²³.

«Si ottiene così: supponi che una delle due parti sia una cosa e che l'altra sia dieci meno una cosa. Moltiplica dieci meno una cosa per se stesso, fa cento e il quadrato meno venti cose. Poi moltiplica una cosa per se stessa; è un quadrato. Sommale. La somma fa cento, più due quadrati meno venti cose, che sono uguali a cinquantotto *dirhem*. Ora prendi le venti cose negative dal cento e dai due quadrati, e aggiungile ai cinquantotto; fa cento più due quadrati uguali a cinquantotto *dirhem* più venti cose. Riduci questo a un solo quadrato, prendendo la metà di tutto quello che hai. Fa cinquanta *dirhem* più un quadrato, che sono uguali a ventinove *dirhem* e dieci cose. Riduci questo togliendo ventinove da cinquanta; rimane ventuno più un quadrato uguale a dieci cose. Dimezza il numero delle radici, che è cinque; moltiplicalo per se stesso, fa venticinque; sottrai da questo i ventuno che sono sommati al quadrato, quello che rimane è quattro. Estrai la radice, che è due, e sottraila dalla metà delle radici, che è cinque; rimane tre, che è una delle parti; l'altra è sette. Questo problema ti ha ricondotto ad uno dei sei casi, in particolare a *quadrati e numeri uguali alle radici*.»

3.4.5.6. Sesto problema

«Moltiplichi un terzo di un valore per un quarto di un valore, per ottenere un valore e ventiquattro *dirhem* ²⁴.

«Si calcola così: chiama cosa il valore; poi moltiplica un terzo di una cosa per un quarto di una cosa; è la metà di un sesto di un quadrato, uguale a una cosa più ventiquattro *dirhem*. Moltiplica questa metà di un sesto di un quadrato per dodici, per completare il tuo quadrato, e moltiplica una cosa per dodici, che fa dodici cose; e ventiquattro per dodici: [il risultato dell'intera operazione]

²³ $x^2 + 10(10 - x)^2 = 58$.

²⁴ $\left(\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{4}x\right) = x + 24$.

sarà duecentottantotto *dirhem* più dodici radici uguali a un quadrato. Dimezza le radici; fa sei, che tu moltiplichi per se stesso; aggiungilo a duecentottantotto, sarà trecentoventiquattro. Da questo estrai la radice, che è diciotto; sommalo alla metà delle radici, che era sei; la somma è ventiquattro, e questo è il valore cercato. Questo problema ti ha ricondotto ad uno dei sei casi, in particolare a *radici e numeri uguali a quadrati*.»

3.4.6 Altri problemi

Al-Khawarizmi prosegue poi la sua trattazione con altri trentaquattro problemi (riportati nella *tab. 3.1.*), che possono essere catalogati, secondo Oaks e Alkhateeb (Oaks e Alkhateeb, 2005) in tre gruppi, sulla base del loro enunciato: tipo «10», «M» e «D». Fa eccezione il problema 7 che tratta di grano e orzo ed è stato probabilmente aggiunto ²⁵ da altri in un secondo momento.

Il testo dei problemi di tipo 10 incomincia con «Dividi il dieci in due parti...», cui segue una condizione che le parti devono soddisfare. Il testo dei problemi di tipo M riguarda invece la ricerca di un *mal*. I problemi di tipo D hanno invece a che fare con un certo numero di *dirhem* divisi tra persone.

Tabella 3.1. – Altri problemi nell'Algebra

NUMERO PROBLEMA	GRUPPO SECONDO OAKS E ALKHATEEB	EQUAZIONE RISOLVENTE
1	10	$(10 - x)x = 21$
2	10	$(10 - x)^2 - x^2 = 40$
3	10	$(10 - x^2) + x^2 + (10 - x) - x = 54$
4	10	$\frac{10 - x}{x} + \frac{x}{10 - x} = 2 + \frac{1}{6}$
5	10	$\frac{5x}{2(10 - x)} + 5x = 50$

²⁵ Anbouba (Anbouba, 1978) ritiene che si debba espungere dal momento che non è presente né nel manoscritto di Berlino (5955,6) né nella traduzione di Libri (Libri, 1838). Anche Rashed dubita dell'autenticità.

NUMERO PROBLEMA	GRUPPO SECONDO OAKS E ALKHATEEB	EQUAZIONE RISOLVENTE
6	10	$(10 - x)^2 = 81x$
7	Grano o orzo	$nx + (10 - n)y = 10 - 2n + x - y $ $n \in \mathbb{N}$
8	M	$\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$
9	10	$10x = (10 - x)^2$
10	10	$\frac{x(10 - x)}{10 - 2x} = 5 + \frac{1}{4}$
11	M	$\frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{5} = \frac{x}{7}$
12	M	$\frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{5} = \frac{4}{5}x$
13	M	$4x^2 = 20$
14	M	$\frac{x^2}{3} = 10$
15	M	$4x^2 = \frac{x}{3}$
16	M	$x^2x = 3x^2$
17	M	$4x \cdot 3x = x^2 + 44$
18	M	$4x \cdot 5x = 2x^2 + 36$
19	M	$x \cdot 4x = 3x^2 + 50$
20	M	$x^2 + 20 = 12x$
21	M	$\left[x - \left(\frac{x}{3} + 3 \right) \right]^2 = x$

NUMERO PROBLEMA	GRUPPO SECONDO OAKS E ALKHATEEB	EQUAZIONE RISOLVENTE
22	M	$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = x$
23	D	$\left(\frac{x}{3} + 1\right) - \left(\frac{x}{4} + 2\right) = x + 13$
24	D	$\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + x} = 2x$
25	M	$\left(x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x - 4\right)^2 = x + 12$
26	M	$x \cdot \frac{2}{3}x = 5$
27	M	$\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$
28	D	$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$
29	M	$\frac{2}{3}x^2 = 5$
30	M	$x^2 \cdot 3x = 5x^2$
31	M	$\left(x^2 - \frac{1}{3}x^2\right)3x = x^2$
32	M	$\frac{x^2 - 4x}{3} = 4x$
33	M	$\sqrt{x^2 - x} + x = 2$
34	M	$(x^2 - 3x)^2 = x^2$

3.4.7. Transazioni commerciali

«Sappi che tutte le transazioni tra le persone (di vendita, acquisto, cambio, salario e tutte le altre) prevedono sempre due condizioni e quattro numeri, indicati da chi pone il problema; ossia, *quantità da valutare*, *tasso*, *prezzo* e *quantità valutata*. Il numero che esprime la quantità da calcolare non è proporzionale [= è inversamente proporzionale] a quello che esprime il prezzo, il numero del tasso non è proporzionale [= è inversamente proporzionale] a quello della quantità calcolata. Tra questi quattro numeri tre sono sempre conosciuti e noti, il quarto è l'incognita, che nelle parole di chi pone il problema è 'quanto?' ed è l'oggetto del problema. [Il metodo di] risoluzione in questo esempio è questo: usa i tre numeri dati; due di essi devono necessariamente essere inversamente proporzionali l'uno all'altro. Tu moltiplichi l'uno per l'altro i due numeri noti inversamente proporzionali e dividi il prodotto per il terzo numero, che è inversamente proporzionale rispetto all'incognita. Il quoziente è l'incognita, richiesta da chi ha posto il problema; ed è inversamente proporzionale al divisore.

«**Esempi.** Per il primo caso: Se ti viene detto, 'dieci per sei: quanto avrai per quattro?'; nel testo del problema, dieci è la *quantità da valutare*; sei è il *tasso*; e 'quanto avrai?' è l'*incognita*, ossia la *quantità valutata*; e quattro è il numero corrispondente al *prezzo*. Così, il numero della *quantità da valutare*, che è dieci, è inversamente proporzionale al numero del *prezzo*, cioè quattro. Moltiplica, perciò, dieci per quattro, ossia i due numeri noti inversamente proporzionali; il prodotto è quaranta. Dividilo per l'altro numero noto, che è il *tasso*, ossia sei. Il quoziente è sei e due terzi, che è l'*incognita*, e che nelle parole di chi pone il problema è 'quanto?'; è la *quantità valutata* ed è inversamente proporzionale a sei, che è il *tasso*.

«Per il secondo caso: Queste sono le parole di chi pone il problema: 'dieci per otto, quanto è il prezzo di quattro?'. Potrebbe anche esprimersi così: 'Per quattro di questi qual è il prezzo?' Dieci è il valore della *quantità da valutare*, che è inversamente proporzionale al *prezzo*, che è l'*incognita* indicata dalla parola 'quanto' del problema. Otto è il numero del *tasso* ed è inversamente proporzionale alla *quantità valutata*, che è nota, ossia quattro. Moltiplica ora tra loro i due numeri noti inversamente proporzionali, cioè quattro per otto. Il prodotto è trentadue. Dividilo per l'altro numero noto, che è quello della *quantità da valutare*, cioè dieci. Il quoziente è tre e un quinto; questo è il (numero del) *prezzo*, ed è inversamente proporzionale a dieci che è il divisore.

«Così sono tutti i calcoli commerciali tra le persone e le modalità di calcolo, se l'Altissimo vuole. Se qualcuno domandasse 'si assume un operaio per dieci *dirbem* al mese; ha lavorato sei giorni; quanto gli spetta?' Allora tu sai che sei giorni sono un quinto di un mese; e che la sua parte di *dirbem* deve essere proporzionale alla parte di mese in cui ha lavorato. Tu lo calcoli così: le sue parole 'un mese', ossia trenta giorni, sono la quantità valutata; 'dieci *dirbem*' è il *tasso*; 'sei giorni' la *quantità da valutare* e 'quanto gli spetta' il *prezzo*. Moltiplica il

tasso, che è dieci, per la *quantità valutata*, che è proporzionale ad esso ed è sei; il prodotto è sessanta. Dividi questo per trenta, che è il numero noto della *quantità da valutare*. Il quoziente è due *dirhem* e questo è il *prezzo*.

«Questa è la procedura su cui si basano tutte le transazioni inerenti cambio o misure o pesi, se vuole l'Altissimo.»

Viene introdotta qui la regola nota come **regola del tre** (o del quarto proporzionale, secondo la terminologia attuale), ossia la tecnica per trovare un numero posto in relazione di proporzionalità con altri tre numeri. La regola è presente anche in Euclide (*Elementi*, libro VI, prop. 12) ed è collocata strettamente nell'ambito della geometria.

3.4.8. Misure

Questa sezione illustra concetti di geometria, descrivendo enti geometrici anche con ricorso allo strumento grafico: si parte dalla definizione di misura come superficie per continuare con l'indicazione delle formule per calcolare l'area delle principali figure piane regolari: quadrato, triangolo, cerchio (con una breve discussione sull'approssimazione di π a $3 + \frac{1}{7}$), segmento circolare a una base (superficie racchiusa tra un arco la corda sottesa); ed i volumi di poliedri regolari (parallelepipedi, coni, piramidi). Viene ricordata la proprietà dei triangoli rettangoli nota in Occidente come Teorema di Pitagora, con dimostrazione geometrica diversa sia da quella euclidea sia da quella, pur posteriore, di **Bhaskara II**²⁶.

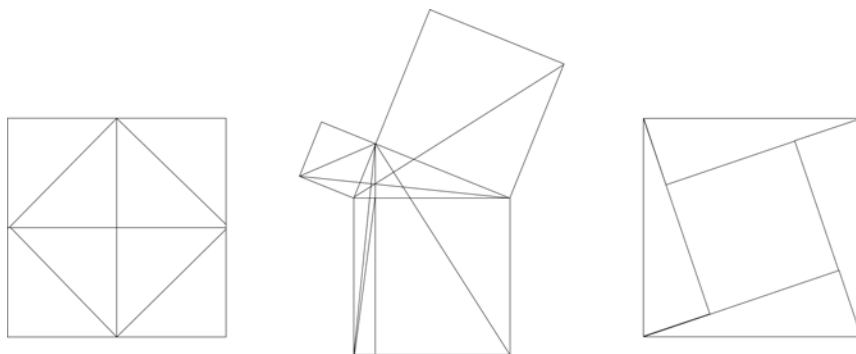


Fig. 3.13. – Dimostrazione del teorema di Pitagora
(a) al-Khwarizmi; (b) Euclide; (c) Bhaskara II.

²⁶ La stessa costruzione è usata da Platone (Menone, 84d-85c) per la duplicazione del quadrato.

Vengono poi classificati i quadrilateri secondo una casistica basata sulle combinazioni di lati ed angoli:

1. Lati uguali ed angoli retti;
2. Lati opposti uguali ed angoli retti;
3. Lati uguali ed angoli non retti (*rombo*);
4. Lati opposti uguali ed angoli non retti (*romboide*);
5. Lati ed angoli diversi.

Per ciascuno dei primi quattro gruppi si fornisce un esempio per il calcolo dell'area.

Analogamente sono trattati i triangoli, classificati in acutangoli, ottusangoli, rettangoli, con esempi di calcolo delle aree per ogni tipo, come negli *Elementi*.

Seguono le indicazioni per calcolare l'area del cerchio e la risoluzione di due problemi rispettivamente su volume di un tronco di piramide e lato del massimo quadrato inscritto in un triangolo isoscele. Boyer ritiene che quest'ultimo esempio sia una prova della dipendenza eroniana dell'opera di al-Khawarizmi, data l'identità del disegno e la coincidenza delle dimensioni usate dai due autori. Rashed (Rashed, 2007) obietta invece che il procedimento seguito dai due è diverso: Erone opera in modo geometrico-aritmetico, mentre il metodo di al-Khawarizmi è algebrico-geometrico.

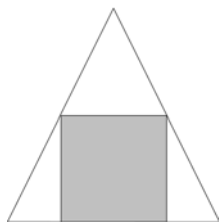


Fig. 3.14. – Quadrato inscritto in un triangolo isoscele.

In entrambi i problemi del testo arabo si parte da una contestualizzazione nel mondo reale (volume di un pilastro e superficie di terreno), peraltro piuttosto generica, come si era visto anche per i trentaquattro problemi algebrici.

3.4.9. Eredità

Questa parte, interamente dedicata alle questioni testamentarie e di eredità, tratta di diritto coranico, che è vincolato da regole articolate in una fitta e variegata casistica. I quesiti sono suddivisi in gruppi di crescente difficoltà. Dapprima sono posti quelli la cui soluzione permette una più semplice ed immediata

applicazione delle norme coraniche. Ad esempio, il primo problema proposto viene trattato come di seguito si vede.

Un uomo muore e lascia due figli. Lascia in legato ad un altro uomo un terzo dei suoi averi. Egli lascia un capitale di dieci *dirhem* e vanta un credito di dieci *dirhem* da uno dei figli. Si risolve il problema secondo i principi della spartizione, ossia prima il figlio deve pagare il suo debito di dieci *dirhem* e poi si dividono i venti *dirhem*, un terzo all'amico ed un terzo rispettivamente ai due figli.

Secondo il diritto islamico, valgono però le seguenti regole:

1. la differenza tra il debito del figlio e la quota legittima dello stesso figlio sarà considerata come una donazione al figlio;
2. la donazione precede l'eredità e l'eredità precede il calcolo della quota legittima.

Al-Khawarizmi pone x come quota legittima di ciascun figlio. Il figlio con il debito deve versare nel capitale un importo pari alla sua quota legittima nella divisione (cioè x). Del debito vengono quindi versati x *dirhem* e l'ammontare dell'asse ereditario sale a $10 + x$ *dirhem*, L'amico riceve dunque $\frac{10 + x}{3}$. In conclusione, per calcolare x , si può scrivere l'equazione $\frac{(10 + x)}{3} + 2x = 10 + x$, da

cui $x = 5$. Il figlio debitore versa perciò 5 *dirhem*, che si vede restituiti; il fratello e l'amico ricevono ciascuno 5 *dirhem*.

Questo è uno dei problemi di base; il crescere della difficoltà nelle sezioni successive è dato dall'aumentare del numero di figli o parenti, dei gradi di parentela, delle richieste di pagamento precedenti al computo della quota legittima etc., il tutto dettagliatamente regolamentato dal Corano.

3.4.10. Calcolo dei lasciti

La sezione riguarda ancora questioni ereditarie, complicate ulteriormente da promesse non mantenute in vita o da morti premature di un coniuge rispetto all'altro, da matrimoni in punto di morte e da malattie. Rosen (Rosen, 1831) ritiene che si tratti della parte meno corretta dal punto vista matematico per l'estrema arbitrarietà di alcune assunzioni nel passaggio dal problema alla sua traduzione in forma di equazione algebrica; ed è inoltre convinto che tale inconsistenza dipenda dalla complessità delle norme sui cui doveva modellare la soluzione del problema.

3.5. LA LINGUA DELL'ALGEBRA

Il recente studio di Rashed (Rashed, 2007) introduce ed affronta a più livelli la questione dello stile dell'autore. La prima analisi è di tipo sintattico: Rashed rileva l'assenza di strutture di origine indo-europea, segno che il matematico scrisse il trattato direttamente in arabo, senza alcuna influenza sintattica delle traduzioni dal greco.

Sulla base dell'analisi lessicale, poi, il trattato può essere suddiviso in quattro parti:

- **Prologo:** questa parte viene definita da Rashed «une pièce littéraire» per la sua levatura stilistica. La scelta di al-Khawarizmi di sfoggiare le sue doti retoriche dipende dal fatto che il prologo serve a presentare al pubblico lo scopo dell'opera.
- **Teoria e pratica delle equazioni:** pur mantenendosi formalmente corretto, il lessico registra una maggiore varietà, in conformità alle esigenze del contenuto, dal momento che vengono introdotti i termini tecnici per numeri ed operazioni. Essi non vengono inventati, ma ripresi dalla tradizione matematica oppure dalla lingua quotidiana, come *shay* (cosa), che assume il significato tecnico di incognita.
- **Geometria:** il lessico di questa parte è invece quello tipico della geometria piana (termini che indicano i poligoni, gli angoli, il cerchio, le aree), molto probabilmente suggerito dalla traduzione degli *Elementi* di Euclide.
- **Problemi di eredità:** è la parte meno omogenea dal punto di vista lessicale; compaiono termini tecnici matematici, aritmetici e giuridici.

3.6. LA QUESTIONE DELLE FONTI DELL'ALGEBRA

L'*Algebra* di al-Khawarizmi viene comunemente considerata un vero e proprio spartiacque nella storia della matematica e della scienza in generale. Alcuni (Gandz, 1936) addirittura ritengono che il nome di padre dell'algebra possa essere attribuito più propriamente ad al-Khawarizmi che ad altri come Diofanto, dal momento che il matematico arabo fu il primo a insegnare l'algebra in una forma elementare, preoccupato di «mettere la scienza alla portata della massa» (Anbouba, 1978), mentre Diofanto si è occupato piuttosto di teoria dei numeri ad un livello più elevato. Nella ricerca delle fonti di al-Khawarizmi, cominciata nel 1797 ad opera di Cossali (Cossali, 1797), non si può fare a meno di ricordare che l'origine dell'algebra risale ad un'epoca remota, ben più antica sia di Diofanto sia di al-Khawarizmi, ossia all'antico Egitto ed a Babilonia, dove già nel 2000 a.C. si scrivevano manuali di aritmetica, algebra e geometria.

Nella complessa e annosa questione delle fonti di al-Khawarizmi, si profilano sostanzialmente tre scuole di pensiero: una sostiene l'influenza indiana, la

seconda quella greca e la terza punta su una tradizione locale di matrice siriano-persiana. Gli studiosi più recentemente però optano per posizioni sincretistiche o tendono, soprattutto quelli di area islamica, ad enfatizzare l'originalità di al-Khawarizmi, sottovalutando o almeno circoscrivendo il contributo della matematica precedente, specialmente se non in lingua araba.

3.6.1. Le fonti indiane

Il lessico matematico indiano, spiega Gandz (Gandz, 1936), offre significativi punti di contatto con le corrispondenti espressioni arabe: il vocabolo indiano che indica una quantità positiva (*dbanam*), è l'esatto corrispettivo di *mal*, dal momento che significa «quantità di denaro, proprietà». La parola indiana *rupa* indica una moneta e il numero, proprio come *dirhem*; l'incognita, come si è visto, è denominata *yavat tavat*, ossia *tanto quanto* o *qualcosa* proprio come *shay*; *mala* (radice) corrisponde a *jadhr*. Questo parallelismo potrebbe far pensare, oltre che ad una stretta comunicazione fra i due popoli, anche ad una fonte comune, da cui entrambi potrebbero aver attinto la terminologia, date anche le differenze contenutistiche. Su questa questione gli studiosi sono stati molto divisi: a favore dell'influsso indiano si sono schierati Cossali (Cossali, 1797), Colebrooke (Colebrooke, 1817) e Libri (Libri, 1838), mentre contro di esso si sono espressi Rodet (Rodet, 1878), Sédillot (Sédillot, 1854) e Hankel (Hankel, 1872).

Rosen (Rosen, 1831) ha invece mostrato i legami tra l'opera di al-Khawarizmi e il (posteriore) *Lilavati* di Bhaskara II. Rashed (Rashed, 2007) discute accuratamente tutti i nessi fra l'opera degli Indiani, in particolare Brahmagupta, e quella di al-Khawarizmi, traendone alcune considerazioni. Innanzitutto, nella scrittura delle equazioni, i due autori si differenziano nettamente; prendendo ad esempio il caso $x^2 + 10 = 39$, il matematico indiano avrebbe scritto i due membri dell'equazione in modo omogeneo:

ya v 1 ya 10 ru 0
ya v 0 ya 0 ru 39

La differente scrittura comporta evidentemente conseguenze sull'applicazione del metodo risolutivo: al-Khawarizmi utilizza il caso conforme all'equazione; Brahmagupta invece applica una formula valida per tutte le equazioni di secondo grado, che non prevede il vincolo $a, b, c > 0$, basata sul completamento del quadrato.

Infine, Brahmagupta risolve riordinando l'equazione nella forma $a^2 + bx = c$ (indipendentemente dal segno dei coefficienti e del termine noto), mentre al-Khawarizmi indica una serie di passaggi, compresa la normalizzazione del coefficiente del quadrato, per ricondurre l'equazione ad uno dei sei casi canonici. Come si vede, la distanza fra le due tecniche è molta.

3.6.2. Le fonti greche e greco-indiane

Il principale sostenitore della teoria dell'influsso geometrico greco fu **Moritz Cantor** (1829-1920), che trasse le proprie conclusioni non attraverso un'indagine sulle affinità contenutistiche fra le opere di Euclide e al-Khawarizmi, ma piuttosto sulla base di osservazioni di natura alfabetica (Cantor, 1907). Egli infatti notò che tra le lettere utilizzate nei disegni di al-Khawarizmi mancavano sistematicamente la *waw* e la *jod*, inutilizzate anche dai Greci, e ritenne dapprima che questa omissione fosse fondamentale, soprattutto per la dimostrazione della dipendenza dal modello greco. Dopo uno studio più approfondito, tuttavia, giunse alla conclusione che si trattasse di una banale coincidenza; infatti, nel trattato (Bessel-Hagen e Spies, 1931) di **al-Karabisi** (X sec.) sulla misura del toro, in cui compaiono espliciti riferimenti ad Euclide, le lettere suddette sono regolarmente utilizzate. Inoltre la traduzione dell'opera di Euclide in arabo risente chiaramente dell'influenza greca e, pur mancando sulle figure geometriche la *waw* e la *jod*, sconosciute all'alfabeto greco, ne compaiono altre pure sconosciute (*sade* e *qoppa*). D'altro canto manca anche la *p*, regolarmente usata dai Greci. Di conseguenza la causa dell'omissione delle due lettere va ricercata nelle teorie dei grammatici arabi sull'alfabeto.

Per quanto riguarda invece l'influsso greco nell'ambito aritmetico e algebrico, il riferimento è all'opera di Diofanto, ritiene Gandz. La prima domanda che lo studioso si è posto è se fosse possibile che al-Khawarizmi ne avesse studiato il testo, ma la risposta sembra negativa per due valide ragioni: egli non conosceva il greco e l'opera fu tradotta in arabo solo nel secolo successivo, come si è visto, dal medico cristiano **Qusta ibn Luqa**; Abu-l-Wafa al-Buzjani compose successivamente un commento in arabo, ma entrambe le opere sono andate perdute. La prima opera a noi pervenuta, in lingua araba, che risente dell'influenza dell'opera di Diofanto è l'*al-Fakhri* (Woepke, 1853), un estratto dell'algebra di **al-Karaji**, vissuto nel X-XI secolo.

Nemmeno un'analisi del contenuto permette di evidenziare affinità tra i testi di Diofanto e di al-Khawarizmi: da un lato si evidenzia la tendenza all'astrazione ed alla speculazione teorica, tipiche della cultura e del pensiero greco, dall'altro l'esigenza di concretezza e di pratica, connaturata al mondo orientale²⁷. Diofanto si concentra sulle proprietà astratte e sulle qualità dei numeri (il nome originale dell'opera è Ἀριθμητική), mentre al-Khawarizmi offre procedure risolutive (anche in questo caso il titolo dell'opera è significativo, dal momento che allude ad operazioni) ai problemi della vita reale e quotidiana. Diofanto, infine, affronta equazioni indeterminate, con più incognite (fino a quattro) e

²⁷ Principale merito della matematica islamica sarebbe, secondo Høyrup (Høyrup, 1987) quello di aver saputo superare proprio questa dicotomia fra scienza teorica e pratica.

di grado superiore al secondo (fino al sesto), mentre al-Khawarizmi non tratta equazioni indeterminate (data la loro inutilità pratica), ammette al massimo due incognite (in un solo esempio) e si limita al secondo grado. Anche l'analisi formale porta alle medesime conclusioni sulla distanza fra i due testi: l'opera di al-Khawarizmi evidenzia un carattere primitivo ed elementare rispetto a quella di Diofanto.

In base alla tassonomia di Nesselmann (Nesselmann, 1842), si possono individuare tre stadi nell'evoluzione della notazione algebrica: si parte dall'**algebra retorica**, completamente priva di notazione simbolica, che utilizza solo parole (come è il caso di Giamblico per i Greci, di al-Khawarizmi e di quasi tutti gli algebristi arabi e persiani medievali); poi c'è l'**algebra sincopata**: anch'essa è largamente verbale, ma ricorre in parte ad abbreviazioni simboliche per operazioni e quantità (è il caso di quella diofantina). L'ultimo stadio è quello dell'**algebra simbolica**, che dispone di un completo sistema di notazione simbolica (usato dagli Indiani nell'alto Medioevo e dagli Europei dal XVII secolo). Qualcuno, come Tropfke (Tropfke, 1921), parla dell'opera di al-Khawarizmi come di un ritorno alla forma retorica, ma è probabilmente più corretto parlare di continuità con gli antichi sistemi egiziani e babilonesi, suggerisce Gandz.

Un'opinione più recente e radicale sul tema viene dal filosofo della scienza Pierre Duhem (Duhem, 1965), che ritiene l'opera scientifica araba, in particolare quella astronomica, come un vero e proprio plagio dei Greci, il risultato di una semplice traduzione; questa posizione ha suscitato una polemica reazione degli studiosi arabi, continuamente ripresa anche ai giorni nostri (Zaimeche, 2005).

Boyer (Boyer, 1968), commentando la somiglianza tra le figure usate da al-Khawarizmi e da Erone per illustrare il problema della ricerca del massimo quadrato inscritto in un triangolo isoscele, nota che, pur in presenza di alcune significative differenze tra i due nel calcolo (Erone esprime la soluzione mediante somma di frazioni egizie, mentre al-Khawarizmi indica un numero), le affinità sono ben più forti; egli conclude, sulla base di quello che egli chiama *assioma della continuità* applicato alla storia della matematica, che, laddove (come in questo caso) compare una discontinuità, la prima tesi da seguire è quella della perdita di documenti intermedi che ci consentano di ricostruire i legami. Del resto, la matematica babilonese-eroniana presenta una forte impronta pragmatica, compatibile con l'opera di al-Khawarizmi. Sostenitore altrettanto appassionato della derivazione eroniana di questo problema è anche Neugebauer (Neugebauer, 1957); Maracchia (Maracchia, 2005) sottolinea invece il fatto che, nonostante l'identità dei dati numerici, la soluzione di Erone contiene solo l'indicazione del risultato, senza alcuna spiegazione, mentre nell'opera di al-Khawarizmi viene presentata l'equazione risolvente, posto il lato del quadrato uguale all'incognita.

Su un fronte diverso, ma non inconciliabile, si è mosso Rodet (Rodet, 1878), il quale ha tentato di contemporare gli apporti indiani e greci: egli ricorda

innanzitutto che l'influenza greca sulla cultura matematica indiana è stata enorme, ma si è esercitata prevalentemente in ambito geometrico, campo di effettiva superiorità greca. Nel calcolo hanno raggiunto invece l'eccellenza gli Indiani stessi, i quali hanno sviluppato aritmetica ed algebra, senza basarsi esclusivamente sulla geometria. In ogni caso, sostiene Rodet, anche rispetto al primato indiano si deve essere cauti: è vero che la traduzione araba dell'opera di Diofanto non era disponibile per al-Khawarizmi, ma ciò non toglie che egli avrebbe potuto leggerla in siriano o *pahlavi*; inoltre, Diofanto non è l'iniziatore dell'algebra, bensì il compilatore di un manuale: gli Arabi avrebbero potuto conoscere le basi dell'algebra greca da altre fonti, magari per il tramite della Battriana o della Coresmia, regione di cui al-Khawarizmi era originario.

3.6.3. Una possibile fonte ebraica

Gandz è il principale esponente di questa corrente di pensiero, che lega l'opera di al-Khawarizmi a radici locali più che ad altre tradizioni. Infatti, sostiene lo storico, nel capitolo dedicato alle misure ed alla geometria non compaiono riferimenti o nomenclatura riconducibili alle opere greche, da ciò si può dedurre che al-Khawarizmi non conoscesse gli *Elementi* di Euclide né nello spirito né nella lettera, dal momento che mancano assiomi, postulati o dimostrazioni sul modello euclideo. La fonte di questa parte sarebbe piuttosto un testo ebraico del II secolo d.C. il *Mishnat ha Middot*, da lui studiato (Gandz, 1932), con cui l'*Algebra* mostrerebbe notevoli affinità di contenuto; su queste somiglianze insiste anche la Hunger Parshall (Hunger Parshall, 1988). Una per tutte l'approssimazione di π a $3 + \frac{1}{7}$: nell'opera ebraica viene discussa l'attendibilità di questo calcolo, dal momento che contraddice la Bibbia ²⁸; segue il tentativo di conciliare il testo biblico con il valore proposto. Questo procedimento per autorità rappresenta un grosso passo indietro rispetto alla matematica greca, che aveva insegnato un nuovo modo di pensare e di dimostrare la verità, grazie soprattutto al contributo di Euclide. Questa sarebbe una prova, secondo Gandz, del fatto che, se al-Khawarizmi aveva scelto il *Mishnat ha Middot* come fonte, egli doveva ignorare gli *Elementi*. ²⁹

²⁸ Primo Libro dei Re, 7, 23: Questo passo recita: «Fece un bacino di metallo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e la sua circonferenza di trenta cubiti.».

²⁹ Joseph (Joseph, 2000) propende per un'altra interpretazione: sarebbe il testo ebraico ad essere stato ispirato dall'opera di al-Khawarizmi per questa parte, a suo dire, aggiunta in seguito.

Come seconda prova, Gandz adduce il fatto che al-Khawarizmi non cita mai nelle sue opere il traduttore degli *Elementi*, che pure lavorava fianco a fianco con lui alla *Bayt al-Hikma*: **al-Hajjaj**. Oltre a questi due argomenti *ex silentio*, lo storico cita anche l'introduzione all'algebra nella quale al-Khawarizmi, come si è visto, dichiarava di voler comporre un manuale sul «*Calcolo con [le regole di] completamento e riduzione*, limitandolo a ciò che è più semplice ed utile in aritmetica» per finalità pratiche: questa sarebbe, per Gandz, una dichiarazione decisamente polemica contro coloro che volevano introdurre la matematica e in genere la scienza greca nel mondo arabo.

3.6.4. Le fonti locali: babilonesi e siriano-persiane

Gandz sostiene come tesi personale che la parola algebra sarebbe di derivazione babilonese ed indicherebbe l'antica scienza delle equazioni. Contestando l'interpretazione corrente delle parole *al-jabr* e di *al-muqabalab* (che egli privilegia rispetto alla prima e cui attribuisce il più pieno significato), egli si ricollega al vocabolario assiro nel quale la parola *gabru*, ovvero *jabru* ovvero *mabaru*, ha lo stesso significato di *al-muqabalab*, ossia scienza delle equazioni. Perciò gli Arabi avrebbero ereditato l'arte dell'algebra insieme con il suo nome proprio da Aramaici e Siriani, che vivevano nel territorio arabo. Solo in seguito gli Arabi avrebbero aggiunto la traduzione di *jabru* in arabo, ossia *al-muqabalab*. Gandz (Gandz, 1936) ritiene che la prova di questa dipendenza assiro-babilonese possa basarsi sulle scoperte di Neugebauer (Neugebauer, 1934), il quale aveva mostrato non solo che i Babilonesi conoscevano le operazioni algebriche, ma anche che il vocabolo *mabarugabru* era utilizzato ogniqualevolta si aveva a che fare con corrispondenza di due cose uguali.

Contro questa teoria stanno non solo la troppo scarsa somiglianza tra i vocaboli, ma anche un'annotazione in arabo a margine del manoscritto di Oxford tradotto da Rosen, in cui si definiscono *al-jabr* e *al-muqabalab* come «*restaurazione di qualcosa mancante per mezzo di ciò che è completo*» e «*raffrontare qualcosa, [...] ossia rimuovere uguali quantità da entrambi i lati dell'equazione*».

Ma Gandz aggiunge altre considerazioni semantiche, riferendosi alla diagonale; egli sostiene di essere rimasto per lungo tempo incuriosito dall'identità del termine arabo ed ebraico medievale per indicare la diagonale: *quṭr*. Oltre al significato suddetto, il termine risulta averne altri: lasciar cadere, cadere (a gocce), piovere, gocciolare, cospargere i cammelli di pece, legare i cammelli a formare una fila e molti ancora. Data la difficoltà di individuare un collegamento tra questi significati e la diagonale, Gandz ha spostato la sua attenzione sul lessico accadico (antico babilonese), in cui la diagonale viene indicata col termine *ziliptu*, di etimo ancora sconosciuto. Ha allora confrontato le radici dei termini corrispondenti a diagonale in ebraico ed aramaico ed ha scoperto l'espressione

dalaf-zalaf che significa proprio «lasciar cadere, piovere». Constatando che le gocce di pioggia cadono spesso diagonalmente e che gli antichi Babilonesi devono aver usato un'espressione figurata per indicare la diagonale, conclude che da loro deve essere discesa l'idea comune a Babilonesi di epoca più recente (altezza si dice *urdu*, cioè caduta), Egizi (che chiamano *pr m w's*, ossia «ciò che esce fuori, o cade fuori dalla finestra») e Greci (la perpendicolare è chiamata *κάθητος* ossia lasciato cadere). Anche al-Khawarizmi nella sua geometria allude al piede della perpendicolare con il termine *masqat al-bajar*, «il punto dove cade la pietra». Tutti pensano, stabilisce Gandz, che un oggetto pesante (pietra, pezzo di piombo) cade verticalmente, mentre l'unica cosa che scende diagonalmente è la pioggia, di qui, conclude l'autore, *ziliptu* = *qutr* = «gocce di pioggia che cadono», per riferirsi alla diagonale.

Gandz crede inoltre che, nel momento in cui si presentano questi punti di contatto lessicali o semantici, sia scontato presumere che anche contenuti e metodi siano stati assorbiti. Il caso della fonte ebraica per la geometria, ricordata in 3.6.3., ne era già un esempio: tuttavia era sufficiente per ritenere che il contributo di al-Khawarizmi si limitasse a pochi cambiamenti, come omissioni o aggiunta di annotazioni, mentre il grosso del trattato non sarebbe altro che la trascrizione testuale dell'antica fonte. Per quanto riguardava l'algebra non era stato possibile trovarne la fonte, tuttavia le notevoli affinità con l'algebra babilonese sembravano molto promettenti a Gandz nel 1936.

L'operazione di *al-batt* (riduzione ad $a = 1$, coefficiente di x^2 , attraverso la moltiplicazione di tutti i termini per $\frac{1}{a}$) è presente anche nell'opera di

Abraham bar Hiyya³⁰: tanto basta a Gandz per concludere che questa operazione, denominata *reciprocazione* e già presente in esempi egizi e babilonesi, sia una prova della comune origine babilonese e dunque locale dell'opera di al-Khawarizmi. I Babilonesi sarebbero, secondo Gandz, anche all'origine dell'attenzione riservata alle questioni di divisioni ed eredità, cui al-Khawarizmi dedica tanto spazio nel suo trattato.

Anche Høyrup, in tempi più recenti (Høyrup, 1990, 1992) sottolinea il legame con questa tradizione, basandosi soprattutto sulla rappresentazione delle incognite tipica dei Babilonesi, che consisteva in segmenti di lunghezza ignota, ma misurabili. Le operazioni per la risoluzione di questi problemi era geometrica, anche se è più corretto parlare di geometria ingenua, e si fondava sulla partizione e riorganizzazione di figure geometriche (Høyrup parla di tecnica *cut and paste*), in un modo molto simile a quanto avviene nelle dimostrazioni di al-Khawarizmi.

³⁰ Matematico di origine ebraica del XI-XII secolo (v. 4.4), più noto con il nome latinizzato di Savasorda (Levey, 1970-1980) traslitterazione di Sahib as-Shurta, ossia capo di polizia.

3.6.5. Gli studi più recenti

Gli studi più recenti tendono a non assumere posizioni rigide, ma piuttosto a valutare in che modo storicamente si possano dimostrare i diversi contatti del mondo islamico o di al-Khawarizmi segnatamente con l'opera di altri autori.

Berggren (Berggren, 1986), in particolare, sottolinea che tutta la matematica greca era nota nel mondo islamico, da Euclide ad Archimede ad Erone e, più tardi, a Diofanto: l'approccio geometrico di questi autori era tenuto in altissima considerazione dagli scienziati musulmani; d'altro canto, la ricca ed evoluta matematica indiana era altrettanto conosciuta nel mondo islamico: i nomi sono quelli di **Aryabhata** e **Brahmagupta**, che già si erano cimentati con la risoluzione di equazioni di secondo grado; ma soprattutto la notazione posizionale decimale segna un punto di svolta nell'evoluzione del calcolo. Anche l'eredità babilonese non deve essere sottovalutata, dal momento che la notazione sessagesimale sopravvive, anche se limitata ad alcuni ambiti specifici, come l'astronomia. Berggren conclude che i due approcci, geometrico e numerico, convivono nell'opera di al-Khawarizmi, a testimonianza della molteplicità di fonti assimilate e rielaborate.

La Hunger Parshall (Hunger Parshall, 1988) non esita ad accogliere tutte le ascendenze ipotizzate da Gandz, ma ve ne aggiunge altre: ammette infatti sia i legami con il mondo greco (in particolare indica Euclide, ma esclude Diofanto), sia con la tradizione semitica (*Mishnat ha Middot*), sia con quella babilonese (per la vocazione pratica), sia con quella indiana (per lo stile retorico).

La tesi di Rashed è sicuramente la più entusiastica ed anche la più radicale di quelle contemporanee. L'originalità dell'opera di al-Khawarizmi viene subito ribadita attraverso due fonti arabe: una è l'autore stesso che ha introdotto per primo la parola algebra ad indicare una disciplina, cui ha fornito un lessico ed un metodo; la seconda sono i matematici suoi contemporanei o di poco posteriori, che gli avrebbero attribuito immediatamente un contributo fondamentale nella nascita dell'algebra. Rashed (Rashed, 1989) dichiara che, in termini di stile, l'opera di al-Khawarizmi è sia algoritmica, nel senso moderno del termine, sia dimostrativa. Rappresenta la nascita di una nuova matematica che può trattare formulazioni diverse, essendo indipendente dai casi specifici. Nell'*Algebra* di al-Khawarizmi un'espressione algebrica può riferirsi ad un numero o ad una quantità irrazionale o ad una grandezza geometrica: una novità sconvolgente per gli studiosi del tempo, afferma Rashed. La novità della concezione e dello stile dell'*Algebra* non si ritrovano in nessuna tradizione precedente: essa conteneva un potenziale enorme che sarebbe stato sviluppato nei secoli successivi. I successori di al-Khawarizmi, continua Rashed, avrebbero gradualmente esteso l'applicazione dell'aritmetica all'algebra e viceversa, dell'aritmetica e dell'algebra alla trigonometria, dell'algebra alla teoria dei numeri euclidea, dell'algebra alla geometria e viceversa: tutte applicazioni fondamentali per l'evoluzione del-

l'algebra. In altri saggi, Rashed (Rashed, 1994) nega sistematicamente qualsiasi rappresentatività alle fonti indicate dagli altri studiosi con la sola motivazione della varietà e contraddittorietà delle conclusioni da loro tratte, salvo poi affermare, con grande sorpresa del lettore, che la dimostrazione geometrica che accompagna i sei casi «*was probably inspired by recent knowledge of the Elements*», conoscenza tutt'altro che accertata; egli auspica infine che gli studi prendano un'altra direzione: «*Rather than ask what al-Kwarizmi may have read, it would be preferable to enquire how he conceived of what none of his predecessors had been able to conceive*». Della stessa opinione anche al-Daffa (al-Daffa, 1977).

Rashed ha ribadito la sua tesi anche recentemente (Rashed, 2007) nell'introduzione all'edizione critica dell'*Algebra*; invece di inoltrarsi nella (per lui sterile) ricerca delle fonti, preferisce analizzare il progetto scientifico dell'autore: fondare una disciplina matematica con gli strumenti teorici e tecnici necessari; anzi, dichiara: «*Ni la tradition égyptienne, ni celle de Babylone seront considérées, puisqu'al-Khwarizmi ne pouvait rien en connaître au tournant du VIIIe siècle a Bagdad*».

La tesi di Rashed sull'originalità di al-Khawarizmi è stata conosciuta e studiata, al punto da fare proseliti. Lauand (Lauand, 1998), alcuni anni dopo, ne estende la portata: l'algebra stessa è una scienza araba; non sarebbero un caso né la sua nascita sotto il califfato abbaside (dato il rigore nell'applicazione della legge religiosa nella vita quotidiana da parte degli Abbasidi più che degli Omayyadi) né la sua affermazione in seno alla Casa del Sapere di Baghdad; si tratta di una scienza araba, dice Lauand, nata in lingua araba e iniziata da al-Khawarizmi, che non solo è uno dei fondatori della scienza araba, ma anche un oppositore di quella greca (la dimostrazione dell'avversione per la scienza greca è la stessa di Gandz). La presentazione di questa tesi avviene sulla base di alcuni punti di contatto fra il pensiero religioso islamico e il testo di al-Khawarizmi (la questione del contrasto fra religioso e temporale nelle dispute ereditarie), fra la lingua e la concezione araba del mondo (basata, come per i popoli semitici, sulla prevalenza di ciò che cade sotto il senso dell'udito, contrariamente a quella greca fondata sulla vista in corrispondenza biunivoca con la realtà) e sul concetto di misura e proporzione.

Joseph (Joseph, 2000) ricorda il ruolo determinante della Siria e della Persia sassanide che, prima ancora di Baghdad, furono le vere artefici del *melting pot* culturale tra Indiani ed Alessandrini. Proprio queste due componenti sarebbero, per lo storico, alla base dell'opera di al-Khawarizmi: alle fonti indiane e persiane si sarebbe ispirato per l'algebra e l'astronomia e ne avrebbe derivato anche l'approccio pragmatico; dagli Alessandrini invece avrebbe ripreso la parte di geometria ed il metodo deduttivo.

Più sinteticamente Høyrup (Høyrup, 2002b) illustra le sue convinzioni sulle fonti di al-Khawarizmi: si nota un influsso indiano forse mediato, soprattutto negli esempi in cui ricorrono casi di divisione di denaro; le dimostrazioni geo-

metriche dei sei casi vanno lette, dice Høyrup, come un tentativo di rendere accettabile la sua opera anche ad un pubblico più esigente, mostrandone il sostanziale accordo con le regole greche, ormai acquisite dai più esperti; le prove, tuttavia, fa notare Høyrup, sono dimostrazioni prese a prestito (*cut-and-paste borrowed*) dalla tradizione dei geometri e adattate a grandi linee allo stile greco (di cui, infatti, non hanno il rigore).

Djebbar (Djebbar, 2004) utilizza un argomento *ex silentio* per negare influenze indiane: se gli Arabi non parlano mai delle scoperte algebriche indiane, è segno che non ne sono rimasti colpiti, esperti com'erano di risoluzione secondo i metodi babilonesi.

In una recentissima e dettagliata ricerca belga, Ballieu (Ballieu, 2004) nega qualsiasi influenza cinese, greca (non ci sono somiglianze con gli *Elementi* di Euclide) ed indiana; se gli Arabi non l'ammettono, come hanno fatto per l'astrologia e i numeri, non c'è ragione di ipotizzarla forzatamente.

Piace segnalare, prima di concludere questa rassegna, l'opinione di Ruska (Ruska, 1917), riferita e condivisa anche da Sezgin (Sezgin, 1974) nella sua opera monumentale sugli scritti arabi; egli ritiene che si potranno fare progressi sulla questione delle fonti solo grazie a:

1. scoperte di nuove fonti manoscritte;
2. discussione delle premesse alla fondazione di una letteratura matematica presso gli Arabi;
3. reale approfondimento delle intenzioni e degli scopi;
4. precisa analisi terminologica.

Attualmente, solo l'obiettivo indicato dal punto 4 sembra perseguito, grazie al lavoro sia di Ruska stesso sia di Rashed (Rashed, 2007) sia di Oaks e Alkhateeb (Oaks e Alkhateeb, 2005); questi ultimi riconoscono ad al-Khawarizmi due meriti innegabili, indipendentemente dalle fonti che gli si vogliono attribuire: lo sviluppo del metodo di completamento del quadrato e l'introduzione di un nome per indicare l'incognita, che rende possibile ricorrere a metodi di semplificazione dell'equazione risultante

Rilevante in un contesto di analisi storica, filologica e concettuale la sintesi della letteratura realizzata da Heffer (Heffer, 2006).

3.7. ALTRI MATEMATICI ARABI: ABU KAMIL E OMAR KAYYAM (O DELL'ALGEBRA CHE NON È STATA)

Quando Leonardo Fibonacci da Pisa (circa 1170-1250) si accinse a studiare le arti del calcolo in Algeria, alla fine del XII secolo, incontrò un *corpus* di conoscenze e di tecniche che andava ben oltre l'opera, pur importante, di al-Khawarizmi, come dichiara egli stesso: *«quicquid studebatur ex ea [scientia]*

apud Egyptum, Syriam, Greciam, Siciliam et Prouinciam cum suis uariis modis, ad que loca negotiationis [...] postea peragraui»³¹. Uno di questi autori, come ha dimostrato Levey (Levey, 1966), verosimilmente, fu **Abu Kamil** (850-930), del quale Fibonacci utilizzò molti problemi nelle sue opere (v. 8.2.). In particolare la conoscenza dell'opera di Abu Kamil (Sesiano, 1993; Roero, 2002) permise al matematico pisano di estendere quanto appreso da al-Khawarizmi: infatti

1. Mentre al-Khawarizmi, pur non escludendo gli irrazionali, tende a preferire i razionali, Abu Kamil presenta indifferentemente esempi con coefficienti e radici razionali o irrazionali: «Se ti fosse chiesto: In un triangolo equilatero ed equiangolo, la somma della sua superficie e della sua altezza è 10, quanto misura l'altezza?». Detta x l'altezza, la superficie espressa in funzione di x è $S = \frac{x^2}{\sqrt{3}}$, pertanto l'equazione risolvibile sarà $\frac{x^2}{\sqrt{3}} + x = 10$, da cui si ricava

che $x = -\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{300}}$. Come si può intuire, la soluzione del problema è un numero irrazionale.

2. Abu Kamil prosegue nell'applicazione dell'algebra alla geometria, ossia nell'utilizzo delle tecniche risolutive algebriche per problemi che coinvolgono enti geometrici: a questo proposito Rashed ha parlato di una vera e propria geometrizzazione dell'algebra, come estensione delle ricerche algebriche di al-Khawarizmi, sostenute invece da dimostrazioni definite *protogeometriche* (Rashed, 1997). La Hunger Parshall (Hunger Parshall, 1988) ritiene che Abu Kamil sia stato più rigoroso del suo predecessore nel mappare gli esempi geometrici su quelli numerici. Questo da un lato è costato all'opera di al-Khawarizmi l'etichetta di algebra pratica, contrapposta alla geometria teorica di Euclide, ma dall'altro ha reso l'algebra di al-Khawarizmi più competitiva, corroborandola con il rigore euclideo.
3. Abu Kamil, come si è visto nell'esempio precedente, non si preoccupa dell'omogeneità dimensionale e tratta indifferentemente misure di superficie e lineari nella stessa equazione.

Hughes (Hughes, 1996) si rammarica del fatto che, invece, nell'opera di Leonardo Fibonacci, manchino completamente riferimenti al più famoso testo arabo di algebra del XII secolo, l'*al-jabr w'al-muqabalah* di **Omar Kayyam** (1044-1131), e non esistano prove che Fibonacci o un qualsiasi traduttore europeo ne abbia sentito parlare, almeno prima dell'edizione di metà Ottocento (Woepke, 1851). Lo storico ritiene che quel testo meritasse più che mai di essere tradotto per due importanti ragioni:

³¹ (Boncompagni, 1857a), (Boncompagni, 1857-1862), (Grimm, 1973).

1. sintetizza tutta la teoria dell'algebra presente nell'opera di al-Khawarizmi, con la spiegazione completa dei sei casi di equazioni standard di primo e secondo grado, compresa la tecnica risolutiva; Kayyam riprende anche alcuni degli esempi di al-Khawarizmi;
2. identifica, discute e risolve geometricamente 16 casi di equazioni cubiche intere e commenta ulteriori 61 casi di equazioni fratte di primo, secondo e terzo grado.

Le conseguenze dell'esclusione di una simile opera dalle biblioteche europee sono evidenti, ma a Hughes preme soprattutto comprendere perché il testo fu ignorato fra il XII e il XIII secolo. Dal momento che l'opera fu scritta, come dice Omar Khayyam stesso, all'epoca dell'Imam Abu-Thahir a Samarcanda, ossia intorno al 1074, ci sarebbe stato tutto il tempo necessario perché giungesse in Europa ed entrasse nel novero dei trattati più diffusi. Esclusa l'indisponibilità, Hughes prospetta spiegazioni di ordine:

- **politico:** il mondo islamico non godeva più della stessa unità che l'aveva contraddistinto nei primi secoli; nel X secolo questa (relativamente) libera circolazione di idee si era rallentata ed infine arrestata; nell'XI secolo Marocco, Algeria e Tunisia passarono alla dinastia fatimide, i Turchi Selgiuchidi presero il controllo della Persia e della Coresmia: perciò i manoscritti, che prima viaggiavano liberamente fra Baghdad, Cordoba, Granada e Toledo, non circolarono più con la stessa facilità e pochi libri scritti dopo il 1000 furono tradotti nelle scuole siciliane e spagnole;
- **religioso:** l'opera di Omar Kayyam fu deliberatamente ignorata già in ambiente musulmano per ragioni di fede; le prove consisterebbero:
 - nella fama di libero pensatore di cui godeva Omar Kayyam (oggi potrebbe essere definito laico): egli non applicava l'uso della ragione esclusivamente allo scopo di dimostrare le credenze religiose, come voleva la tradizione;
 - nella ricorrente reazione contro i musulmani sospettati o accusati di eresia: fu anche perseguitato in vita, dovette recarsi in pellegrinaggio a La Mecca per evitare il peggio e subì la *damnatio memoriae* dopo la morte.

Ciò che dell'opera di Kayyam si salvò, si deve alla lungimiranza dei suoi mecenati: l'Imam Sayid Abu-Tahir e il primo ministro Nidhamu'l-Mulk, che gli affidò la riforma del calendario.

4.

DA ORIENTE A OCCIDENTE

Nel X secolo, dopo un lungo periodo in cui gli scienziati si erano dedicati ad un'aspra lotta per preservare dall'oblio almeno le basi essenziali della cultura antica, i dotti europei compresero finalmente le potenzialità e la vastità della scienza custodita dal mondo islamico, in seguito ai continui contatti commerciali (Abulafia, 1996) con il mondo musulmano ed alle Crociate. Tra i secoli XI e XIII, la maggior parte delle opere di questa cultura, che comprendeva anche la tradizione greca in ambito astronomico (**Tolomeo**), medico (**Ippocrate**) e filosofico (**Aristotele**) sconosciuta all'Occidente, fu tradotta in latino e si diffuse nei centri europei del sapere (Burnett, 2005): in Catalogna, ad esempio a Ripoll e a Vich, c'erano scuole dove si studiavano questi manoscritti scientifici.

Nel secolo XI l'Europa era finalmente pronta per una rinascita culturale ed economica, anche grazie alla fine delle scorrerie vichinghe e magiare ed all'affermarsi di monarchie nazionali. Questa stabilità portò ad un incremento dei commerci e del benessere e produsse la crescita demografica, che culminò con la ripresa delle città. Il neo-urbanesimo ebbe per conseguenza una concentrazione della ricchezza, che favorì il rifiorire della cultura attraverso la nascita di scuole finanziate dalle comunità urbane. Le nuove scuole cittadine, eventualmente affiancate da università, cercarono di recuperare il patrimonio di cultura classica greca e latina (Luscombe, 1986), offrendo un mercato ed un pubblico assetato della traduzioni di quelle opere che il mondo arabo permetteva di riscoprire (Burnett, 1997c).

4.1. GERBERTO D'AURILLAC

La figura che al volgere del millennio domina il campo matematico è quella di **Gerberto d'Aurillac** (950-1003), poi papa Silvestro II dal 999; Richerus (Bubnov, 1899; Hoffmann, 2000) ci documenta con una biografia (scritta fra il 996 e il 998) sulla sua vita e sulla sua formazione.

Gerberto studiò presso la scuola del monastero di Aurillac, in Alvernia, al centro della Francia. Una svolta determinante nella sua vita avvenne quando Borel, margravio del territorio di Barcellona, collocato fra la marca spagnola e il califfato di Cordova, sostò, durante un viaggio, proprio ad Aurillac. L'abate Geroldo gli domandò se in Spagna ci fosse qualche maestro presso il quale inviare i propri monaci ad affinare la conoscenza delle arti liberali. Borel rispose affermativamente ed accettò di portare con sé uno dei confratelli. Ecco come, nel 967, Gerberto si recò giovanissimo (*adolescens*) a Vich, in Catalogna, dal vescovo Hatto e studiò appassionatamente e con profitto la matematica: *in mathesis plurimum et efficaciter studuit*. Alla scuola conobbe probabilmente le cifre arabe nella forma occidentale, denominata *ghubar*, che sono attestate per la prima volta nell'anno 976 in appendice al libro III delle *Origines* di Isidoro, nel **Codex Vigilianus**¹ (Ms. lat. d.I.2), copiato dal monaco Vigila, nel monastero di Albelda in Asturia, ma ora conservato alla Biblioteca san Lorenzo del Escorial (Burnam, 1920; Pallares, 1987, 1989). Questo contatto col mondo spagnolo fece nascere la seducente idea che proprio a Gerberto si debba l'introduzione delle cifre arabe nell'Occidente medievale, ma questa attribuzione, come si vedrà, è molto dubbia.

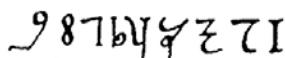


Fig. 4.1. – Numeri *ghubar* del *Codex Vigilianus* (976).

Gerberto si recò poi a Roma col suo patrono e col vescovo, ma, quando essi ripartirono, egli vi rimase per proseguire gli studi di logica, dato che in matematica era già piuttosto esperto (*in mathesi se satis posse*).

Dal 972 al 982, Gerberto era arcivescovo a Reims, dove diresse anche la scuola cattedrale di arti liberali, di cui arricchì la biblioteca grazie alle copie di manoscritti che commissionò a Bobbio² e a Erlingen (Riché, 1993). A Gerberto viene attribuita con sicurezza l'introduzione e la diffusione in Occidente di un nuovo tipo di abaco denominato a colonne, ed inoltre l'importazione di un dispositivo astronomico fondamentale: l'astrolabio. Tutte conoscenze riferibili al soggiorno spagnolo.

¹ Il testo che introduce le cifre recita «*Item de figuris arithmetice. Scire debemus Indos subtilissimum ingenium habere et ceteras gentes in arithmetica et geometria et ceteris liberalibus disciplinis concedere. Et hoc manifestum est in nobem [sic] figuris, quibus designant unumquemque gradum cuiuslibet gradus. Quarum he sunt forme*». Nel 992 il Vigilianus fu copiato integralmente a San Milan de la Cogolla nel manoscritto oggi noto come *Codex Aemilianensis*, conservato sempre all'Escorial, Ms. lat. d.I.1. (Burnam, 1920).

² Presso l'abbazia di cui era abate dal 983, pur non risiedendovi.

Anche la realizzazione (*confectio*) del nuovo abaco, *abacus geometricalis* o *mensa Pythagorae*, ci viene narrata nella biografia gerbertiana di Richerus (Hoffmann, 2000): «In preparazione alla Geometria confezionò, con l'aiuto di un costruttore di scudi, un *abacus*, cioè una tavola che si poteva suddividere in parti (*dimensionibus aptam*). La suddivise in lunghezza in 27 colonne (*partes*), sulle quali distribui i nove simboli numerici, con i quali si potevano rappresentare tutti i numeri. Similmente a questi simboli, egli costruì mille figure (*characteres* o *apices*) in corno, le quali, disposte nelle 27 colonne dell'abaco, potevano eseguire le moltiplicazioni e le divisioni di tutti i numeri. In questo modo si semplificavano talmente tutte le moltiplicazioni e le divisioni che – nonostante il gran numero di cifre – la comprensione risultava più facile di quanto le parole fossero in grado di fare. Chi però volesse perfezionarsi in quest'arte, dovrebbe leggere il libro che Gerberto ha mandato, insieme ad una lettera, al grammatico **Constantinus**. Lì egli troverà tutto ciò spiegato sufficientemente e per esteso».

Tra le opere matematiche gerbertiane superstiti figurano le *Regulae de numerorum abaci rationibus* (Chasles, 1843; Bubnov, 1899) che spiegano come eseguire sull'abaco moltiplicazioni e divisioni, e lo *Scholium ad Boethii Arithmeticae Institutionis* nel quale Gerberto, glossando un passo del II libro, esamina i rapporti aritmetici in specifiche serie di numeri. Oltre a questi due scritti, sono sopravvissuti il *Fragmentum de norma rationis abaci* e l'*Epistula ad Remigium Treverensem*; il primo è un'introduzione ad un altro scritto (perduto) sull'abaco, il secondo illustra un problema sulla divisione. Manca quindi ad oggi il testo indicato da Richerus.

Come emerge anche solo dalla lettura dei titoli delle opere, convivono in Gerberto l'interesse per la tradizione matematica boeziana ³ (Lindgren, 1976; Gasc, 1986) e quello per il calcolo elementare pratico, rappresentato dall'uso dell'abaco, che, pur risalendo all'epoca romana, era stato innovato: lo spazio era diviso in colonne verticali e non in fasce orizzontali e, per rappresentare i numeri, si usavano gli apici, ossia gettoni numerati da uno a nove (Bubnov, 1899; Beaujouan, 1948; Folkerts, 1996b). L'uso (peraltro non accertato) delle cifre arabe ha contribuito a fargli attribuire il primato nell'introduzione della numerazione araba in Europa. A questo proposito Bergmann (Bergmann, 1985) sostiene che già prima di Gerberto erano in uso i gettoni numerati con le lettere dell'alfabeto greco e si dichiara sicuro che Gerberto abbia utilizzato proprio un abaco di questo tipo, recante sui gettoni le cifre arabiche nella versione *ghubar*, a lui certamente nota per via del viaggio in Spagna; non sono dello stesso parere studiosi di varie epoche (Gandz, 1931; Nuvolone, 2003).

³ Il fatto che il suo interesse di studioso fosse esteso a tutte le discipline del Quadrivio dimostra, secondo la Lindgren (Lindgren, 1976), la sua superiorità rispetto ai contemporanei.

Esistono due altri trattati sull'abaco, contemporanei a quello di Gerberto, le *Regulae abaci* di **Herigerus di Lobbes** (ca. 950-1007) e il *Commentarius in Calculum Victorii* di **Abbone di Fleury** (ca. 945/950-1004) riferito al *Calculus* di **Victorius**⁴, ma nessuno dei due fornisce indizi utili alla descrizione dell'abaco stesso: Herigerus illustra le regole per il calcolo e Abbone dà le stesse indicazioni di Gerberto (Van de Vyver, 1935; Peden, 2003; Burnett, 2004). Il *Tractatus de abaco* di un discepolo di Gerberto, **Bernelinus** (Bergmann, 1985; Bakhouché, 2000), scritto verosimilmente nel 999, parla di una tavola lucida levigata (*tabula diligenter undique prius polita*), suddivisa in 30 parti, di cui le prime tre sono riservate alle frazioni e le restanti 27 alle unità ed alle potenze di 10. Egli spiega espressamente che 3 parti per volta vengono racchiuse in un semicerchio e che ci sono altri due semicerchi che separano a loro volta le unità rispettivamente dalle decine e dalle centinaia. Per quanto riguarda la presenza dei numeri (*caracteres*) restano aperte due possibilità: o si trattava delle nuove cifre (nella versione *ghubar*) oppure erano ancora le lettere greche (da α a θ) a rappresentare i numeri (Lindgren, 1976).

La prima vera illustrazione di un abaco compare nella cosiddetta *Geometria II* dello **pseudo-Boezio** (Folkerts, 1975, 2003c, d). Essa compare nella prima metà del secolo XI e fu composta in Lotaringia (l'attuale Lorena) sulla base di svariate fonti: la rappresentazione delle cifre è certamente quella *ghubar*; esse non compaiono solo nel testo, ma anche nelle illustrazioni. Nei codici più antichi, riferiscono Folkerts (Folkerts, 1996b, 2003d) e Nuvolone (Nuvolone, 2004), sono non solo disegnate le cifre, ma anche indicati i nomi *ghubar*, tra i quali *sipos* (cioè lo zero, sconosciuto però a Gerberto che nell'abaco utilizza lo spazio vuoto). Esempari in questo senso sono le opere di **Gerlandus di Besançon** e di **Radulph di Laon**. Il primo fra il 1081 e il 1084 scrisse *Abacus libellus de scientia multiplicandi et dicendi*, che conobbe una certa diffusione, come attestano le circa venti copie superstiti: offre una descrizione dettagliata dell'aspetto e dell'uso dell'abaco, oltre alla presentazione dei numerali con i loro nomi. Il secondo autore morì probabilmente nel 1133 (Evans, 1979), il che lascia supporre che fosse poco più giovane di Gerlandus; anche nel suo trattato sull'abaco (*De abaco*) offre una descrizione minuziosa dello strumento e dei numerali indo-arabici, cui attribuisce però immotivatamente un'origine caldea (Singer e Singer, 1919).

La somiglianza dei numerali *ghubar* con i numerali occidentali moderni è molto forte, superiore a quella delle cifre indo-arabiche orientali, come la *fig. 4.2.* dimostra:

⁴ Il titolo completo è *Tractatus de numero, pondere et mensura*, che richiama un notissimo versetto biblico (Sap. 11, 21). Nonostante il titolo, l'opera è dedicata quasi esclusivamente all'aritmetica e mostra una fortissima dipendenza boeziana e marzianea.

Orientali	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Ghubar	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
	igin	andras	ormis	arbas	quimas	calctis	zenis	temenias	celentis
Moderni	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fig. 4.2. – Numerali orientali, ghubar e occidentali.

In passato, questo ha fatto pensare a qualche studioso (von Humboldt, 1847; Woepke, 1863) che la loro importazione in Occidente non sia stata opera degli Arabi, ma piuttosto dei Neopitagorici che da Alessandria li avrebbero diffusi a partire dal V secolo ⁵; altri addirittura (Bubnov, 1914) pensano ad un'evoluzione dei simboli usati da Greci e Romani sull'abaco.

Per quanto si può vedere, la possibilità che le cifre usate da Gerberto fossero arabe esiste concretamente, ma la Franci (Franci, 1996) fa osservare che, «anche se si raggiungesse la certezza di questo uso [delle cifre arabe] non si potrebbe ugualmente asserire che Gerberto fu il divulgatore del sistema di numerazione arabo in Occidente, infatti le sue tecniche di calcolo sono antichate e non sfruttano affatto il potenziale della numerazione araba, in primo luogo l'esistenza dello zero».

All'interesse di Gerberto per la matematica e la scienza si deve comunque come effetto la fondazione di numerose scuole cattedrali, soprattutto quella di Chartres, che fu accresciuta dal suo allievo **Fulberto** (950-1028) e raggiunse il massimo sviluppo con i fratelli **Bernardo** (?-1125) e **Teodorico di Chartres** (?-1150). L'importanza di questa scuola dipende soprattutto dal fatto che, nonostante l'ispirazione neoplatonica e boeziana di fondo, essa aveva grande possibilità di accedere alle nuove fonti di conoscenza raggiungibili attraverso la cultura araba.

Se vivace appare l'interesse teorico per l'aritmetica in varie zone della Francia (Lotaringia, in particolar modo), in Inghilterra (Evans, 1979) fra il 980 e il 1150 si assiste ad un vero e proprio fiorire di scuole per l'apprendimento dell'abaco, nonostante una testimonianza dell'epoca di **William of Malmesbury** (1080/1095-1143) ci riferisca che le regole dell'abaco «sono a stento comprese dagli abacisti che sudano [per le fatiche del calcolo]» ⁶ (Waitz, 1852; Stubbs,

⁵ Il vero simbolo dello zero come indicazione della mancanza di qualcosa viene utilizzato da Tolomeo tanto nell'*Almagesto*, quanto nella sua *Geografia*, in scala decrescente per gradi e minuti mancanti. Perciò il simbolo dello zero è in Occidente da molto prima dell'invasione araba (*Das wirkliche Nullzeichen als etwas fehlendes wendet Ptolemäus sowohl im Almagest als in seiner Geographie in der abwärts steigenden Scala für fehlenden Graden und Minuten an. Das Nullzeichen ist demnach im Occident weit älter als der Einbruch der Araber.* In von Humboldt, p. 457).

⁶ *a sudantibus abacistis vix intelleguntur.*

1887). Escludendo l'opera di **Adelardo di Bath** (circa 1080-1160) per via del fatto che la formazione di quest'ultimo non era strettamente inglese, la Evans afferma che mancano quasi completamente trattati e trattatisti locali: l'unico esempio è dato da **Turchillus** (Thurkil), vissuto probabilmente alla corte di Enrico I Plantageneto (1068-1135); per il suo trattato, *Reguncule super Abacum* o *De Abaco* (Narducci, 1882), si può indicare una datazione sulla base del *terminus ante quem* costituito dalla citazione di Ugo di Buckland (morto nel 1115) come sceriffo di Essex in carica. **Walcher of Malvern** (?-1135), o Walcher di Lotaringia ⁷ o Dottor Walcher, fu priore di Malvern (Worchestershire), astronomo e matematico; arrivò in Inghilterra alla fine del secolo XI, mostrando grandi competenze di ordine astronomico e di calcolo, derivate anche dai testi arabi mediati dalla Spagna. Non sembra che utilizzasse i numerali indo-arabici, ma ancora quelli romani (Haskins, 1915).

Questa breve rassegna lascia un'impressione di estrema frammentarietà geografica e contenutistica degli studi matematici (e quadriviali in generale) e mette in evidenza la grande difficoltà per gli studenti (Gerberto compreso) di portarli efficacemente a termine. Si trattava di un sapere irto di ostacoli: innanzitutto, era faticoso trovare un valido maestro per essere introdotti almeno ai rudimenti (quasi tutte le biografie dei personaggi qui citati parlano di viaggi, non sempre fruttuosi, in cerca di abili docenti); in secondo luogo, l'approccio didattico composito, in cui convivevano in modo non sempre ordinato aspetti teorici e simbolici (aritmetica speculativa) e pratici (minuziosissimi insegnamenti di calcolo di livello elementare), rendeva arduo far tesoro della lettura di un trattato; infine, la tecnica utilizzata, che spaziava dal calcolo digitale marziano all'abaco, nelle varie versioni, comportava grosse differenze anche nell'ordine di grandezza dei calcoli che si potevano compiere: Abbone di Fleury, che usa il calcolo digitale, fissa, con Marziano, come limite superiore per i calcoli il 9000, oltre il quale la gestualità diverrebbe eccessiva e farebbe perdere compostezza allo studioso; per Gerberto l'abaco si può spingere invece fino a diecimila milioni (Frova, 1996).

4.2. LE VIE D'ACCESSO ALL'OCCIDENTE

Tra i secoli XI e XIII, ci furono tre principali aree geografiche in cui i contatti tra mondo arabo-islamico e mondo occidentale permisero la trasmissione della conoscenza da una cultura all'altra: l'Italia meridionale (soprattutto la Sicilia), la Spagna e i regni crociati.

⁷ Per alcuni spunti sulla formazione, v. Riché (Riché, 1994).

4.2.1. Italia Meridionale e Sicilia

Anche se l'Italia occupa un posizione meno rilevante di quella della Spagna nell'attività di traduzione dall'arabo al latino, il suo ruolo nella sedimentazione della conoscenza fu tutt'altro che marginale (Narducci, 1882; Burnett e Contadini, 1999).

In Campania fu determinante l'attività di traduzione di **Costantino l'Africano** collocabile a Salerno nel secolo XI: monaco benedettino di origine nordafricana, iniziò una carriera come traduttore di opere di medicina dall'arabo in latino. Secondo Pietro Diacono (McVaugh, 1970), storico di Montecassino, Costantino aveva lasciato la natia Cartagine per 39 anni, trasferendosi in Oriente a studiare grammatica, dialettica, geometria, aritmetica, astronomia, negromanzia e musica presso Caldei, Arabi, Persiani, Saraceni, Egiziani e Indiani. Di ritorno in patria, si era attirato antipatie e si era rifugiato a Salerno, dove era vissuto in povertà fino all'incontro con Roberto il Guiscardo. In seguito entrò nel monastero, dove realizzò la maggior parte delle sue traduzioni. Secondo un'altra versione della biografia (opera del medico salernitano Matteo nel XII-XIII sec.), Costantino sarebbe stato un mercante saraceno, che, dopo aver visitato Salerno ed aver scoperto i prezzi dei libri di medicina in latino, sarebbe rientrato in patria per ritornare pochi anni dopo con testi medici in arabo, che egli si sarebbe offerto di tradurre. Poco dopo il suo rientro in Italia sarebbe diventato cristiano ed entrato nel monastero di Cassino. Fatto sta che la sua attività di traduttore è imponente e significativa: tre opere di **Isaac Israeli**, l'*Isagoge* di **Hunayn ibn Ishaq** e il *Liber de oculis*, tre scritti di **Ippocrate** (*Aforismi*, *Prognostica* e *Regimen*), i *Pantegni* di **Ali ibn al-Abbas**, i *Megategni* e i *Commentarii* di **Galeno** in una versione abbreviata, il *Viaticum* di **ibn al-Jazzar** e alcuni altri brevi trattati. Il lavoro di Costantino fornì le risorse su cui Salerno fondò la sua reputazione di prima scuola di medicina in Europa. A lungo termine, egli offrì il fondamento delle letterature mediche all'Occidente almeno per alcuni secoli (McVaugh, 1970).

Accanto alla traduzione mediata dall'arabo, si pongono durante il XII e XIII secolo le versioni dirette dal greco in latino, rese possibili dal permanere di comunità grecofone sul territorio dell'Italia meridionale e dagli stretti legami con l'Impero d'Oriente.

Interi biblioteche di opere greche furono riscoperte e traduttori, come gli italiani **Mosè da Brescia** (Haskins, 1927), **Burgundio da Pisa**, **Giacomo da Venezia**, che nel 1135 si trasferì a Costantinopoli per imparare il greco (Minio-Paluello, 1970-1980a; Franceschini, 1976), e successivamente il domenicano di origine fiamminga **Guglielmo di Moerbeke** (1215-1286) tentarono di offrire agli studiosi europei traduzioni *ex novo* o emendate di Aristotele, Platone, Archimede (traducendo i codici A e B nel codice O), Galeno ed Euclide (Grabmann, 1946; Minio-Paluello, 1970-1980b).

Particolare attenzione merita la Sicilia, per una lunga serie di ragioni: innanzitutto, l'isola era stata via via sottoposta alla dominazione bizantina, musulmana e normanna ed aveva una popolazione in cui tutte le culture erano rappresentate:

greca, araba e latina; in secondo luogo, questa commistione di componenti diverse aveva prodotto non solo una pacifica convivenza di lingue e culture, ma anche la tendenza ad integrarle: è il caso dei numerali, che assunsero la cosiddetta *forma palermitana* (Burnett, 2002a). Essa è attestata in un manoscritto datato 1153 conservato a Londra, British Library, Harley 5786, che contiene un salterio trilingue (greco, latino e arabo) disposto su tre colonne (greco a sinistra, latino al centro e arabo a destra). La natura stessa del documento, sostiene Burnett (Burnett, 2002a), ne dimostra l'origine palermitana. Infatti, alla corte di Ruggero II (1095-1154) le tre culture e le tre lingue godevano di uguale considerazione ed anzi gli uffici amministrativi del regno avevano una tripla cancelleria; gli scribi di quella araba (il *Diwan*) si erano formati, per quanto riguardava la lingua, in Egitto o in zone del Mediterraneo orientale. La caratteristica d'interesse per quanto riguarda i numerali è che ad ogni lingua sono associati quelli appropriati, ossia notazione alfabetica per il greco, numerali romani per il latino e indiani per l'arabo. Il *set* di questi ultimi è tuttavia inconsueto: il 6 è quello *ghubar* o toledano, il 4 è costituito da un uncino, l'8 è disegnato con due cerchi sovrapposti, come nella versione occidentale; viceversa il 2, il 3 e il 7 hanno l'aspetto orientale. Un aspetto fortemente somigliante avrebbero anche i numerali presenti in una traduzione dell'*Almagesto* di Tolomeo, fatta a Palermo intorno al 1165 da un manoscritto donato dall'Imperatore d'Oriente al re normanno. La somiglianza fra i due manoscritti dimostrerebbe la comune origine siciliana. Burnett ammette che comunque i numerali palermitani non ebbero diffusione al di fuori di questo ristretto contesto cortigiano.

La massima fioritura culturale siciliana in relazione alla diffusione della scienza araba si deve tuttavia all'imperatore **Federico II Hohenstaufen** (1194-1250), nipote di Ruggero II (Haskins, 1925; Tronzo, 1994; Schramm, 2001). Presso la sua corte operò come astrologo **Michele Scoto** (1175 circa-1235), di origine scozzese o irlandese (Burnett, 2002a), citato anche tra gli indovini nel XX canto dell'*Inferno* di Dante (vv. 115-117: «Quell'altro che ne' fianchi è così poco, / Michele Scotto fu, che veramente / de le magiche frode seppe 'l gioco»); egli aveva imparato l'arabo dai traduttori toledani e si era cimentato fin dal 1217 in traduzioni dall'arabo di opere di contenuto astronomico, cui aggiunse anche interessi per l'astrologia, la fisiognomica e la zoografia. A Federico II dedicò la traduzione dell'opera di Avicenna e divenne ben presto il primo traduttore dell'opera di Averroè (Morpurgo, 1984); attorno al suo personaggio sono nate svariate leggende ⁸, che hanno fornito ispirazione anche allo scrittore inglese

⁸ A lui viene attribuita la profezia sul nome del luogo della morte di Federico II, che avrebbe contenuto un riferimento ad un fiore; l'imperatore avrebbe evitato scrupolosamente Firenze, ma, si sarebbe fermato, gravemente infermo, nella sua residenza pugliese di Castel Fiorentino, ignorando il toponimo, e qui morì effettivamente nel 1250. Michele avrebbe invece predetto per sé una morte dovuta alla caduta di un sasso sulla sua testa; nonostante le precauzioni prese, un giorno in chiesa una pietra sarebbe caduta dalla volta e lo avrebbe ucciso.

Walter Scott (1771-1832) nel suo poema *Lay of the last Minstrel* (Haskins, 1925; Tronzo, 1994; Schramm, 2001), in cui appare il fantasma di Michele Scoto. Al di là degli aspetti poco verosimili del suo rapporto con l'imperatore, va ricordato che Federico II lo interpellava effettivamente sulle questioni più varie di carattere naturalistico, teologico o genericamente soprannaturale.

Altro personaggio di particolare rilievo della corte federiciana, subentrato alla morte di Michele Scoto, è **maestro Teodoro**, la cui origine sembra greco-siriana (Antiochia), come il nome di derivazione greca potrebbe attestare, ma esiste anche l'ipotesi di una sua discendenza ebraica (Burnett, 1997a). Egli sarebbe giunto presso la corte imperiale inviato forse dal sultano d'Egitto (Morpurgo, 1984; Burnett, 1994b). Si occupò (con scarso successo) di dispute teologiche (a Brescia nel 1238 contro i domenicani, in particolare Rolando da Cremona), di astrologia (a Padova, dove fu deriso per la sua imperizia dagli studiosi locali), ma soprattutto di alchimia (aveva a corte un laboratorio per rifornire il quale gli era concesso credito illimitato). Era grande conoscitore di greco e di arabo e tradusse dall'arabo per l'imperatore il trattato di falconeria di **Moamyn**, il falconiere arabo di corte (Haskins, 1921). Si narra che, durante un assedio interminabile alla città di Faenza, l'imperatore passasse il tempo correggendo le inesattezze del contenuto, dato che era un grande esperto di questa tecnica di caccia. Un filo rosso lega inoltre la corte di Federico II alla figura di Fibonacci, messo alla prova proprio dal matematico **Giovanni da Palermo** (v. 8.2.4.), della cui vita sono giunte scarse notizie: si tratta verosimilmente dell'omonimo notaio di corte.

In età angioina, sotto il regno di Carlo I (1268-1285) e Carlo II (1285-1309) fiorirono ancora traduzioni soprattutto in campo medico (Ippocrate e Galeno), il cui massimo esponente fu il calabrese **Niccolò da Reggio** (o Nicola Deoprepio).

4.2.2. *La Spagna*

La Spagna fu di gran lunga la terra più importante delle tre per il suo ruolo nella trasmissione diretta della cultura araba nel mondo cristiano. Fin dal secolo VIII, la maggior parte della penisola era stata soggetta all'influenza araba, sotto la quale per alcuni secoli Musulmani, Cristiani ed Ebrei erano convissuti pacificamente. Per molti aspetti, poiché la Spagna musulmana (*al-Andalus*) possedeva una vivace cultura araba, essa poteva fornire un vasto materiale per le traduzioni: versioni arabe di originali greci, opere di grandi matematici, astronomi, e fisici arabi orientali ed andalusi (Lévy, 1992; Langermann, 1999). Studiosi di origine spagnola bilingui o plurilingui resero possibile ed anzi agevole il lavoro di traduzione in ebraico e latino, ma non detennero il monopolio di questa attività, che attrasse anche scienziati stranieri: essi giunsero in Spagna, impararono l'arabo, tradussero i testi loro più congeniali e diffusero nelle terre d'origine le

nuove conoscenze acquisite, come si è già visto nel caso di Gerberto d'Aurillac, che attraversò i Pirenei per studiare la matematica.

Al-Andalus infatti non era un mondo separato ed inaccessibile. Contatti fra questa regione e il Nord dell'Europa sono dimostrati, secondo Lindberg (Lindberg, 1976), oltre che dalla presenza di Gerberto d'Aurillac sopra ricordata, anche dallo scambio diplomatico tra **Abd al-Rahman III**, califfo di Cordoba, e l'imperatore di Germania **Ottone I**. Nel 953 Ottone inviò come suo rappresentante in una tormentata ambasceria (Renzi Rizzo, 2002) il monaco lorenese **Giovanni di Gorze** (?-976), per un negoziato con il califfo a proposito della pirateria fatimita nell'area di Frassaneto. Nel corso delle faticose trattative Giovanni rimase a Cordova per oltre tre anni e conobbe un Ebreo spagnolo chiamato **Hasdeu**, che sapeva arabo e latino, ed anche **Recemundus**, un mozarabita (ossia di religione cristiana, ma di cultura e lingua araba) della corte del califfo, che più tardi fu inviato alla corte ottoniana a Francoforte. Sia Giovanni sia Recemundus erano studiosi, desiderosi quindi di viaggiare per estendere le proprie conoscenze. Giovanni, da una precedente missione diplomatica in Italia meridionale, era tornato con i manoscritti greci delle *Categorie* di Aristotele e dell'*Isagoge* di Porfirio; dal canto suo, Recemundus, matematico ed astronomo, era co-autore del calendario di Cordoba. Non si può determinare con certezza se in questo scambio diplomatico siano stati trasferiti anche manoscritti da una regione all'altra, ma è del tutto plausibile.

Il fenomeno delle traduzioni in Spagna assunse tuttavia dimensioni notevoli in seguito alla *Reconquista*, quando il materiale manoscritto passò dalle mani degli Arabi a quelle dei Cristiani. Toledo, allora centro culturale di prim'ordine in cui convivevano le tre anime culturali della Spagna (cristiana, ebraica e musulmana), passò sotto il governo cristiano nel 1085 e con il suo patrimonio manoscritto attrasse studiosi da tutta Europa, fin dalla Scandinavia e dal Galles (Burnett, 1987b, 1998).

A Toledo, l'arabo era la lingua franca per una comunità internazionale di studiosi, la maggior parte dei quali era giunta dai quattro angoli dell'Europa per apprenderla; tuttavia essa non era riservata ai dotti, ma era parlata da molti cittadini comuni, dal momento che qui continuavano a coesistere musulmani, ebrei, cristiani mozarabici, cristiani di origine castigliana (la parlata romanza che si affermò verso la fine dell'epoca di splendore toledano, contemporaneamente al declino del califfato di Cordoba).

4.2.3. I regni crociati

Pur essendo il luogo meno vivace dei tre sul fronte delle traduzioni, la zona sottratta agli Arabi nel corso delle Crociate ebbe anch'essa due traduttori di rilievo per la storia della scienza. Durante la prima metà del XII secolo, **Stefano di Antiochia** tradusse la *Dispositio regalis* del fisico **Ali ibn al-Abbas** insieme ad

un glossario di medicina; nel secolo successivo **Filippo da Tripoli** si occupò del *Secretum secretorum* dello pseudo-Aristotele. In particolare la Siria sembra aver giocato un ruolo considerevole (Burnett, 1997a).

Attiya (Attiya, 1999), in una rassegna della letteratura sull'argomento, cita studiosi come La Monte (La Monte, 1929), che hanno a loro volta sottolineato l'importanza dei regni crociati nella storia medievale nella cultura dei Franchi lì trasferitisi. Sempre Attiya dimostra, indicando eventi e personaggi storici precisi, la conoscenza e la comprensione dell'arabo da parte dei Franchi ⁹.

4.3. LA FIORITURA DEL XII E XIII SECOLO

Il culmine dell'attività di traduzione dall'arabo al latino si raggiunse nel XII secolo. Il movimento si era tanto esteso al di là del suo scopo pratico originario (acquisire nozioni di medicina e di astronomia) da comprendere l'intero insieme del sapere filosofico e scientifico (Høyrup definisce *onnivori* questi traduttori), ed aveva travalicato anche i confini geografici, diffondendosi in tutta Europa (Høyrup, 1996).

Tra il 1116 e il 1142, uno dei pionieri di questo movimento fu **Adelardo di Bath** (circa 1080-1160), la cui biografia è stata ricostruita da Burnett e da Cochrane (Burnett, 1987a; Cochrane, 1994). In gioventù, egli era andato in Francia, aveva studiato a Tours ed insegnato a Laon; poi aveva viaggiato, a proprie spese, raggiungendo Salerno, la Sicilia, la Cilicia, la Siria e forse la Palestina. In Oriente avrebbe conosciuto la lingua araba e potrebbe aver riportato con sé libri arabi al ritorno, ma non esistono prove certe. L'unica altra informazione biografica è che egli fu, per un certo tempo, tutore del futuro re d'Inghilterra Enrico II Plantageneto (Haskins, 1911). Prima di diventare un traduttore, egli ebbe interessi enciclopedici, che manifestò in alcune prime brevi opere, non molto affini alla cultura araba: *De eodem et diverso*, *Questiones Naturales* e *Regule abaci* (Burnett, 1996). Nel campo dell'astronomia matematica, tradusse lo *Zij* di al-Khawarizmi, rivisto dall'astronomo cordobese **al-Majriti**, fatto che suggerì l'ipotesi di un soggiorno in Spagna da parte di Adelardo, ma è più verosimile (Lindberg, 1976) che il testo arabo sia stato portato in Inghilterra da un ebreo convertito, **Petrus Alfonsi** detto anche **Mosé Sepharadi** (1062-1110), medico del re e forse iniziatore della traduzione (Burnett, 1997d; Álvarez, 2000). Infine Adelardo diede una completa traduzione degli *Elementi* di Euclide, garantendo in questo modo il fondamento astronomico e matematico alla nascente scienza europea (Busard, 1983; Burnett,

⁹ Richard (Richard, 1999) approfondisce l'argomento della presenza franca in Oriente, indagandone le caratteristiche culturali.

1997b; Hackett, 2002). Adelardo si distingue fra i traduttori coevi proprio perché nella sua carriera di studioso e traduttore non figura un soggiorno in Spagna, che, come si è detto, era nel pieno della *Reconquista* da parte di León, Castiglia ed Aragona: dopo la caduta di Toledo, sarebbe stata la volta di Cordova e Siviglia (Zaimèche, 2005) nella prima metà del XIII secolo.

Alcuni traduttori erano oriundi spagnoli (Burnett, 1977). **Johannes Hispanensis** (Giovanni da Siviglia) era probabilmente un mozarabita, nato a Sud nel territorio arabo, ma vissuto a Nord tra i Cristiani, a Limia e Toledo (Thorndike, 1959) nel XII secolo. Importante per la tradizione dell'*Hisab al-hindi* di al-Khawarizmi la sua traduzione *Alghoarismi de practica arismetrice* (v. 7.).

Un altro Spagnolo interessato all'astronomia nel XII secolo fu **Ugo di Santalla** (Burnett e Pingree, 1997), la cui opera ebbe come patrono Michele, vescovo di Tarazona (in Aragona), dedicatario della maggior parte delle sue traduzioni.

Non ci furono solo Iberici nelle fila dei traduttori in Spagna, ma anche, come si è detto, stranieri che si trasferivano qui anche senza conoscere l'arabo e restavano a lavorare alle traduzioni.

Roberto di Chester giunse dall'Inghilterra; il suo amico **Hermann di Carinzia** o **Hermann il Dalmata** o **Ermanno Tedesco** (Burnett, 1978, 1987c; Romano, 1996), era uno slavo originario dell'Istria o della Carinzia slovena; **Platone da Tivoli**, documentato nel XII secolo in Spagna, era verosimilmente italiano (Burnett, 1987c).

Una delle ragioni che spingevano molti a questo viaggio viene dettagliatamente studiata in un saggio di Vegin Casas (Vegin Casas, 1998), che analizza il suggestivo rapporto tra matematica e cammino di Santiago de Compostela. Molti protagonisti dell'attività di traduzione in Spagna hanno avuto un qualche rapporto con la strada del pellegrinaggio giacobeo: Gerberto d'Aurillac era passato per il Cammino; Roberto di Chester, invece, era arcidiacono a Pamplona, importante città visitata dal pellegrini nel loro viaggio; anche Pietro il Venerabile, abate di Cluny e committente di traduzioni, soggiornò presso Roberto a Pamplona.

Alla collaborazione fra Roberto di Chester e **Hermann di Carinzia** vanno attribuite le traduzioni del Corano (Martín Duque, 1962) e di alcuni trattati di teologia, chieste proprio da Pietro il Venerabile; Roberto lavorò anche alla traduzione dell'*Algebra* di al-Khawarizmi ed al *De iudiciis astrorum* di al-Kindi; nonostante l'arcidiaconato a Pamplona, tornò anche in Inghilterra. Hermann probabilmente studiò sotto Thierry di Chartres, ma dal 1138 fu impegnato in Spagna nell'attività di traduzione del *Planisfero* di Tolomeo, dell'opera astrologica (*Liber introductorii maioris ad scientiam iudiciorum astrorum*) di abu Macshar al-Balhki e forse anche degli *Elementi* di Euclide.

Platone da Tivoli trascorse, a quanto si sa, la maggior parte della sua carriera a Barcellona, dove collaborò con l'ebreo **Savasorda**. Si occupò prevalentemente di astronomia (*Quadripartitum* di Tolomeo e *De motu stellarum* di

al-Battani), ma tradusse anche il *Liber embadorum* di Savasorda e forse opere di Archimede, assistito sempre dal matematico ebraico (Martín Duque, 1962).

Nella seconda metà del XII secolo, il fulcro dell'attività di traduzione si concentrò a Toledo (Gil, 1985; Gonzalvez Ruiz, 1996) attorno alla figura dell'arcivescovo **Ramon** (o Raimundo) e gli sopravvisse fino almeno al 1187, anche se alcuni storici affermano che non è corretto parlare già di una vera e propria scuola (González Palencia, 1942; Sobrino Vázquez, 1990; El-Madkouri Maataoui, 1999).

Domenico Gundissalinus o **Gundisalvi** (1105-1181), arcidiacono di Cuéllar (Segovia), era appassionato di cultura araba ed ebraica (Rivera, 1951); visse per un certo tempo a Toledo, dove collaborò con l'israelita filosofo **Aven-dauth** (v. 7.1.3.) alla traduzione del *De anima* di Avicenna, dedicandolo all'arcivescovo Johannes de Toledo (Hispanus), attorno alla metà del XII secolo.

Gerardo da Cremona (circa 1114-1187) è generalmente considerato il miglior traduttore di Toledo (Burnett, 1987b; Pizzamiglio, 1993), anche se esiste una voce dissonante, quella di **Ruggero Bacone** (1214-1294), che esprime un giudizio discutibilmente negativo (Lemay, 1978; Rignani, 2007) sull'opera di molti traduttori: «Ma altri che tradussero infinite opere in latino, come Gerardo da Cremona, Michele Scoto, Alfredo Anglico, Ermanno Alemanno non conoscevano le lingue, neanche la latina»¹⁰. La vastità della sua produzione gli è valsa comunque una fama di infaticabile. Nato verso il 1114 a Cremona, dove fece i primi studi, Gerardo, per imparare l'arabo e in cerca dell'*Almagesto* di Tolomeo, si spostò intorno al 1140 a Toledo, dove la sua presenza è documentata dal 1144 e dove morì nel 1187 (Björnbo, 1905). Nel frattempo tradusse anche molte altre opere in latino, dedicandovi 30 o 40 anni della sua vita. La sua produzione a lui attribuita è vastissima: tra i 70 e gli 80 libri, compresi almeno 12 sull'astrologia, 17 trattati di matematica e ottica, di filosofia naturale e 24 testi di medicina. Alcune tra le più famose delle opere tradotte sono gli *Elementi* di Euclide (Busard, 1984), l'*Algebra* di al-Khawarizmi, la *Fisica* di Aristotele, il *Canone di medicina* di **Avicenna**, il *Liber mensurationum* di **Abu Bakr** (Busard, 1968; Dunlap, 1995). La padronanza linguistica di Gerardo e la sua competenza nelle varie discipline erano tali che egli seppe riprodurre in latino non solo il senso esatto, ma anche le sfumature del testo arabo (Negri, 1994). La quantità di opere realizzate ha fatto supporre (Lindberg, 1976) che Gerardo dirigesse un gruppo di traduttori e una parziale conferma viene da **Daniele di Morley** (1140-1210), che studiò astronomia sotto Gerardo e testimonia della collaborazione del maestro con un mozarabita di nome **Galippus** (Rose, 1874; Sudhoff, 1914).

¹⁰ *Alii vero qui infinita converterunt in latinum ut Gerardus Cremonensis, Michael Scotus, Alvredus Anglicus, Hermannus Alemannus nec linguas scirent, etiam non latinam* (Grabmann, 1966).

Un altro traduttore già citato in ambiente siciliano (v. 4.2.1.), ma importante per il suo contributo alla diffusione dei testi matematici arabi anche in Spagna, è **Michele Scoto** (1175-1236), la cui origine (scozzese o irlandese) non è ancora stata chiarita (Burnett, 1994c). La sua carriera si divise fra Spagna e Italia: nel 1217 era a Toledo a tradurre il *De motibus celorum* di al-Bitruji e il *De animalibus* di Avicenna, ma nel 1215 era stato mandato a Roma (Rivera, 1951) per il Concilio Lateranense IV dal suo arcivescovo e patrono Rodrigo Jimenez come suo rappresentante. Importanti sono anche i suoi rapporti con la corte di Federico II (a partire dal 1220) e con Leonardo Fibonacci.

Opera di traduttori anonimi è invece la versione latina dell'*Algebra* di **Abu Kamil**, il cui originale data pochi decenni dopo quella omonima di al-Khawarizmi. Del testo rimangono alcune copie: una in arabo (Arabic MS Kara Mustafa Kütübhane 379 a Istanbul); una copia del XIV secolo della traduzione latina (a Parigi, Bibliothèque Nationale, Lat. 7377A)¹¹, due versioni in ebraico (Paris, Bibliothèque Nationale, Cod. Heb 1029/7; Munich, Bayerische Staatsbibliothek, Cod. Heb. 225), di cui la seconda, commentata da **Mordecai Finzi** (attivo a Mantova nel XV secolo), è stata tradotta in tedesco (Weinberg, 1935) ed in inglese (Levey, 1966). Grazie a quest'opera arrivarono in Occidente gli algoritmi di Abu Kamil per la risoluzione di equazioni di primo e di secondo grado ed il suo metodo per trattare equazioni quadratiche anche indeterminate. Nonostante ne sia rimasta solo una copia in lingua latina e quindi si possa supporre una limitata diffusione, l'opera ha esercitato certamente un forte influsso sul *Liber Abaci* e sulla *Practica geometriae* di Leonardo Fibonacci. A partire dal 1473, Finzi tradusse in ebraico dal volgare toscano anche il trattato d'algebra (v. 10.1.1.) di Maestro Dardi da Pisa del 1344 (Lévy, 2007).

4.4. IL CONTRIBUTO EBRAICO

Il ruolo degli Ebrei nella trasmissione del sapere islamico è talvolta ridotto dagli studiosi ad una pura e semplice mediazione: gli Ebrei spagnoli, che spesso conoscevano l'arabo, erano nella condizione perfetta per servire l'Occidente cristiano, traducendo i libri arabi in una lingua veicolare (ebraico o volgare romanzo, come il castigliano o il catalano), da cui poi altri avrebbero potuto facilmente trasporli in latino. Lindberg (Lindberg, 1976) ritiene che questa descrizione catturi solo una parte della verità, dal momento che studiosi ebraici svolgevano abitualmen-

¹¹ Già studiato da Karpinski (Karpinski, 1914a), il manoscritto è stato pubblicato in edizione critica da Sesiano (Sesiano, 1993), che attribuisce la paternità della traduzione a Guglielmo de Lunis; Hissette invece solleva dubbi (Hissette, 1996).

te attività remunerata di traduzione per committenti cristiani. Gli Ebrei avevano però anche una vita culturale ed intellettuale autonoma e le traduzioni dall'arabo all'ebraico servivano a soddisfare le esigenze della comunità ebraica, del tutto simili a quelle dei Cristiani. Questo duplice aspetto, avverte Lindberg, va sempre tenuto presente nello studio del contributo ebraico alla trasmissione del sapere.

Il già citato **Abraham bar Hiyya**, ossia **Savasorda**, trascorse la sua vita per lo più a Barcellona, nonostante fosse in contatto con altre comunità ebraiche nella Francia meridionale; con l'intento di divulgare la scienza araba, offrendo agli Ebrei testi che permettessero loro di istruirsi nei vari campi del sapere, scrisse opere di cosmografia, astronomia e geometria. Come si è visto in 4.3, proprio una sintesi di quest'ultima fu tradotta, nel 1145 da Platone da Tivoli, con il titolo di *Liber embadorum* (Libro sulle aree), con l'aiuto dell'autore (Curtze, 1902). Il testo è una versione ampliata della seconda parte dell'*Algebra* di al-Khawarizmi, dedicata al calcolo di aree e volumi, ma contiene anche nozioni di algebra. Savasorda sapeva che il quinto caso presentato da al-Khawarizmi ($ax^2 + c = bx$) ammette due soluzioni distinte e fornisce una dimostrazione geometrica dei 6 casi, basandosi sul secondo libro degli *Elementi* di Euclide. Egli tratta il calcolo di superfici e volumi di figure piane e di solidi, illustrando i fondamenti dell'algebra attraverso la risoluzione di problemi geometrici (Lévy, 2007). Il *Liber embadorum* sarebbe servito anche a Leonardo Fibonacci per la sua *Practica geometriae* (Baldelli, 1965); la versione originale in lingua ebraica potrebbe essere stata una fonte per il *Sefer habeshbon v'hammiddoth* di **Mordecai Comtino** (v. 10.10.2.). Altri studiosi (Levey, 1954) hanno posto l'accento su una traduzione dell'altra opera di al-Khawarizmi, ossia dell'*Aritmetica*, attribuendo a Savasorda la paternità del più antico algoritmo latino (v. 7.6.).

Abraham ibn Ezra o **Abenezra** (circa 1089-1167), nato a Tudela in Navarra o a Toledo secondo altre fonti, studiò a Cordova, dedicandosi prevalentemente all'astrologia (Smith, 1918; Sela, 2003); compose molti libri in ebraico, basati sulla scienza araba (su numeri, calendario, astrolabio e astrologia), tradotti oltre un secolo dopo in francese da un altro ebreo, **Hagin**, ed in latino da **Henri Bate de Malines** e da altri. Ibn Ezra visitò, tra il 1140 e il 1167, molte città (Roma, Salerno, Lucca, Pisa, Mantova, Verona, Béziers, Narbonne, Bordeaux, Angers, Dreux, Londra e Winchester), lavorando alla compilazione delle tavole astronomiche indispensabili agli gnomonisti di quelle città; tradusse anche in ebraico i *Commentarii* di ibn al-Muthanna (X secolo) sulle tavole astronomiche di al-Khawarizmi. Introdusse nel mondo ebraico la numerazione posizionale, utilizzando le prime nove lettere dell'alfabeto ebraico più un circolino per indicare lo zero. Di incerta paternità, è una traduzione latina ¹² del XII secolo,

¹² I manoscritti che la contengono si trovano a Parigi, (Bibliothèque nationale, Lat. 7266, Lat. 9335, Lat. 7377 A) e a Cambridge (University Library, Mm. II. 18).

intitolata *Liber augmenti et diminutionis*, che tratta la doppia falsa posizione ¹³: il testo di partenza potrebbe essere attribuito a ibn Ezra, come fa Libri sulla sola scorta del nome dell'autore (Abraham) indicato nel catalogo dei manoscritti della biblioteca reale di Parigi (Libri, 1838), o ad Abu Kamil, per l'affinità dei contenuti (v. 3.7.); Hughes (Hughes, 2001) fa un catalogo dei manoscritti superstiti e censisce le varie attribuzioni di paternità; come si è visto in 3.2.1., Rashed (Rashed, 2007) invece lo riferisce direttamente ad al-Khawarizmi, considerandolo un secondo libro di aritmetica.

L'esigenza di queste traduzioni in ebraico era sentita in modo particolarmente forte nella Francia meridionale e in Italia, dove vivevano grandi comunità ebraiche, con scarse conoscenze di arabo. Alcuni membri della famiglia **ibn Tibbon**, trasferitasi dalla Spagna in Linguadoca e Provenza nel 1150, lavorarono per soddisfarla: **Judah** (1120-1190), tradusse opere di filosofia e teologia; il figlio **Samuel** (1150-1232) volse in ebraico *La guida dei perplessi* del filosofo Mosè Maimonide, scritta in arabo, nonostante l'autore fosse ebraico, i *Microtegni* di Galeno col commento di Ali ibn Ridwan; e la versione araba della *Meteorologia* di Aristotele; il nipote **Moses** (1240-1283) fu ancora più fecondo, spaziando nei vari campi del sapere dalla fisica, all'astronomia, alla meteorologia, alla metafisica, alla medicina, alla matematica, alla geometria; il pronipote **Jacob ben Machir ibn Tibbon**, (1236-1305), detto anche **Profatius Iudaeus**, fece studi di medicina a Montpellier e continuò l'attività di famiglia, ispirandosi a Savasorda, ossia non solo collaborò con studiosi cristiani nell'elaborare volgarizzamenti che rendessero possibili versioni latine di trattati arabi sulle scienze esatte, ma scrisse anche alcuni libri (Thorndike, 1936).

Talvolta il volgare non rappresentava una lingua veicolare, ma era la lingua di arrivo definitiva. Nel XIII secolo, alla corte di Alfonso X il Saggio (1221-1284), re di Castiglia e di León e discendente del Barbarossa, come Federico II, molte opere in arabo venivano tradotte in castigliano da dotti di origine ebraica, spesso coadiuvati da notai di corte che si occupavano della versione definitiva dell'opera e solo in qualche caso di una sua ulteriore traduzione in latino (Procter, 1945; Romano, 1971). Le opere scientifiche alfonsine riguardano l'astronomia e l'astrologia, all'epoca discipline non ancora differenziate. Tra i quindici cortigiani del re che collaborarono a queste opere solo cinque erano ebrei, ma essi furono i più attivi: **Yehuda ben Mose** e **Ishaq ben Sid**, ad esempio, si dedicarono alla redazione o alla traduzione di almeno 20 opere, mentre i traduttori non ebrei (**Juan d'Aspa**, **Egidio de Tebaldis** e **Bernardo l'Arabo**, per citarne alcuni) si limitarono a 12 opere. Il contributo fondamentale di questi studiosi fu la creazione di un lessico scientifico castigliano (soprattutto astronomico) sul modello dell'arabo (Van Schoy, 1940; Márquez Villanueva, 1994; Chabás, 1995).

¹³ Per una sintetica trattazione storica delle origini e delle applicazioni di questa tecnica di calcolo, v. Schwartz (Schwartz, 2004) e Papakonstantinou (Papakonstantinou, 2007).

Nel XIV secolo i testi cominciarono ad essere tradotti anche in catalano e poi via via in tutte le lingue europee, in un'irresistibile ascesa del volgare (Verger, 1999), soprattutto per opere di largo interesse, come quelle di aritmetica, geometria, medicina, chirurgia e astrologia.

5.

LA TRADIZIONE LATINA DELL'ALGEBRA DI AL-KHAWARIZMI

Nel passaggio da Oriente ad Occidente nel XII secolo, l'*Algebra* subì grosse trasformazioni: innanzitutto, il titolo originale *Al-kitāb al-muktasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābalah* si trasformò in latino nel più semplice «algebra» (nelle varianti *geber*, *algibra*, *arcibra*, *alcibra*, *argebra*, *arzirbra*, etc.); inoltre, delle tre parti che la componevano, solo due giunsero in Europa e separatamente: la terza, indissolubilmente legata al mondo islamico, non ebbe fortuna, ma alcuni ritengono di averne trovato qualche traccia nell'opera di Fibonacci (Mahoney, 1976).

La prima parte fu tradotta, come è stato detto, prima da **Roberto di Chester** nel 1145 a Segovia e in seguito da **Gerardo da Cremona** a Toledo intorno al 1170 e infine da **Guglielmo de Lunis** nel XIII secolo. Una sintesi è contenuta anche nel *Liber Alchorismi* di Magister Johannes del 1143 (Allard, 1997).

La seconda parte, relativa alla tradizione araba della *ilm al-misāba*, trattava problemi analoghi a quelli di geometria pratica svolti successivamente in latino, ma con tecniche matematiche più elaborate. In particolare, aggiungeva l'algebra agli strumenti utilizzabili dall'agrimensore e in genere dallo studioso, permettendo di risolvere non solo i consueti problemi di determinare altezze, aree e volumi, ma anche altri di divisione di superfici e volumi e di trovare lunghezze sulla base di varie combinazioni di dimensioni note e incognite. La paternità non fu attribuita ad al-Khawarizmi, anzi ne comparve una versione ebraica, rimaneggiata ed ampliata, ad opera di Savasorda, tradotta in latino da Platone da Tivoli nel 1145, con il titolo di *Liber embadorum* (Curtze, 1902). Un contenuto molto simile si trova anche nel *Liber in quo terrarum et corporum continentur mensurationes* o *Liber mensurationum*, traduzione di Gerardo da Cremona dell'opera di **Abu Bakr** (865-932).

Ci si potrebbe aspettare l'addensarsi di un formidabile e universale interesse attorno a queste opere, data la generale arretratezza delle conoscenze europee, ma la realtà è che invece suscitavano l'attenzione di pochissimi, almeno nei primi due o tre secoli dalla loro traduzione. Non solo il numero di manoscritti è esiguo, ma, cosa più importante, pochissimi matematici del XII, XIII o XIV

secolo mostrano familiarità con essi. Il *Liber Abaci* di **Fibonacci**, il *Quadripartitum numerorum* (v. 10.2.) di **Johannes de Muris** (o Jean de Meurs) sono tra le rare eccezioni. La spiegazione di questo fenomeno va ricercata, secondo Mahoney (Mahoney, 1976), nell'enfasi attribuita da al-Khawarizmi alle finalità pratiche dell'opera e nella scelta di un pubblico che comprendeva lettori di estrazione culturale modesta, come mercanti ed amministratori. Per questa ragione l'opera non accese per molto tempo l'interesse dei *magistri* delle arti liberali: rimase sulla piazza del mercato e non entrò all'università.

5.1. I MANOSCRITTI

La questione dei manoscritti dell'*Algebra* è già stata tracciata nelle sue linee essenziali (Hughes, 1982), anche se in tempi non recenti. Sulla base degli *incipit* e di successive ricerche, Hughes (Hughes, 1982, 1986, 1989) è arrivato ad identificare tre famiglie di manoscritti riconducibili ai tre traduttori sopra menzionati.

A. **In nomine Dei pii et misericordis (Roberto di Chester)**

1. Vienna, Nationalbibliothek, Cod. lat. 4770, ff. 1r-12v, metà XIV secolo*
2. Dresda, Sächsische Landesbibliothek, Cod. lat. C 80, ff. 340r-348v, fine XV secolo*
3. New York, Columbia University Library, Cod. lat. X 512, Sch. 2 Q, metà XVI secolo
4. Trier, Stadtbibliothek, cod. 1924/1471, ff. 393r-400v, metà XV secolo*

B. **Hic post laudem Dei et ipsius exaltationem (Gerardo da Cremona)**

1. Parigi, Bibliothèque nationale, Cod. lat. 9335, ff. 110v-116v, inizio XIII secolo*
2. Parigi, Bibliothèque nationale, Cod. lat. 7377A, ff. 34r-43r, metà XIII secolo*
3. Parigi, Bibliothèque nationale, Cod. fr. 16965, ff. 2r-19v, inizio XVI secolo*
4. Firenze, Biblioteca Nazionale, Cod. lat. San Marco 216, ff. 80r-83v, inizio XIV secolo*
5. Cambridge, University Library, Cod. lat. Mm. 2.18 ff. 65r-69v, inizio XIV secolo*
6. Madrid, Biblioteca Nacional, Cod. lat. 9119, ff. 352v-362r, inizio XVI secolo
7. Vaticano, Biblioteca Vaticana, Cod. Urb. Lat. 1329, ff. 43r-63r, datato 1458
8. Vaticano, Biblioteca Vaticana, Cod. Vat. Lat. 5733, ff. 275r-287r, inizio XVI secolo*
9. New York, Columbia University Library, Cod. lat. Plimpton 188, ff. 73r-82v, datato 1456

* Manoscritto utilizzato per l'edizione critica rispettivamente da Hughes o da Kaunzner.

10. Milano, Biblioteca Ambrosiana, Cod. lat. A 183 Inf., ff. 115-120, inizio XIV secolo*
11. Milano, Biblioteca Ambrosiana, Cod. lat. P 81 Sup., ff. 1-22, inizio/metà XV secolo
12. Berlino, Deutsche Staatsbibliothek Preussischer Kulturbesitz, Hamilton 692, ff. 279r-291v, inizio XVI secolo
13. Berlino, Deutsche Staatsbibliothek Preussischer Kulturbesitz, Lat. qu.529, ff. 2r-16v, metà XV secolo
14. Parigi, Bibliothèque nationale, Cod. lat. 949, ff. 226r-247v, 11 dicembre 1450
15. Torino, Biblioteca Nazionale Universitaria, H V 45, ff. 1r-36r, fine XV secolo

C. **Unitas est principium numeri (Guglielmo de Lunis)**

1. Vaticano, Biblioteca Vaticana, Cod. Vat. Lat. 4606, ff. 72r-77r, fine XIII secolo*
2. Oxford, Bodleian Library, Cod. lat. Lyell 52, ff. 42r-49v, inizio XIV secolo*

5.2. ROBERTO DI CHESTER

La traduzione di Roberto di Chester (detto anche **Robertus Retinensis** o **Robert of Ketton**), realizzata nel 1145, ha una prima edizione critica nel 1915 ad opera di Karpinski (Karpinski, 1915): essa si basa tuttavia su un unico manoscritto del XVI secolo (A-3 dell'elenco) copiato dal matematico tedesco **Johann Scheubel** (1494-1570), che contiene una revisione del manoscritto, più che una sua fedele trascrizione (Reich, 1996). La scelta di Karpinski si era basata sul fatto che «*the chapter division and subtitles, many of which he supplied, make the text easier to follow*», ma l'editore aveva tenuto anche conto, sia pure come risorse secondarie, di altri due manoscritti del XV secolo, Dresda C80 e Vienna 4770 (A-1 e A-2).

Hughes, nel 1989, pubblica una nuova edizione critica, basandosi esclusivamente sui manoscritti più antichi, ossia escludendo A-3 (New York) e affiancandone un terzo, A-4 (Trier 1924), coevo ad A-1 (Vienna).

5.2.1. Esame delle copie manoscritte

Hughes nota che tutte e tre i manoscritti hanno in comune lo stesso *incipit*; sono scritti da copisti diversi ma di area germanica; nessuno di essi è apografo di uno degli altri.

* Manoscritto utilizzato per l'edizione critica rispettivamente da Hughes o da Kaunzner.

Il codice di Vienna (di seguito W) contiene sei trattati di matematica, scritti da mani diverse: tra essi, spiccano il *De numeris datis* di Giordano Nemorario e parte di una copia della versione adelardiana degli *Elementi* di Euclide. Nell'*Algebra* non sono presenti disegni, probabilmente assenti anche nell'esemplare da cui è stata copiata; manca inoltre la legenda dei simboli medievali per le costanti, le radici e i quadrati, collocata da Roberto in appendice.

Il codice di Dresda (D), invece, contiene ben 80 testi matematici di autori come Boezio, Campano da Novara, Johannes de Gmundis, Johannes de Muris, Sacrobosco, Giordano Nemorario, Nicola Oresme. Appartenuto a **Johannes Widmann von Eger** (1462-1498), docente di algebra all'Università di Lipsia (v. 10.4.2.), secondo Hughes, servì al suo proprietario per preparare le proprie lezioni: presenta correzioni e note di almeno due mani diverse.

Il codice di Trier (T), oltre a una ventina di trattati di contenuto religioso legati al mondo certosino dell'abbazia di Sant'Albano, cui apparteneva il codice, contiene tre opere di argomento matematico: due di Regiomontanus (*Disputatio contra Cremonensia in planetarum theoricam deliramenta* e *Varia Geometrica*) e la copia dell'*Algebra*.

Le relazioni fra le tre copie dipendono, secondo Hughes, da tre fattori:

- **contenuto:** D e T hanno in comune i titoli di sezione, assenti in W; T e W presentano un lungo periodo assente in D; D e W hanno in comune un paragrafo, mancante in T;
- **antenato recente:** D e T hanno un antenato comune che non è l'esemplare di W;
- **antenato remoto:** la presenza di due errori congiuntivi significativi e numerosi errori numerici suggerisce un antenato remoto comune.

Di qui lo stemma in *fig. 5.1*.

5.2.2. Frammenti

Hughes ipotizza un'ulteriore famiglia di manoscritti, sulla base di alcuni frammenti identificati in vari codici:

- Trascrizione di un commento di **Adriaan van Roomen** (1561-1615) all'*Algebra* di al-Khawarizmi, basato su una quarta copia della traduzione di Roberto di Chester fatta dall'astronomo ceco **Thaddaeus Hagecius** (Tadeáš Hájek z Hájku) di Praga, vissuto tra il 1525 e il 1600. Non si possiedono né il commento né la copia, ma solo la trascrizione del commento, fatta da Bosmans a Lovanio nel 1906, in cui compare un estratto della copia (Bosmans, 1906).
- **Dresda C80m**, f. 1, trascritto dallo stesso Hughes e studiato da Kaunzner (Kaunzner, 1968).
- Introduzione all'*Algebra*, contenuta nel **Dresda C80**, nei ff. 304r-305r, di mano di Widmann, che forse aveva iniziato a trascrivere personalmente il manoscritto.

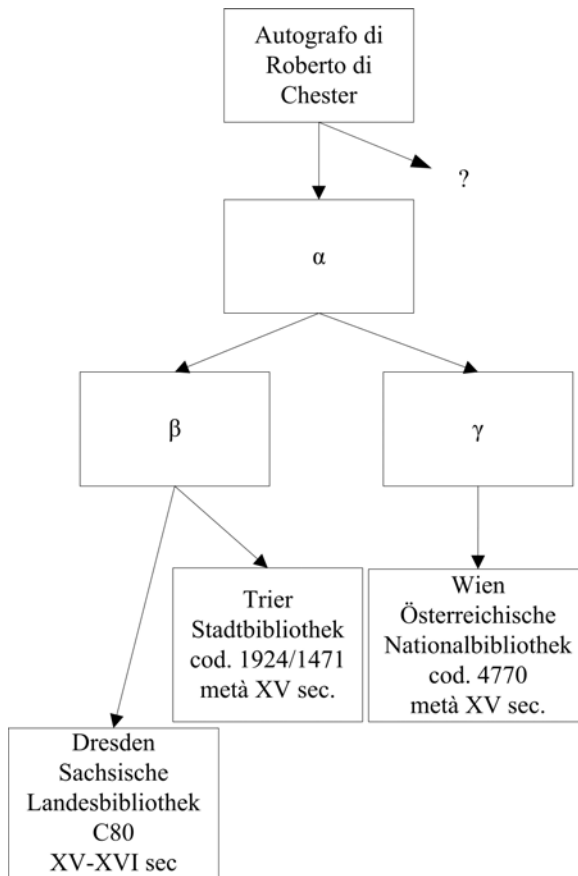


Fig. 5.1. – Stemma dei manoscritti di Roberto di Chester secondo Hughes.
(Adattato da Hughes, 1989)

- Due copie della sezione dedicata ai problemi mercantili, entrambe derivate da W: una conservata a **Dresda**, sempre nel **C80** nel f. 301r; l'altra, apografo della precedente, a Lipsia, Universitätsbibliothek, 1470, f.460.

Sulla base delle notizie riportate da Hughes e di ulteriori studi, mi è stato possibile reperire nuove informazioni sui manoscritti collegati alla tradizione in questione. In particolare, ricercando notizie sul commento di van Roomen, è emersa l'esistenza a Douai, presso la Bibliothèque Municipale, di un manoscritto, già descritto da Sarton nel 1934 (Sarton, 1934) e presente nel Kartei Folkerts.

Lo stemma potrebbe quindi essere integrato come nella *fig. 5.2*.

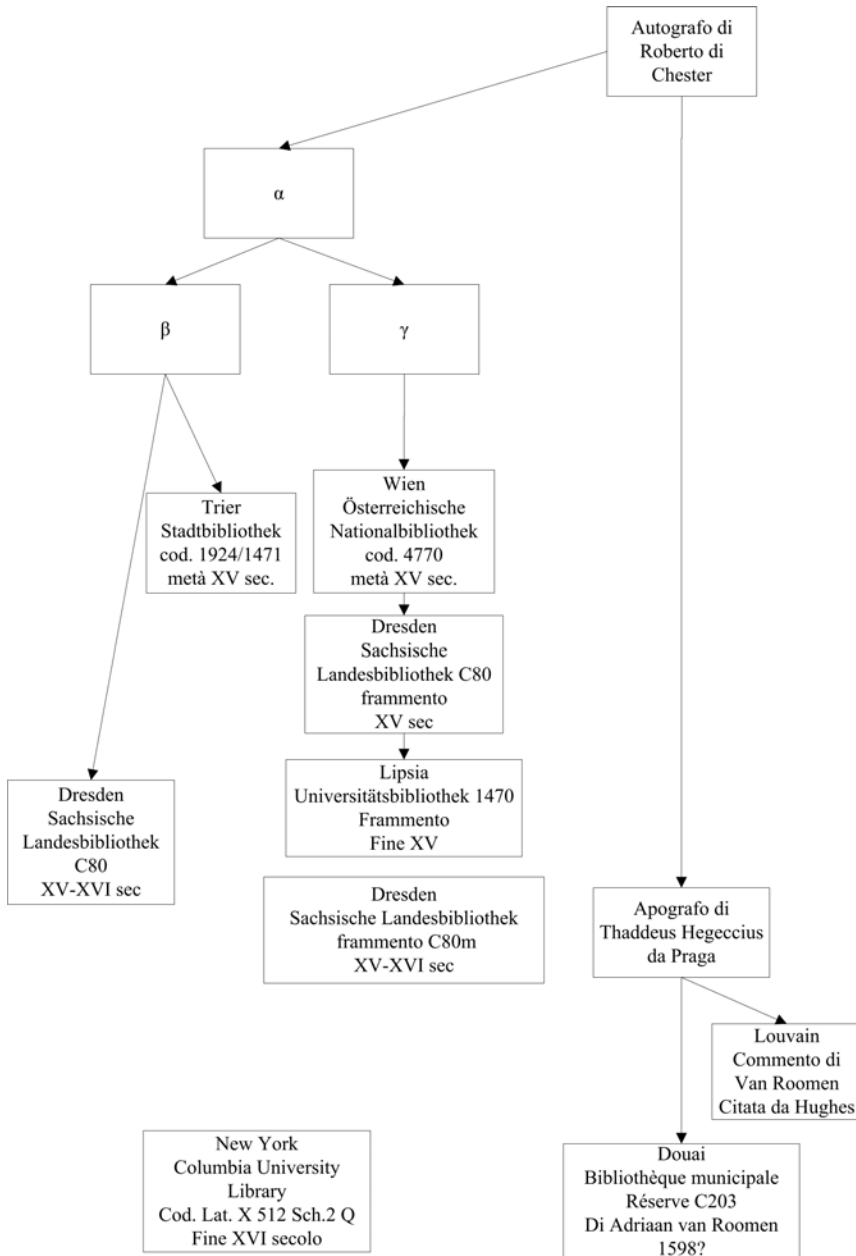


Fig. 5.2. – Stemma completo dei manoscritti di Roberto di Chester.

5.2.3. Analisi del trattato

Il testo è strutturato come segue ¹:

Note introduttive: presentazione del sistema di numerazione in base 10.

Trattato:

1. Sei casi di equazioni con esempi risolti
 - a. Osservazioni preliminari e definizione dei termini
 - b. Equazioni semplici
 - i. $ax^2 = bx$
 - ii. $ax^2 = c$
 - iii. $bx = c$
 - c. Equazioni composte
 - i. $ax^2 + bx = c$
 - ii. $ax^2 + c = bx$
 - iii. $bx + c = ax^2$
 - d. Dimostrazioni geometriche per ciascuna equazione composta
2. Operazioni con esempi risolti
 - a. $(10a + b)(10a + c), a \in \mathbb{N}; b, c \in \mathbb{Z}$
 - b. Moltiplicazioni e divisioni di radici quadrate
3. Esempi dei sei casi di equazioni
 - a. Sei problemi risolti
 - b. Sedici ulteriori problemi risolti, a partire dai sei casi di equazioni
4. «Regola del Tre» con tre esercizi risolti

Appendice: sintesi dei sei casi di equazioni, con soluzioni generali (ricorso ai simboli per radici, numeri e quadrati).

A parte l'estrema brevità con cui viene tradotta l'introduzione, spiegabile con il contenuto storico e religioso di nessun interesse in Occidente, la traduzione presenta nella prima parte gli stessi contenuti delle altre traduzioni e della copia in arabo (da rilevare la traduzione del termine *mal* con *substancia*). Nella seconda parte, quella relativa al calcolo, compaiono ben 14 esempi con radici quadrate.

La terza parte contiene due gruppi di problemi risolti, allo scopo di rafforzare le competenze del discente: il primo si riferisce a problemi direttamente riconducibili ai sei casi generali della prima parte, il secondo, costituito di 16 esercizi, esemplifica 5 dei 6 casi generali ($bx = c$ viene escluso, perché di immediata risoluzione).

Si riporta in *tab. 5.1.* una sintesi dei problemi presentati da Roberto, completa dell'indicazione del tipo secondo Oaks e Alkhateeb ²:

¹ Hughes introduce la numerazione di capitoli e paragrafi.

² Vedi 3.4.6. (Oaks e Alkhateeb, 2005).

Tab. 5.1. – Problemi nella traduzione di Roberto.

NUMERO	TIPO	EQUAZIONE RISOLVENTE	POSIZIONE IN RASHED
1	10	$x(10 - x) = 21$	1
2	10	$(10 - x)^2 - x^2 = 40$	2
3	10	$(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x) - x = 54$	3
4	10	$(10 - x)^2 = 81x$	6
5	M	$\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$	8
6	M	$x^2x = 3x^2$	16
7	M	$4x \cdot 3x = x^2 + 44$	17
8	M	$4x \cdot 5x = 2x^2 + 36$	18
9	M	$4x^2 = 3x^2 + 50$	19
10	M	$\left[x - \left(\frac{x}{3} + 3 \right) \right]^2 = x$	21
11	M	$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = x$	22
12	D	$\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + x} = 2x$	24
13	M	$x \cdot \frac{2}{3}x = 5$	26
14	D	$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$	28
15	M	$\frac{x^2 - 4x}{3} = 4x$	32
16	M	$(x^2 - 3x)^2 = x^2$	34

Degna di nota è anche la nomenclatura usata per le frazioni: per indicare un dodicesimo, ad esempio, Roberto scrive *medietas sexte*; Schub (Schub, 1932) spiega che essa è diffusa anche nella letteratura matematica ebraica e dipende da una peculiarità delle lingue semitiche (ebraico ed arabo), con le quali, non esistendo i numerali ordinali superiori a dieci, non si potevano esprimere direttamente le frazioni che ne richiedevano l'uso, ma era necessario indicarle con un'operazione (un prodotto o una somma di frazioni unitarie), se erano scomponibili oppure, in caso contrario, con una perifrasi (con *tredici parti di diciannove* si indicava, ad esempio, la frazione $13/19$) ed erano perciò denominate *inesprimibili*.

Contro questa tesi stanno però le seguenti considerazioni:

1. solo la lingua ebraica è difettiva dei numerali ordinali superiori a 10;
2. l'espressione di un numero frazionario come somma o prodotto di frazioni egizie è già ricorrente nell'aritmetica greca (Diofanto);
3. tale scomposizione può rappresentare una tecnica per facilitare il calcolo, soprattutto se espresso in linguaggio naturale.

Saïdan (Saïdan, 1997) afferma che gli Arabi erano perfettamente in grado di riconoscere ed usare la notazione frazionaria, ma semplicemente preferivano ricorrere a somme di frazioni unitarie.

La quarta parte della traduzione di Roberto è dedicata alla spiegazione della regola del tre, che si presenta piuttosto confusa dal punto di vista lessicale. Innanzitutto, i quattro nomi dei termini della proporzione sono dati in arabo: nell'ordine, *almuzarar*, *alszarar*, *almuthemen* o *magul* (l'incognita) e *althemen*. Il principale problema per uno studente non è tuttavia la difficoltà di memorizzare i nomi arabi, quanto piuttosto l'inconsistenza nel loro uso già negli esempi (non sempre l'ordine è mantenuto).

L'appendice costituisce una sorta di prontuario delle equazioni, corredato della legenda di simboli utili per rappresentare i tre termini e delle regole per risolvere i sei casi, anche se in un ordine diverso da quello dell'originale. I simboli sono:

$\mathcal{Z}$	substantia
θ	radix
$\emptyset$	costante

Fig. 5.3. – Simboli nella traduzione di Roberto di Chester.

L'uso di simboli analoghi sarebbe diventato molto frequente nella Germania meridionale nel XV secolo (v. 10.4.), tanto è vero che i maestri tedeschi (Widmann e Ries) che hanno avuto a disposizione copie del manoscritto non solo non hanno glossato questi segni, ma talvolta ne hanno aggiunti, come nota anche Hughes.

5.3. GERARDO DA CREMONA

È la traduzione più fedele e perciò più estesa dell'opera di al-Khawarizmi, come ci si poteva aspettare da questo esperto traduttore.

Nel suo confronto fra il manoscritto utilizzato da Rosen e le traduzioni di Gerardo, Høyrup (Høyrup, 1990) sottolinea che, nonostante la notevole distanza fra i due testi soprattutto nel capitolo sulle dimostrazioni geometriche, il testo di Gerardo rappresenta un'importante testimonianza del processo evolutivo dell'opera di al-Khawarizmi e il manoscritto arabo di Oxford è il risultato di una «normalizzazione stilistica», che l'ha inevitabilmente allontanato dall'originale dell'autore più del testo di Gerardo.

5.3.1. *Esame delle copie manoscritte*

I 15 codici che contengono copia dell'algebra tradotta da Gerardo sono stati suddivisi nell'edizione critica di Hughes (Hughes, 1986) in due gruppi sulla base della datazione e della maggiore o minore presenza di varianti o errori o anche di rielaborazioni lessicali.

Il primo gruppo, quello che risale al XIII-XIV secolo ed è stato usato per l'edizione critica, è costituito di 7 manoscritti (B-1, B-2, B-3, B-4, B-5, B-8, B-10, di seguito indicati rispettivamente come P, Q, N, F, C, V, M); il secondo è più tardo e comprende i manoscritti B-6, B-7, B-9, B-11, B-12, B-13, B-14, B-15, considerati testimoni dell'importanza o almeno della diffusione dell'opera di al-Khawarizmi in Europa.

Il confronto delle varianti tra i testi del primo gruppo ha permesso a Hughes di distinguere due famiglie, α e β , i cui membri sono rispettivamente: C, N, P, Q e F, M, V. Per quanto riguarda le differenze intrafamiliari, Hughes nota che P è il manoscritto più antico della famiglia α ed anche la copia migliore; Q, N e C sono apografi reciprocamente indipendenti di P. I membri della seconda famiglia mettono in evidenza significative differenze, pertanto nessuno è diretto discendente dell'altro.

Lo stemma proposto da Hughes per i sette manoscritti del primo gruppo è quello in *fig. 5.4*.

Per ciò che concerne gli altri, Hughes non formula nessuna ipotesi sulla loro collocazione nella tradizione, ma individua una famiglia di quattro manoscritti (B-7, B-9; B-11; B-15) accomunati dalla presenza di un paragrafo intitolato *Modus Dividendi* dedicato alla divisione (più precisamente alla razionalizzazione di frazioni), da lui per questo denominato *Modus Family*, il cui contenuto è presente anche in *Aliaabra Argibra* di Maestro Dardi (v. 10.1.1.). All'analisi della *Modus Family* è dedicato il cap. 6. I restanti manoscritti sono ancora in attesa di essere approfonditamente studiati.

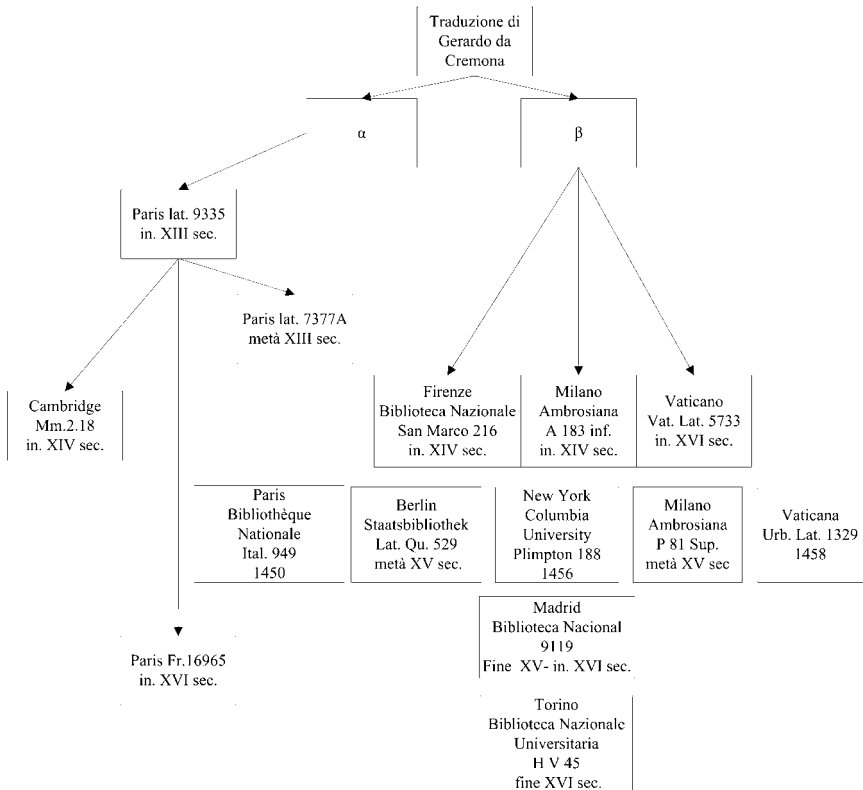


Fig. 5.4. – Stemma dei manoscritti di Gerardo da Cremona (da Hughes).

5.3.2. Esame del trattato

Il trattato è diviso in 8 capitoli più un'appendice, con il seguente contenuto:

1. **Introduzione:** presentazione del sistema di numerazione in base 10 e dei termini algebrici
2. Sei casi di equazioni con esempi risolti
 - a. Equazioni semplici
 - i. $ax^2 = bx$
 - ii. $ax^2 = c$
 - iii. $bx = c$
 - c. Equazioni composte
 - i. $ax^2 + bx = c$
 - ii. $ax^2 + c = bx$
 - iii. $bx + c = ax^2$
3. Dimostrazioni geometriche per ciascuna equazione composta
4. Capitolo sulla moltiplicazione
5. Capitolo su somma e differenza
6. Capitolo di problemi (sei problemi risolti)
7. Dodici ulteriori problemi risolti, a partire dai sei casi di equazioni
8. «Regola del Tre» con tre problemi risolti

Appendice: 21 problemi risolti di varia lunghezza e difficoltà

Si riportano di seguito la sintesi (tab. 5.2.) dei problemi presentati nel capitolo 7 e nell'Appendice (tab. 5.3.):

Tab. 5.2. – Problemi nella traduzione di Gerardo (cap. 7).

NUMERO	TIPO	EQUAZIONE RISOLVENTE	POSIZIONE IN RASHED
1	10	$x(10 - x) = 21$	1
2	10	$(10 - x)^2 - x^2 = 40$	2
3	10	$(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x) - x = 54$	3
4	10	$\frac{10 - x}{x} + \frac{x}{10 - x} = 2 + \frac{1}{6}$	4
5	10	$\frac{5x}{2(10 - x)} = 5(10 - x)$	5
6	10	$(10 - x)^2 = 81x$	6

NUMERO	TIPO	EQUAZIONE RISOLVENTE	POSIZIONE IN RASHED
7	10	$x - y = 2 \wedge \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$	8
8	10	$\frac{x(10-x)}{10-2x} = 5 + \frac{1}{4}$	10
9	M	$4x \cdot 5x = 2x^2 + 36$	18
10	M	$\left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 = x$	-
11	10	$\frac{\frac{3}{2}}{1+x} = 2x$	24
12	D	$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}$	28

Tab. 5.3. – Problemi nella traduzione di Gerardo (appendice).

NUMERO	TIPO	EQUAZIONE RISOLVENTE	POSIZIONE IN RASHED
1	10	$(10-x)^2 = 81x$	6
2	10	$10x = (10-x)^2$	9
3	M	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}x^2 = \frac{x}{7}$	11
4	M	$x^2 \cdot 4x^2 = 20$	-
5	M	$x^2 \cdot \frac{x^2}{3} = 10$	-
6	M	$x^2 \cdot 4x^2 = \frac{x^2}{3}$	-
7	M	$x^2x = 3x^2$	16
8	M	$3x \cdot 4x = x^2 + 44$	17
9	M	$4x \cdot x = 3x^2 + 50$	19

NUMERO	TIPO	EQUAZIONE RISOLVENTE	POSIZIONE IN RASHED
10	M	$x^2 + 20 = 12x$	20
11	M	$\frac{x^2}{3} \cdot \frac{x^2}{4} = x^2$	-
12	M	$\left(\frac{x^2}{3} + 1\right)\left(\frac{x^2}{4} + 2\right) = x^2 + 13$	23
13	M	$\left(x^2 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{4} - 4\right)^2 = x^2 + 12$	-
14	M	$\frac{2}{3}x^2 = 5$	26 e 29
15	M	$x^2 - y^2 = 2 \wedge \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{2}; x > y$	-
16	M	$x^2 \cdot 3x = 5x^2$	30
17	M	$\left(x^2 - \frac{x^2}{3}\right)3x = x^2$	31
18	M	$\frac{(x^2 - 4x)}{3} = 4x \wedge x^2 = 256$	32
19	M	$\sqrt{x^2 - x} + x = 2$	33
20	M	$(x^2 - 3x)^2 = x^2$	34
21	M	$x^2 \left(\frac{2}{3}x^2\right) = 5$	-

Interessante appare anche l'uso di un lessico tecnico uniforme:

1. *reducere*: riportare il coefficiente di x^2 a 1, moltiplicando tutti i termini dell'equazione per il reciproco del coefficiente stesso, nel caso di $a > 0$ (*al-radd*)³;
2. *reintegrare*: lo stesso che *reducere*, in caso di $0 < a < 1$ (*al-ikmal*);
3. *opponere*: sottrarre un termine positivo da entrambi i membri dell'equazione (*al-muqabalab*);
4. *restaurare*: aggiungere l'opposto di un termine negativo ad entrambi i membri dell'equazione (*al-jabr*).

³ V. Oaks e Alkhateeb (Oaks e Alkhateeb, 2007).

5.4. GUGLIELMO DE LUNIS

All'attività del traduttore **Guglielmo de Lunis** (o de Luna o Lunensis) viene attribuita la terza traduzione dell'*Algebra*, databile nel terzo quarto del XIII secolo, proprio al termine dell'età federiciana. I suoi dati biografici sono di difficoltosa ricostruzione: Hissette (Hissette, 1997, 2003) ha esaminato ripetutamente le due possibili ipotesi sull'identità di questo traduttore. Potrebbe infatti essere identificato nel **Wilhelmo** o **Guillelmo de Luna**, autore cui è attribuita la versione latina dei commentari di Averroé all'*Isagoge* di Porfirio e ai *Predicamenta* di Aristotele, composta a Napoli tra il 1220 e il 1230 (Lacombe et al., 1939); oppure nel padre di un lettore d'astronomia e filosofia dell'ateneo bolognese, sulla base di un repertorio dei docenti, risalente al 1302, in cui si cita tale **Giovanni di Guglielmo Lunense** (Alidosi, 1623): in questo caso la traduzione si collocherebbe piuttosto attorno al 1240-1250. Libri (Libri, 1838) ritiene probabile che il secondo sia da identificarsi con il traduttore, mentre Steinschneider (Steinschneider, 1904-1905) per primo avanza l'ipotesi che si tratti sempre della stessa persona. Hissette invece ritiene che tutte le supposizioni siano altrettanto probabili, allo stato attuale delle conoscenze; ed anzi (Hissette, 1996) dubita della paternità di alcune delle traduzioni a lui attribuite (ad esempio, dell'opera di Abu Kamil).

Due sono i codici che ne contengono una copia di questa versione dell'*Algebra* (cfr. 5.1.); l'edizione critica di Kaunzner (Kaunzner, 1986), realizzata nel 1986, si basa principalmente sul manoscritto di Oxford (C-1, di seguito denominato L), ma riporta in nota le varianti e gli errori di un altro codice conservato in Vaticano (C-2, di seguito V). Fatto importante, Kaunzner rileva che V è stato in passato erroneamente attribuito a Gerardo da Cremona, a causa dell'*incipit*⁴, e si augura, pubblicando il testo, che ulteriori studi accertino la paternità della traduzione.

In realtà, già da qualche anno, Hughes (Hughes, 1982) riteneva Guglielmo un ottimo candidato per la paternità dell'opera sulla base di una serie di considerazioni.

- I manoscritti della famiglia C presentano alcune caratteristiche importanti, che li differenziano dagli altri:
 - sono più brevi e mancano di alcuni problemi, presenti invece nelle famiglie A e B;
 - il lessico dei manoscritti della famiglia C non sembra rivelare una frequentazione della Spagna da parte del traduttore: infatti mancano completamente arabismi;

⁴ Inizia il libro che dagli Arabi è chiamato Algebra e Almucabala e da noi è denominato libro di restaurazione, e fu tradotto dal maestro Gerardo da Cremona a Toledo dall'arabo in latino (*Incipit liber qui secundum Arabes uocatur algebra et almucabala, et apud nos liber restauracionis nominatur, et fuit translatus a magistro Guirardo Cremonense in Toletum de arabico in latinum*).

- l'autore si rivolgeva ad un pubblico di non principianti su questi argomenti: la regola del tre è spiegata in modo ancor più sintetico rispetto alle altre due versioni; non mancano nemmeno riferimenti ad Euclide, che invece non compaiono in A e B;
- l'autore introduce nuove idee e innovazioni non presenti nelle famiglie A e B: raccomanda l'uso dei simboli per incognite (r), dragme (d) e censi (c), secondo l'esempio diofantino.
- I tre traduttori accreditati dell'*Algebra* sono Roberto di Chester, Gerardo da Cremona e Guglielmo de Lunis:
 - la famiglia A ha certamente Roberto come autore dell'autografo: diverse fonti lo attestano (sia W sia Scheubel);
 - per le famiglie B e C, il problema è più complesso: B-4 indica come traduttore **magister Guillelmo de Lunis**; B-8 si riferisce a **Simon Cremone**; B-6 e C-1 indicano Gerardo. Hughes conclude comunque che la tradizione, che lega la famiglia B a Gerardo, e soprattutto il fatto che B-1 appartenesse alla biblioteca del trovatore e cancelliere della cattedrale di Amiens **Richard de Fournival** (1190-1260) siano argomenti conclusivi per attribuire a Gerardo la paternità di B; sempre secondo Hughes, le altre affermazioni, per esempio di C-1, vanno considerate errori, dovuti, almeno in quel caso, al desiderio del copista di legare il proprio lavoro ad un nome famoso.

Anche la Franci (Franci, 2003b) concorda con Hughes nell'attribuzione a Guglielmo, identificandolo in uno dei traduttori di Averroè; la studiosa fa notare che il nome di Guglielmo compare anche nel manoscritto Cod. lat. San Marco 216 (inizio XIV sec.) della Biblioteca Nazionale di Firenze (B-4), dove, prima della traduzione dell'*Algebra* fatta da Gerardo, si trova la nota contemporanea «*Incipit liber geber de numero translatus a magistro Guillelmo de Lunis in quadriviali scientia peritissimo*». Il fatto che la glossa sia erronea non toglie completamente validità storica al passo: la Franci conclude infatti che, «all'epoca, Guglielmo era ritenuto autore di una traduzione dell'*Algebra*».

La studiosa aggiunge inoltre che in un rilevante manoscritto della metà dello stesso secolo, la *Practica d'arismetricha* di **Maestro Benedetto da Firenze**, si trova un'altra citazione di Guglielmo. A carta 368r, è scritto: «*Rendiamo gratie all'Altissimo, così chomincia el testo de l'Aghabar arabico nella reghola del geber la quale noi diciamo algebra. la quale reghola d'algebra, secondo Guglielmo de Lunis traduttore [...]*»; segue un adattamento in volgare della parte iniziale dell'*Algebra*. La Franci ricorda anche le menzioni del nome di Guglielmo fatte nel XVI secolo da **Raffaello di Giovanni Canacci**⁵ e da **Francesco di Lionardo**

⁵ *La regola dell'argibra, la quale reghola Gbuglielmo de Lunis la traslatò d'arabico a nostra lingua* in Cod. Palat. 567, Biblioteca Nazionale, Firenze (Karpinski, 1911).

Ghaligai ⁶ (1490-1536) (Karpinski, 1911). Queste fonti avevano indotto alcuni storici (Cossali, 1797; Libri, 1838; Sarton, 1931) a pensare che la traduzione di Guglielmo fosse stata fatta in volgare italiano; Hughes ritiene invece che si tratti di un'assunzione arbitraria di autori più recenti: è possibile che questi conoscessero solo l'*Algebra* in volgare (Urb. Lat. 291), dato che Benedetto da Firenze lo chiama semplicemente *translator*, senza precisare la lingua di arrivo della traduzione.

V è stato pubblicato da Boncompagni a metà XIX secolo (Boncompagni, 1850-1851) e ne esiste una traduzione in volgare italiano sempre in Vaticano, attribuita da Hughes allo stesso Guglielmo de Lunis (Urb. Lat 291, ff.34r-41v) e studiata dalla Franci (Franci, 2003b) e da Hissette (Hissette, 2003).

5.4.1. Esame delle copie manoscritte

Hughes nota che i due manoscritti hanno un differente esito; mentre V termina bruscamente con *explicit*, L si ferma ad un paragrafo non conclusivo ⁷: «Con i sei capitoli precedenti, si possono trovare le soluzioni ad infiniti problemi; ma coloro che vogliono procedere con questa tecnica, devono conoscere bene l'estrazione di radici quadrate e cubiche e come [i radicali] si moltiplichino, si dividano, si sommino e si sottraggano fra loro. Lo stesso con i binomi e con le frazioni»; l'editore ne ricava pertanto che non si può parlare di una discendenza diretta di C-2 da C-1.

5.4.2. Analisi del trattato

Il testo è strutturato come segue ⁸.

Note introduttive: presentazione del sistema di numerazione in base 10.

1. Sei casi di equazioni con esempi risolti
 - a. Osservazioni preliminari e definizione dei termini: *radix*, *census* e *numerus*
 - b. Equazioni semplici (capitoli denominati *minores*)
 - i. $ax^2 = bx$
 - ii. $ax^2 = c$
 - iii. $bx = c$

⁶ Dice Benedetto la Regola dell'Arcibra, quale Guglielmo de Lunis la traslatò d'Arabo in nostra Lingua (cap. 10).

⁷ Cum predictis 6 capitulis possunt solutiones infinitarum questionum reperire [sic]. Set oportet eos qui secundum hunc modum procedere volunt scire diligenter radicum extractionem in cubicis et quadratis et qualiter inter se multiplicentur, dividuntur [sic], addantur vel subtrahantur. Et etiam similiter de binomiis et recisis.

⁸ La numerazione di capitoli e paragrafi è mia e viene introdotta per omogeneità con le altre due traduzioni.

- c. Equazioni composte (capitoli *maiores*)
 - i. $ax^2 + bx = c$
 - ii. $ax^2 + c = bx$
 - iii. $bx + c = ax^2$
 - d. Dimostrazioni geometriche per ciascuna equazione composta
 2. Operazioni con esempi risolti
 - a. Rappresentazione simbolica di censi, radici e dragme
 - b. Moltiplicazioni e divisioni di censi, radici e dragme
 - c. Operazioni sulle radici con dimostrazioni
 3. Proporzione di quattro numeri (regola del tre)
 4. Esempi dei sei casi di equazioni
 - a. Dieci problemi risolti, a partire dai sei casi di equazioni
- Si riporta di seguito in *tab. 5.4.* una sintesi dei problemi presentati ⁹:

Tab. 5.4. – Problemi nella traduzione di Guglielmo.

NUMERO	TIPO	EQUAZIONE RISOLVENTE	POSIZIONE IN RASHED
1	10	$x(10 - x) = 21$	1
2	10	$(10 - x)^2 - x^2 = 40$	2
3	10	$(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x) - x = 54$	3
4	10	$\frac{10 - x}{x} + \frac{x}{10 - x} = 2 + \frac{1}{6}$	4
5	10	$\frac{5x}{2(10 - x)} = 5(10 - x)$	5
6	M	$\frac{x}{x + 2} = \frac{1}{2}$	8
7	10	$\frac{x(10 - x)}{10 - 2x} = 5 + \frac{1}{4}$	10
8	M	$4x \cdot 5x = 2x^2 + 36$	18
9	M	$\left[x - \left(\frac{x}{3} + 3 \right) \right]^2 = x^2$	21
10	10	$10x = (10 - x)^2$	9

⁹ Il problema 9 è posto diversamente in Oxford, Bod., Hunt. 214; nell'edizione critica di Rashed e da Roberto di Chester.

Come si vede, la traduzione evidenzia elementi di diversità rispetto alle precedenti, pur in presenza di tutti gli argomenti ordinati come nell'originale di al-Khawarizmi (ad eccezione della Regola del tre). Omissioni rispetto alle altre due traduzioni riguardano il paragrafo sulla moltiplicazione di binomi, dove è stato ridotto a 10 il numero di problemi e di alcuni si dà solo il testo con il suggerimento del capitolo per la soluzione. Un altro elemento di diversità consiste nella presenza della doppia soluzione per i problemi riconducibili ad equazioni del caso $ax^2 + c = bx$, di cui vengono anche forniti esempi. Guglielmo, inoltre, nel corso delle dimostrazioni geometriche delle formule risolutive richiama il secondo libro degli *Elementi* di Euclide, riferimento non presente in nessun'*Algebra* (né in arabo né in latino) finora pubblicata.

Il fattore innovativo più degno di attenzione di questa traduzione è senz'altro, a giudizio della Franci (Franci, 2003b), l'uso di uno specifico simbolismo per rappresentare i polinomi; che si tratti di una novità che ha conosciuto una qualche diffusione è dimostrato da due fatti:

- questa parte è interamente conservata nella traduzione in volgare (Urb. Lat. 291);
- un simbolismo analogo è presente in un altro manoscritto del XV secolo (Biblioteca Nazionale Centrale di Roma, Vittorio Emanuele 379).

Possiamo quindi concludere che la traduzione di Guglielmo, benché più limitata nella parte operativa (problemi), offre un impianto teorico migliore per sistematicità e esaustività; la Franci spiega la quasi totale mancanza di problemi con il riferimento al contesto storico: in pieno XIII secolo il pubblico di aspiranti algebristi ha a sua disposizione il *Liber Abaci* di Fibonacci, con la sua raccolta di 96 problemi risolti.

Hissette (Hissette, 2003) sottolinea invece come l'opera contenuta nei due manoscritti abbia forti punti di contatto sia con l'*Algebra* di al-Khawarizmi sia con i capitoli XIV e XV del *Liber Abaci* e con la *Practica geometriae*; pertanto risulta una vera e propria rielaborazione dell'originale, imperniata sulla fusione delle due tradizioni, quella araba e quella delle scuole d'abaco.

5.5. CONFRONTO FRA LE TRE VERSIONI

Per quanto riguarda il contenuto, possiamo certamente affermare che le tre traduzioni sono state fatte a partire da una copia in lingua araba dell'*Algebra* di al-Khawarizmi e che non esibiscono differenze di contenuto matematico, ma la lunghezza ineguale denuncia chiaramente che i tre traduttori hanno operato selezioni e sintesi del contenuto. Infatti la traduzione di Roberto è la più completa; quella di Gerardo è a sua volta più accurata di quella di Guglielmo, per le ragioni che abbiamo visto.

Le omissioni riguardano in particolare:

- **l'introduzione:** come abbiamo visto, è la parte che si rivolge alla divinità, ispiratrice dell'opera; Roberto si dilunga più di Gerardo, che invece sintetizza il lungo paragrafo di al-Khawarizmi nella frase «*post laudem Dei et ipsius exaltationem*»; invece Guglielmo omette completamente qualsiasi riferimento a Dio, confermando il maggior grado di rielaborazione che la sua traduzione presenta;
- **le dimostrazioni:** la maggiore sintesi di Guglielmo rispetto agli altri due evidenzia anche la sua distanza dall'originale arabo, che, come abbiamo visto, si dilunga con prolissità e ridondanza in tutti i dettagli, più fedelmente riportati da Roberto e Gerardo;
- **i problemi:** anche in questo caso i due testi più antichi presentano una stretta corrispondenza, mentre la traduzione di Guglielmo restringe sensibilmente il numero di problemi e non presenta la soluzione estesa di tutti.

Nonostante la maggior concisione o l'omissione di parti, i tre trattati, ritengono Hughes (Hughes, 1982), mantengono la loro efficacia rispetto allo scopo. Infatti, contenuto, organizzazione e finalità (sviluppare abilità nella risoluzione di problemi attraverso le tecniche algebriche) restano invariati.

Infine, i tre testi presentano un'appendice, anche se dedicata a contenuti diversi:

- Roberto presenta la sintesi della teoria delle equazioni;
- Gerardo aggiunge una batteria di 21 problemi per ulteriore esercizio, che, secondo quanto figura in B-1, sarebbe stata ripresa da un altro testo (*in alio tamen libro repperi hec interposita suprascriptis*);
- Guglielmo ripropone il cap. 15 del *Liber Abaci* di Fibonacci.

5.6. IL FRAMMENTO DEL LIBER ALCHORISMI

Allard (Allard, 1997), ripromettendosi di darne l'edizione critica, ha individuato nell'ultima parte di una delle traduzioni latine dell'opera aritmetica di al-Khawarizmi, il *Liber Alchorismi de pratica arismetice* (v. 7.1.3.), un frammento dell'*Algebra*, dal titolo *Exceptiones de libro qui dicitur gebla et mucabala*. Lo studioso l'ha denominata *versione I*, in quanto più antica delle altre.

I contenuti sono limitati ai tre casi composti, ridotti in forma canonica¹⁰ e accompagnati da alcuni esempi numerici; Allard stesso rileva come ci siano

¹⁰ O che il quadrato, [sommato] con tante volte la sua radice, produca il numero; o che il quadrato, [sommato] con un tale numero, produca tante volte la radice; o che tante volte la radice [sommata] con tale numero produca il quadrato. *Aut que res cum tociens radice sua efficiat numerum; aut que res cum tali numero efficiat tociens radicem; aut que tociens radix cum tali numero efficiat rem.*

scelte lessicali differenti da quelle degli altri traduttori, dal momento che il termine *res* in questa versione indica il quadrato dell'incognita, *radix* si riferisce all'incognita e *numerus* indica il termine noto.

6. MODUS FAMILY

6.1. I MANOSCRITTI

Il gruppo di manoscritti di cui si presenta la collazione è stato individuato da Hughes (Hughes, 1986) sulla base della presenza di varianti o aggiunte rispetto alle altre copie delle traduzioni di Gerardo.

I quattro manoscritti sono i seguenti:

NY = New York, Columbia University, Butler Library Plimpton 188, ff. 73r-82v (*Liber Machumeti de algebra et almuchabala id est recuperationis et oppositionis*), Germania, 1456

Dono di David Eugene Smith (1860-1944) a George A. Plimpton (1855-1936), è il prodotto del lavoro di più mani, essendo costituito di sei parti datate diversamente. La (1) e la (2) datano 1450-1499 e la copia è attribuita, pur con qualche incertezza, a **Regiomontanus** (1436-1476), che ne era stato comunque uno dei proprietari precedenti a Smith; la (3) 1500-1515; la (4) che data 1500-1550 è ulteriormente ripartita in tre parti dello stesso copista, **Dominicus de Clavasio**; la terza è datata 1501; la (5) 1450-1499 e la (6) 1500-1550. Tutta la bibliografia è concorde nell'assegnare il manoscritto ad area germanica.

Il manoscritto inerente all'algebra (2) presenta alcune caratteristiche peculiari: innanzitutto, l'aggiunta di una lunga sezione definita da Hughes *Collectanea mathematica*, ossia una raccolta di problemi ¹ risolti retoricamente e simbolicamente (ff. 82r-84v), una sintesi dell'algebra di al-Khawarizmi ², ossia il corrispondente quattrocentesco di un formulario attuale con le regole da

¹ Hamann (Hamann, 1980) sostiene che la stessa aggiunta si trova anche in Madrid 9119 (ff. 359r-363v), proprio in chiusura dell'Algebra di al-Khawarizmi. Questo gruppo di problemi è attualmente oggetto di studio da parte di Folkerts, che ha avuto comunque già modo di delineare il ruolo esercitato da Regiomontanus sulla divulgazione dell'algebra dall'Italia all'area germanica (Folkerts, 2002).

² Sulla prima pagina di questa parte compare a margine la data 1456.

seguire ³ (85r-88r), altri problemi risolti simbolicamente (88v-89r) ed ancora osservazioni su aritmetica, algebra e geometria solida (90r-94r). Attualmente l'edizione della sezione del manoscritto riguardante i problemi è in corso da parte di Folkerts ⁴, che prevede ancora alcuni anni per portarla a termine.

Il testo è anche corredato di disegni esplicativi delle dimostrazioni presentate: Kaunzner (Kaunzner, 1986), in una nota all'edizione critica del manoscritto contenente una traduzione dell'*Algebra* di al-Khawarizmi, prima attribuita a Gerardo da Cremona e in seguito a Guglielmo de Lunis (Hughes, 1986), rileva la presenza nel Plimpton 188 della quadrettatura, utilizzata da Regiomontanus per garantire il rispetto delle proporzioni ⁵.

Sui margini o a piè di pagina sono presenti, attribuiti sempre a Regiomontanus, i numeri progressivi dei vari problemi, ulteriori esempi numerici o grafici di calcoli, brevi note esegetiche o parafrasi semplificata dei contenuti esposti nel corpo della pagina, tutti segnali palesi di una finalità eminentemente didattica dell'opera.

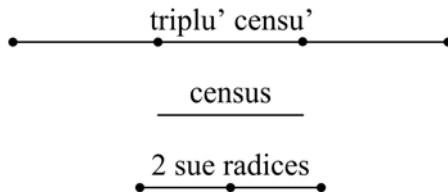


Fig. 6.1. – Manoscritto Plimpton 188, 82r – rappresentazione geometrica di «triplum census», «census» e «2 sue radices».

Nell'illustrazione qui riprodotta a titolo di esempio, si notano la rappresentazione di $3x^2$, x^2 e $2x$, indicati rispettivamente come *tripplus census*, *census* e *2 sue radices*, e rappresentati da segmenti che ne mostrano anche la proporzione reciproca (v. Libro VII degli *Elementi* di Euclide e *Liber quadratorum* di Fibonacci, v. 8.2.4.).

³ Nonostante l'omogeneità della grafia del copista (Regiomontanus?), si notano una maggiore varietà lessicale (compare, ad esempio, il termine *valor*) ed una sintassi prevalentemente paratattica. Gli esempi proposti per i sei casi di equazioni sono del tutto diversi da quelli dell'algebra: compaiono infatti, accanto ai consueti problemi astratti, problemi legati all'attività commerciale, risolti non solo retoricamente, ma anche disponendo i termini sulla pagina per evidenziarne affinità e legami di calcolo (addendi-somma); è presente inoltre il ricorso a simboli per indicare alcune operazioni (estrazione di radice), l'incognita e il suo quadrato.

⁴ Comunicazione personale (29 gennaio 2007).

⁵ Per completezza di informazione si fa notare che in tutti i manoscritti della *Modus Family* (escluso Torino i cui disegni sono andati perduti) è presente la quadrettatura.

Altro indicativo elemento peculiare è il preponderante utilizzo di numerali *ghubar*, che tuttavia si dirada man mano che si procede verso la fine, dove sono presenti anche numerali indo-arabici.

Il manoscritto inoltre mostra forti affinità contenutistiche e linguistiche con il resto della famiglia, ma in numerosi passi la lezione si scosta da quella degli altri.

Contenuto:

(1) ff. 1-70v: Io. de Muris, *Quadripartitum numerorum*; ff. 71-72v: vacua; **(2) 73r-82v: al-Khwarizmi (Gerardo da Cremona, traduttore; Regiomontanus, copista?) Algebra**; f. 96v: vacuum; (3) ff. 97-102v: Anonimo, *Note di retorica e giurisprudenza*; ff. 101v-102v: vacua; (4-1) ff. 103-141v: *Practica geometriae*; f. 142: vacuum; (4-2) ff. 143-162v: *Quaestiones de geometria*; (4-3) ff. 163-195: *Tractatus de arte visurandi*; ff. 195v-198v: vacua; (5) ff. 199-210: *De duplici arte visoriae*; f. 211r-v: vacua; (6) ff. 212-234: Euclide, *Introduzione a Euclide*; ff. 235-236v: vacua.

Bibliografia:

D. E. Smith, *Rara aritmetica. A Catalogue of the Arithmetics Written before the Year MDCL, with a Description of Those in the Library of George Arthur Plimpton of New York*, Boston-London, 1908, pp. 454-456, 468, 480, 486-487; Karpinski, L.C.: *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi* (New York 1915), 24; S. De Ricci e W. J. Wilson, *Census of Medieval and Renaissance Manuscripts of the United States and Canada 2*, New York, 1937, pp. 1787-88; l'Huillier, G.: «Regiomontanus et le Quadripartitum numerorum de Jean de Murs», in *Revue d'Histoire des Sciences* 33, (1980), 193-214; M. Folkerts, «Die mathematischen Studien Regiomontans in seiner Wiener Zeit», in Hamann, G.: *Regiomontanus-Studien* (Wien 1980), S.201-; Folkerts, M. «Regiomontanus als Vermittler algebraischen Wissens», in Folkerts, M., Lindgren, U. (ed.): *Mathemata, Festschrift für Helmuth Gericke* (Stuttgart 1985), 207-220; M. Folkerts, «Johannes Regiomontanus – Algebraiker und Begründer der algebraischen Symbolik», in R. Gebhardt e H. Albrecht (ed.): *Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit*, (Annaberg Buchholz, 1996); M. Folkerts, *Algebraische Studien des Regiomontanus. Edition eines Textes aus der Handschrift Plimpton 188* (in preparazione).

VU = Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana, Urbinate Latini 1329, ff. 43r-63r (*Machumeti de algebra et almuchabala idest recuperacionis et opposicionis liber incipit*). Roma, XXIII ottobre 1458.

Il manoscritto, esemplato, come si evince dal *colophon* (*ego Michael Foresii Gayensis [sic] hunc librum scripsi pro domino Francisco apostolico scriptore de burgo Sancti Sepulchri nuncupato in Roma urbe die XXIII Octobris anno MCCCCLVIII. FELICITER*) da **Michael Foresius Gayensis** per **Francesco da Borgo San Sepolcro**, *apostolicus scriptor* e *familiaris optimus* di papa Pio II, nel 1458, è caratterizzato da titoli in oro o in rosso, con iniziali maggiori azzurre e rosse e capolettura in oro, decorati con figure allegoriche e floreali colorate

non sempre di facile lettura. Sono presenti illustrazioni a scopo decorativo non solo sulle pagine iniziali di ogni testo, ma anche in alcune pagine successive, con soggetti non necessariamente pertinenti all'argomento: due putti che sorreggono uno scudo vuoto; uno scorcio prospettico cittadino con pozzi ed edifici; (19v) sul margine sinistro figura un vaso sorretto da un uomo ed una donna; da esso spuntano rami intrecciati tra i quali appaiono putti e, nel centro, l'immagine di Claudio Tolomeo; nel capolettera Q è rappresentata la Terra; (30v) putto con cartiglio, su cui è scritto ESTO X.E ossia l'inizio del teorema della pagina seguente; (43r) rami, fronde, uccelli; il capolettera S è contornato di fronde intrecciate.

Le notizie sul copista sono estremamente esigue. La Caldelli (Caldelli, 2006) ricorda che nel Vat. Lat. 2224, da lui copiato per lo stesso committente, si definisce «Gallicus» e legge «Gayensis»⁶ sull'Urb. Lat. 1329. Michael Foresius ha realizzato, nel 1470, anche un codice di contenuto astronomico, astrologico e medico, conservato a Berlino (Staatsbibliothek, Ms. 95).

Il committente della copia, Francesco da Borgo San Sepolcro, (secondo decennio del XV secolo-1468) dal 1450 risulta attivo a Roma nella Camera Apostolica (Frommel, 1983) come contabile, lavora alla dogana di Ripa ed è membro della tesoreria segreta di papa Niccolò V, finanziata dai dazi doganali; negli anni successivi, è misuratore di costruzioni alla basilica di Santa Maria Maggiore ed è responsabile dei lavori in Campidoglio ed in Vaticano. Alla morte del papa, una posizione tanto prestigiosa gli provoca però il carcere per presunti abusi nell'amministrazione del guardaroba papale; la signoria di Firenze intercede per lui e ne ottiene la scarcerazione e la riammissione al rango di collaboratore del papa, ora Callisto III (1378-1458)⁷. Negli anni fra il 1457 e il 1458 fa copiare da Micheal Foresius codici miniati di *Geometria* (Vat. Lat. 2224) e di *Ottica* di Euclide, di astronomia di Tolomeo e di algebra (Urb. Lat. 1329). Si avvarrebbe, secondo alcuni (Ruysschaert, 1968), dell'opera di Michael Foresius anche per far copiare una raccolta di opere di Archimede tradotte in latino a Roma da **Jacopo da Cremona** (o **da san Cassiano**) per Niccolò V (Urb. Lat. 261), ma altri non condividono l'attribuzione (Caldelli, 2006); di mano differente sarebbe invece un altro manoscritto (Parigi, Bibliothèque Nationale, Nouv. Acq. Lat.1538, 1r-52v), copiato per Francesco da Borgo e da lui commentato (*interprete Francisco Cereo de Burgo Sancti Sepulchri*), contenente il *De sphaera et cylindro* di Archimede; Frommel afferma che i disegni geometrici sui margini dei manoscritti Vat. Lat. 2224 e Urb. Lat. 1329 sono di mano di Francesco, come pure i soggetti nei capilettera del Urb. Lat. 261 (Buonocore, 1996).

⁶ Stornajolo (Stornajolo, 1921) legge Gnyensis.

⁷ L'ampiezza dei suoi mezzi è, secondo Pagliara (Pagliara, 1997), derivante dai profitti della società mercantile che egli avvia con il fratello Pellegrino in quegli anni e non dalla sua attività di curiale.

I due manoscritti sono accomunati anche dalla presenza di due disegni che rappresentano un identico soggetto, una veduta cittadina; il Vat. Lat. 2224 contiene un'immagine studiata iconograficamente dalla Maddalo (Maddalo, 1990): si tratta del primo caso di rappresentazione di Roma panoramica e realistica, cioè derivata dall'osservazione diretta di un campo visivo circoscritto. Il punto di osservazione scelto è diverso da quello tipico delle rappresentazioni tardo-medievali (Monte Mario), che coincideva con quello dei pellegrini in arrivo nella città; il miniatore predilige l'area dei giardini vaticani da dove contemplare i palazzi della Curia, Castel sant'Angelo, santo Spirito e sant'Onofrio e, in secondo piano, la Roma popolare, resa con pochi tratti nel suo denso ammassarsi di edifici, chiese, torri baronali e campanarie, su cui si stagliano la Colonna Aureliana, il Pantheon, l'Aracoeli, santa Maria Maggiore. La Maddalo ritiene che il miniaturista che ha dipinto questa immagine dalla prospettiva ancora ingenua ed approssimativa, forse Michael Foresius (Frommel, 1983), sia stato guidato da Francesco da Borgo, che avrebbe conosciuto il ciclo di affreschi di identico soggetto realizzato da **Masolino da Panicale** (1383-1440) nella *Sala Theatri* di palazzo Orsini tra il 1430 e il 1432 ed anche la *Descriptio urbis Romae* di **Leon Battista Alberti**, realizzata probabilmente tra il 1443 e il 1445 (Boriaud e Furlan, 2005).

È documentata la contemporanea presenza di Francesco da Borgo e dell'Alberti alla corte pontificia di Niccolò V, attivo sul fronte del rinnovamento architettonico ed urbanistico di Roma: appare ancor più significativo il fatto che i monumenti presenti nello scorcio miniato della città (le mura di Borgo, le basiliche, Castel Sant'Angelo) coincidano con quelli per i quali il papa prevedeva interventi di risanamento o di ampliamento, in cui il ruolo dell'Alberti doveva essere significativo (Westfall, 1974). Si ricordi infine che una copia del *De re aedificatoria* fu donata dall'Alberti proprio al papa.

Dalla biblioteca dello stesso cardinale Giordano Orsini (1360?-1438) composta di ben 224 manoscritti, nel 1457 Francesco avrebbe preso a prestito (Maddalo, 1990) un codice trecentesco ⁸ per la copia della *Geometria* di Euclide, che è stata realizzata sotto la sua personale supervisione ed ha una numerazione caratteristica delle proposizioni, citata da Piero della Francesca nel suo *De quinque corporibus regularibus* (Clagett, 1978). Mentre si trovava a Roma ad affrescare i palazzi vaticani, Piero potrebbe inoltre aver frequentato la biblioteca di Francesco, tra l'altro suo concittadino, ed aver consultato nel 1459 i manoscritti (Vat. Lat. 2224, Urb. Lat. 1329 e Urb. Lat. 261), il cui contenuto poteva interessarlo per i suoi studi prospettici. Pagliara dà per certo che Piero abbia potuto studiare i manoscritti più tardi, nella biblioteca di Federico da Montefeltro ad Urbino e che Leonardo da Vinci abbia cercato di entrare in possesso proprio

⁸ Oggi conservato in Vaticano, il codice Arch. di S. Pietro H 35 contiene la *Geometria* di Euclide (ff. 1r-142v) e la *Perspectiva* (ff. 143- segg.).

della copia della *Geometria* di Euclide di Francesco da Borgo. A Roma Piero è certamente incoraggiato a metter mano alla teoria sulla prospettiva; è altrettanto sicuro che egli abbia copiato e illustrato il trattato di Archimede sulla spirale (Firenze, Biblioteca Riccardiana, MS lat. 106), che forse lo spinge a dedicarsi al suo *De prospectiva pingendi* (v. 11.1.4.).

La veduta cittadina dell'Urb. Lat. 1329 rappresenta invece uno scorcio prospettico di evidente rigore geometrico, molto distante dall'immagine di Roma sopra descritta. L'illustrazione è strettamente pertinente al contenuto del testo dell'*Ottica* di Euclide accanto al quale è posta: si parla infatti di cono visivo il cui vertice è posto nell'occhio dello spettatore. Una definizione analoga, basata su una piramide, si trova nell'opera dell'Alberti nella definizione di prospettiva⁹ (Grayson, 1980) ed anche nell'opera di Leonardo da Vinci¹⁰. Anche nel caso dell'Urb. Lat. 1329, la presenza a Roma di Piero della Francesca, grande esperto di prospettiva, negli stessi anni della copiatura del manoscritto appare una coincidenza di sicuro interesse, anche per l'influenza che potrebbe aver esercitato sulla decorazione del manoscritto, dal momento che i tratti stilistici in Vat. Urb. 1329 mostrano una competenza tecnica ben superiore; di questo parere è anche la Miller (Miller, 1993), che enfatizza l'importanza di questo manoscritto per la storia della prospettiva rinascimentale, tenendo anche conto che si tratta dell'unica copia a noi pervenuta (seppure in traduzione latina) della rielaborazione degli *Elementi* da parte dell'astronomo e matematico **Teone di Alessandria** (IV sec. d.C.), la cosiddetta *recensio Teonis* (v. 2.3.). La forte affinità tra il pozzo ottagonale che domina nello scorcio dell'Urb. Lat. 1329, ed uno schizzo prospettico di Piero nel *De prospectiva pingendi*¹¹ avevano indotto invece la Nicco-Fasola (Nicco-Fasola, 1984) a presentare considerazioni antiteti-

che sul rapporto fra Piero e l'*Ottica*. Una teoria recentissima (King, 2006, 2007) mette inoltre in relazione Piero con Regiomontanus e il suo patrono, il cardinale Bessarione (1408-1472): la tesi, affascinante, permetterebbe anche di gettare nuova luce sulla tanto discussa iconografia di uno dei capolavori di Piero, la *Flagellazione di Cristo*; va tuttavia segnalato che mancano prove documentate di un incontro (v. 11.1.2.).

Una caratteristica del manoscritto Urb. Lat. 1329, per la parte che riguarda l'algebra, consiste nel tipo di sistema di numerazione utilizzato: per la maggior

⁹ *In questa superficie si representino le forme delle cose vedute, non altrimenti che se essa fusse di vetro traluciente tale che la piramide visiva indi trapassasse, posto una certa distanza, con certi lumi e certa posizione di centro in aere e ne' suoi luoghi altrove* – De pictura. Libro I, n.12.

¹⁰ *Prospettiva non è altro che vedere uno sito dirieto uno vetro piano e ben' trasparente, sulla superficie del quale siano segniate tutte le cose che sono da esso vetro indirieto: le quali si possano condurre per piramidi al punto dell'occhio e esse piramidi si tagliano su detto vetro* (Richter, 1970).

¹¹ Tav. XIV, Fig. XXXVII in Nicco-Fasola (Nicco-Fasola, 1984).

parte i numeri sono rappresentati verbalmente o con numerali romani, anche nel caso di frazioni; figurano anche, soprattutto verso la fine del testo, numerali indo-arabici e *ghubar*, come in NY ¹².

Contenuto:

(1) ff. 1r-19v: Euclide, *Optica*; (2) ff. 19v-42v: Claudius Ptolemaeus, *De iis quae in celo aspiciuntur*; (3) **ff. 43-62v: Machumet, *De algebra et almuchabala***; ff. 53-66: vacua.

Bibliografia:

C. Sornajolo, *Codices Urbinales Latini, III*, Roma 1921, pp. 268-269; W. Van Egmond, *The Commercial Revolution and the Beginning of Western Mathematics in Renaissance Florence, 1300-1500*, Michigan, 1977, pp. 510-511; S. Maddalo, *In fig. Romae. Immagini di Roma nel libro medievale*, Roma, 1990; A. Grafton, *Rome Reborn: The Vatican Library and Renaissance Culture*, Yale University Press, 1993; M. Buonocore, *Vedere i classici. L'illustrazione libraria dei testi antichi dall'età romana al tardo Medioevo*, Roma, 1996; P. N. Pagliara, «Francesco di Benedetto Cereo da Borgo san Sepolcro» in *Dizionario Biografico degli Italiani*, Roma, 1997; E. Caldelli, *Copisti a Roma nel Quattrocento*, Roma, 2006.

MP = Milano, Biblioteca Ambrosiana, P 81 Sup. (olim YS), ff. 1r-22r (*Machumeti de algebra et almuchabala, id est recuperationis et oppositionis liber incipit*), Italia, metà XV secolo.

Appartenuto a Gian Vincenzo Pinelli (1535-1601), il manoscritto viene datato genericamente al XV secolo da alcuni (Rivolta, 1933; Cipriani, 1968; Gabriel, 1968), mentre altri lo collocano ad inizio secolo (Hughes, 1986). Tuttavia, la datazione all'inizio del secolo sembra verosimilmente da scartare sulla base dell'esame del tipo di scrittura utilizzato, del tutto simile a quello presente nel codice Vaticano Urbinales Latini 1329, sopra descritto, con cui il manoscritto P 81 evidenzia significative quanto palesi affinità, sia per l'uso di numerali romani (esclusivo nella prima parte, meno costante negli ultimi paragrafi) sia per la compresenza nello stesso codice dell'*Optica* di Euclide e dell'opera di Tolomeo intitolata *De hiis quae in coelo aspiciuntur*, oltre ad altri testi di contenuto scientifico, sia infine per la pressoché perfetta somiglianza dei disegni, anche nei minimi particolari (lettere utilizzate, quadrettatura delle aree, indicazione delle misure delle lunghezze o delle superfici con numerali romani, compresenza e disposizione degli ultimi due disegni nella stessa pagina). Al di là delle somiglianze, il manoscritto P 81 Sup. appare incompleto e meno curato per ciò che riguarda la decorazione: mancano i capilettera, anche se è stato predisposto lo

¹² Significativo il fatto che solo pochi anni dopo, tra il 1461 e il 1465, anche Regiomontanus si trovasse alla corte pontificia di Pio II, a seguito del cardinale Bessarione e noto come massimo astronomo europeo. In quegli anni avrebbe stretto amicizia con Giovanni Bianchini (ca.1400-ca.1469), un umanista con interessi anche nel campo dell'astronomia e della matematica.

spazio necessario; i simboli di paragrafo sono meno curati e non sono presenti se non i disegni tecnici, strettamente funzionali all'esposizione del contenuto.

Contenuto:

(1) ff. 1-22: Anonimo, *Liber de algebra et almuchabala*; (2) ff. 23-41r: Anonimo, *De architectura*; (3) 41r-v Anonimo: *Gerberti regulae de numerorum abaci rationibus*; (4) 41v-42v: Anonimo, *De medicina valde utilis sententia*; ff. 43-46v: vacua; (5) ff. 47-67: Euclide *Optica*; (6) ff. 67v-95: Tolomeo, *De hiis quae in coelo aspiciuntur*

Bibliografia:

A. Rivolta, Catalogo dei codici pinelliani dell'Ambrosiana, Milano 1933, p. 40; A. L. Gabriel, A Summary Catalogue of Microfilms of One Thousands Scientific Manuscripts in the Ambrosian Library, Notre-Dame, 1968, p.307, P. O. Kristeller, Iter Italicum, 1, London 1963, pp. 277-350; 2, 1967, pp. 529-536; A. Ceruti, Inventari dei manoscritti della Biblioteca Ambrosiana, (ed. fototipica) Trezzano sul Naviglio 1973-1979

T = Torino, Biblioteca Nazionale Universitaria, H V 45, ff.1r-38r (*Machumeti de algebra et elmuchabala id est de recuperatione et oppositione*), Italia, fine secolo XVI

Il manoscritto, segnato da gravi danni meccanici e mutilato dall'incendio scoppiato nella notte tra il 25 e il 26 gennaio 1904 proprio nella sezione dei manoscritti, è stato restaurato nel 1982, pur essendo andati perduti i disegni, contenuti nella parte finale anziché integrati nel testo o confinati sui margini, come per gli altri manoscritti del gruppo. Al momento del restauro si decise di procedere alla legatura del manoscritto, poco prima identificato, perché era ancora presente la numerazione originale delle carte e perché si poterono ricostruire i fascicoli sulla base delle filigrane. L'errore di impaginazione presente tra le pagine 29r-32v (da leggersi nel seguente ordine: 30r/v, 31r/v, 29r/v, 32r/v) è quasi sicuramente da riferirsi all'epoca dell'antica legatura del manoscritto, dal momento che l'assemblaggio moderno ripercorre quello originale e quindi si può supporre che già in antico, fatto non infrequente, sia stato commesso lo sbaglio nella numerazione e nell'assemblaggio dei fogli per la legatura ¹³.

Dal numero di catalogo, si può dedurre che il manoscritto fosse già stato acquisito dalla biblioteca dalla prima metà del XVIII secolo. La numerazione veniva infatti scritta in fine di manoscritto, come è avvenuto per altri, ed è stata apposta in occasione di una ricognizione del fondo, databile ai primi decenni del XVIII secolo. Il manoscritto inspiegabilmente non è mai stato inserito nei cataloghi; ciononostante esso figura nelle carte di un bibliotecario di fine XVIII secolo, Giuseppe Vernazza.

¹³ Le informazioni sulla storia recente del manoscritto mi sono state fornite dalla dott.ssa Franca Porticelli, Responsabile Sala Manoscritti e Rari della Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino.

Sulla ragione dell'esclusione dai cataloghi, si possono solo fare ipotesi: in una comunicazione personale (marzo 2007), Alessandro Vitale Brovarone, del Dipartimento di Scienze Letterarie e Filologiche dell'Università di Torino, mi ha riferito che «un non infimo numero di manoscritti di matematica (ma anche astronomia, misurazione del tempo, etc.), appartenuti ad un matematico di fine Cinquecento, Bartolomeo Cristini, che fu anche bibliotecario ducale, è sempre stato in biblioteca, ma è sfuggito all'immissione in catalogo, come se il Cristini avesse deciso di rinviarne la schedatura e poi, di fatto, questi codici fossero rimasti in sospenso per duecento anni». In effetti, **Bartolomeo Cristini** (1547-1610 circa) è una figura di spicco nel panorama culturale torinese di quegli anni (Colombrero, 1985; Cecchini, 2001): oltre ad essere il precettore del principe Vittorio Amedeo I e dei fratelli, Cristini fu lettore di matematica, ingegnere reale (*controllore de le fabriche*), gnomonista, astronomo e, non ultimo, *scrittore e custode dei manoscritti della biblioteca*, ossia incaricato della loro trascrizione. Appare del tutto verosimile sia per il suo ruolo sia per la coincidenza fra l'epoca del suo incarico e la datazione del manoscritto H V 45 ipotizzare che sia stato proprio Cristini ad acquisirlo per la biblioteca; se questa ricostruzione trovasse conferma, si potrebbe anche supporre che la ragione dell'accantonamento del manoscritto sia stata la presenza di tanti e gravi errori e forti inconsistenze, che non potevano sfuggire ad un matematico come Cristini. Non solo infatti aveva scritto una *Rithmomachia* ad uso dei principi di Savoia, ma aveva composto anche una *Logistica sive Arithmetica pratica*, dedicata a Carlo Emanuele di Savoia (Torino, Biblioteca Nazionale Universitaria, F.V.5; Venezia, Biblioteca Nazionale Marciana, Lat.VIII 3), una *Sciographia* (Torino, Biblioteca Nazionale Universitaria, G.IV.15) e una *Trigonometria* (Torino, Biblioteca Nazionale Universitaria, F.IV.19; Venezia Biblioteca Nazionale Marciana, Lat.VIII 4). Sulla base di queste considerazioni, si ritiene del tutto improbabile l'ipotesi, pur ammissibile dal punto di vista strettamente cronologico, che Cristini ne sia stato anche il copista.

Dal punto di vista storico, il manoscritto è una copia di VU, con cui presenta frequenti e forti analogie; molti degli errori presenti, indicati già da Hughes come uno dei grossi limiti allo studio del manoscritto, sono verosimilmente derivati dal passaggio dalla numerazione romana a quella araba oppure provocati da erronea interpretazione di abbreviazioni (*dria* dell'antigrafo viene sistematicamente trascritto come *dragma*, anziché come *differentia*, con conseguenze immaginabili).

Contenuto:

(1) ff. 1-38r Mahumetis de Algebra et Elmuhabala

Bibliografia:

B. de Montfaucon, *Bibliotheca bibliothecarum manuscriptorum nova* 2, Paris 1739, pp. 1399; *Index alphabétique des livres qui se trouvent en la Bibliothèque Royale de Turin en cette année 1713* (Torino, Biblioteca Nazionale Universitaria, ms. R I 5), p. 619; G. Vernazza, *Notizie di Bartolomeo Cristini*, Nizza, 1783

6.2. MODUS DIVIDENDI E ALTRE DIFFERENZE

Collocato nel paragrafo 5, immediatamente dopo il passo sulla divisione di numeri sotto radice (r. 56), il *Modus Dividendi*, l'*adiectio* più significativa, tratta di un'ulteriore aspetto della divisione: la razionalizzazione di frazioni aventi al denominatore un binomio in cui compare un termine sotto radice. La modalità operativa viene mostrata attraverso l'esempio numerico ¹⁴: $\frac{8}{3 \pm \sqrt{4}}$; il primo

passo del procedimento è di osservare il segno presente fra 3 e $\sqrt{4}$, per poi moltiplicare numeratore e denominatore per un binomio con i termini legati dal segno opposto; nel caso di $\frac{8}{3 + \sqrt{4}}$, il passaggio successivo è di moltiplicare numeratore e denominatore per $3 - \sqrt{4}$, ottenendo

$$\begin{aligned} &= \frac{8(3 - \sqrt{4})}{(3 + \sqrt{4})(3 - \sqrt{4})} = \\ &= \frac{24 - 8\sqrt{4}}{9 + 3\sqrt{4} - 3\sqrt{4} - \sqrt{16}} = \\ &= \frac{24 - \sqrt{256}}{9 + 0 - 4} = \\ &= \frac{24}{5} - \frac{\sqrt{256}}{5} = 4 + \frac{4}{5} - \sqrt{\frac{256}{25}} = \\ &= 4 + \frac{4}{5} - \sqrt{10 + \frac{6}{25}} = 4 + \frac{4}{5} - \left(3 + \frac{1}{5}\right) = 1; \end{aligned}$$

come si vede, il risultato, che è una frazione impropria non apparente, viene scomposto in parte intera più frazione propria.

La ragione della presentazione di una procedura tanto farraginosa, per ottenere un risultato pressoché immediato, appare subito dopo, quando l'autore invita a fare la verifica diretta: $\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}$ ed aggiunge che si tratta di un esempio da estendersi anche a numeri con radici non discrete.

¹⁴ Lo stesso esempio è in *Aliaabra Argibra* di Maestro Dardi.

Segue un ulteriore esempio di uso della divisione, in cui compare l'incognita al denominatore; espresso in notazione simbolica, il problema è il seguente, $\frac{12}{x} + \frac{12}{x+1} = 7$; non è necessario porre condizioni di esistenza per evitare la divisione per 0, dal momento che radici nulle o negative non sono ammesse, come si è visto in 3.4.2.

Il metodo di risoluzione proposto è il seguente:

- somma le frazioni, portandole ad avere lo stesso denominatore, e cioè
 - moltiplica 12 per x , ottenendo $12x$;
 - moltiplica 12 per $x + 1$, ottenendo $12x + 12$;
- somma i due prodotti; il risultato è $24x + 12$ (numeratore);
- moltiplica i divisori uno per l'altro: $x(x+1) = x^2 + x$ (denominatore);
- poiché la divisione deve dare 7 come risultato, moltiplica il denominatore per 7 e poni il risultato uguale al numeratore; $7x^2 + 7x = 24x + 12$;
- sottrai $7x$ da entrambi i membri; $7x^2 = 17x + 12$;
- riduci all'unità il coefficiente di x^2 , dividendo per 7; $x^2 = \left(2 + \frac{3}{7}\right)x + \left(1 + \frac{5}{7}\right)$;
- procedi come nel caso di un quadrato uguale a radici e numeri; il risultato è $x = 3$, pertanto $x + 1 = 4$.

Appena conclusa questa esposizione, il manoscritto riprende dal punto in cui si era interrotto e prosegue, con la stessa lezione dell'edizione critica di Hughes, fino alla fine del paragrafo 5.

Dal paragrafo 6 le differenze rispetto al testo dell'edizione critica si fanno continue: per lo più, il contenuto è il medesimo, ma la sintassi ed il lessico sono diversi. Si rilevano in particolare l'uso indifferente di *radix* o *cosa* per indicare l'incognita; il ricorso al termine *salva* nella *questio* 12 delle *questiones varie*, per indicare la memorizzazione temporanea di un risultato da utilizzare in un secondo tempo; anche il vocabolo *vices*¹⁵ riferito alla moltiplicazione fa la sua comparsa, soprattutto nell'ultima parte.

Le varianti dei quattro manoscritti rispetto all'edizione critica sono:

- nelle *questiones varie*:
 - dopo la *questio* 9, viene inserita la prova (*probacio*), definita *satis pulchra*: l'autore invita a ripetere i calcoli in ordine inverso partendo dal risultato ottenuto, per verificare che in questo modo si può raggiungere il dato di partenza (36);
 - manca la *questio* 10 in MP;
 - viene aggiunto un paragrafo alla *questio* 12: sulla moltiplicazione e divisione per multipli e sottomultipli;
- nel *Capitulum Convencionum Negociatorum*: il testo è completamente diver-

¹⁵ Uso peraltro ricorrente nel *Liber Abaci*: *3 vices 3 fiunt* 9 (Boncompagni, 1857a).

so, sia per forma, sia per contenuto. Manca del tutto la parte introduttiva teorica e l'unico esempio proposto prende spunto da un contesto commerciale: «un tale acquista un certo numero di braccia per 36 ducati, se si aggiungessero 6 braccia per la stessa somma, un braccio sarebbe stato venduto per un ducato meno di quanto fu venduto. Quante braccia sono state acquistate?». La soluzione viene ottenuta come segue:

- si pone x come numero di braccia;
- si divide 36 per x , ottenendo il costo di un braccio;
- si constata che $\frac{36}{x} + 1 = \frac{36}{x + 6}$;
- si risolve con lo stesso algoritmo presentato nel *modus*:
 - si moltiplica 1 per x e poi per $x + 6$, ottenendo $x^2 + 6x$ (in NY l'ordine delle operazioni è invertito);
 - si divide per la differenza dei divisori, cioè 6, e si pone uguale a 36 ducati; si ottiene $\frac{1}{6}x^2 + x = 36$;
 - si riduce all'unità il coefficiente di x^2 , moltiplicando per 6; $x^2 + 6x = 216$;
 - con l'algoritmo consueto del quarto caso si ricava che $x = 12$.
- nell'*appendix* si evidenziano:
 - *omissiones*:
 1. mancano in tutti i manoscritti le *questiones* corrispondenti alle 1, 14 e 15 dell'edizione critica (come peraltro in altri tre testimoni non inseriti nella *Modus Family* né utilizzati per l'edizione critica, cioè Berlino, Staatsbibliothek Preussischer Kulturbesitz, Lat. Qu. 529; Berlino, Deutsche Staatsbibliothek Hamilton 962; Parigi, Bibliothèque Nationale ital. 949);
 2. manca la *questio* corrispondente alla 2 in MP;
 - *adiunctiones*:
 1. alla *questio* 3 (la numerazione segue l'ordine del Plimpton) viene aggiunto un lungo paragrafo in cui si illustra la regola su multipli e sottomultipli appena applicata e si aggiungono quattro ulteriori esempi, due numerici ($2 \cdot 10 = 20 = 5 \cdot 4$ e $4 = 2 \cdot 2$) e uno algebrico, con la prova, ossia il ricalcolo del dato iniziale a partire dal risultato trovato ($x^2 \cdot 4 = 20$);
 2. alla *questio* 4, analogamente, viene aggiunto un paragrafo con la generalizzazione dell'algoritmo e la soluzione del problema a titolo di esempio;
 3. dopo la *questio* 13, in tutti i manoscritti viene aggiunto un paragrafo ancora sul tema della moltiplicazione e della divisione per multipli e sottomultipli, corredato di un esempio $x^2 \cdot 3x = x^2$, da cui si deduce che $x^2 \cdot x = 4x^2$ e quindi $x = 4$ e $x^2 = 16$; come sempre, la banalità dell'esempio serve a renderlo immediatamente comprensibile, ma il procedimento può ovviamente essere esteso ad altri casi, permettendo la risoluzione di equazioni di terzo grado della forma suddetta (resta comunque esclusa la soluzione $x = 0$ di molteplicità 2);

- trasformazioni dei numerali:

1. la *questio* 12 viene presentata in una forma molto più sintetica: a fronte di un passo di 28 righe nell'edizione critica, nella *Modus Family* il problema è riassunto in meno di 10 righe. La differenza si spiega in larga misura con il ricorso alla notazione frazionaria simbolica in luogo di quella retorica.

- Cambiamento di lezione:

1. la *questio* 14 ripropone una questione di multipli e sottomultipli; il testo contiene alcuni errori ed una parola non emendabile *ex libro*, che lo rendono ostico ad una prima lettura. In notazione simbolica, il testo è il

seguito: $\left(x^2 - \frac{x^2}{3}\right)3x = x^2$; i passaggi eseguiti dal solutore portano a

far sì che in ambo i membri sia presente x^2 , in modo tale che, eguagliando i coefficienti, si ottenga la soluzione:

$$\frac{2}{3}x^2 \cdot 3x = x^2 \rightarrow x^2 \cdot 3x = \frac{3}{2}x^2;$$

quest'ultimo passaggio viene motivato dall'autore attraverso la *regula iusticie* o *iustine*, mai citata in precedenza, con l'uso tuttavia di un'espressione ricorrente (*quod patet per regulam*). L'espressione «*iusticie*» o «*iustine*» o «*iustitie*» è certamente un errore¹⁶, da ascriversi ad un copista precedente, poi propagatosi a cascata in tutti i membri della famiglia; una congettura *ex ingenio* potrebbe basarsi sull'ipotesi di un cambiamento di lezione dovuto a ragioni paleografiche di lettura della sequenza di *jambage*: si tratta forse di un *eius*, comune ad altre ricorrenze del termine *regula* nel manoscritto ed inserito in un'espressione formulare. *Ex abrupto* nella stessa *questio*, viene introdotta una domanda che sembra riportare l'attenzione sul rapporto di proporzione fra i coefficienti: «se 2/3 danno 1, quanto dà 1?»; in pratica sembra il prosieguo del passaggio precedente. I passi successivi sono i seguenti: dividendo per 3, si ottiene:

$$x^2 \cdot x = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Come di consueto vengono forniti entrambi i valori (*census* e *cosa*), ma appare singolare che si presenti prima il *census*, dato che dall'ultimo passaggio, il valore calcolato è quello della *cosa*.

¹⁶ Non è in alcun modo attestata, allo stato attuale delle conoscenze, una *regula iusti*, lessicalmente simmetrica alla *regula falsi*.

6.3. LO STEMMA DELLA MODUS FAMILY

Per ricostruire lo *stemma codicum* o almeno per tracciare una tassonomia, sono stati individuati (utilizzando in parte gli stessi passi di Hughes) i seguenti errori congiuntivi (*errores coniunctivi*) e disgiuntivi (*errores separativi*):

- E-1: Hic (I.1)
- E-2: Sic (I.1)
- E-3: verbis (I.7)
- E-4: veris (I.7)
- E-5: ad infinitam numerorum quantitatem (I.13-14)
- E-6: ad infinitam numerorum comprehensionem (I.13-14)
- E-7: iam fuit (III.65)
- E-8: numerus iam fuit (III.65)
- E-9: nusquam fuit (III.65)
- E-10: et sic (VII.30)
- E-11: ut scis (VII.30)

	E-1	E-2	E-3	E-4	E-5	E-6	E-7	E-8	E-9	E-10	E-11	E-12
NY	X		X			X		X			X	
VU		X		X	X				X			X
MP				X	X		X			X		
T		X		X	X				X			X

Fig. 6.2. – Sinossi collazione Modus – edizione critica.

Dalla sinossi di fig. 6.2. emergono le seguenti evidenze:

- NY si scosta frequentemente dagli altri tre e mostra maggiori somiglianze con il testo ricostruito nell'edizione critica; per questa ragione è stato da me scelto come esemplare di collazione per le parti che si scostano dal testo edito da Hughes;
- MP si distingue da NY, ma anche da VU/T che invece mostrano ripetutamente di seguire la stessa lezione e di essere pertanto più strettamente legati (la datazione dei manoscritti permette inoltre di ritenere che T sia apografo di VU);
- Per quanto riguarda E-1, MP è mancante del capolettera, ma le forti affinità con VU permettono di congetturare che si tratti di una S.

Ad ulteriore conferma delle considerazioni sopra riportate stanno le seguenti osservazioni di natura quantitativa e qualitativa riguardanti i primi quattro paragrafi:

- sono emerse in totale 841 differenti lezioni (tra varianti, errori morfologici, sintattici, materiali) rispetto all'edizione critica, da parte di almeno un manoscritto;
- in 240 passi i quattro manoscritti presentano la stessa variante o lo stesso errore rispetto all'edizione critica, il che induce ad ipotizzare un comune antenato; solo NY e VU (in misura minore rispetto al precedente e solo nell'ultima parte) ricorrono ai numerali *ghubar*;
- in 123 passi tre manoscritti MP, VU e T si differenziano sensibilmente dalla lezione di NY, MP e VU sono inoltre accomunati da un uso piuttosto singolare dei numerali romani, utilizzati per rappresentare le frazioni (i/vii) oppure, per numeri grandi, in un sistema di notazione intermedio tra romano e posizionale con il ricorso agli apici: il numero 2550 è II^MV^CL (*Appendix, questio* 6) ¹⁷;
- in 45 passi i due manoscritti VU e T si discostano dalla lezione degli altri due, talvolta per brevi sintagmi presenti qui e non in MP e NY;
- in 97 passi T si distingue ulteriormente da VU e dagli altri, ma si tratta di differenze in larga misura riconducibili ad errori materiali (omissioni, fraintendimenti, errata lettura di abbreviazioni dell'originale).

Si riportano in sintesi nella *tab. 6.1.* i conteggi delle ricorrenze della stessa lezione fra gruppi di codici:

Tab. 6.1. – Conteggi ricorrenze fra gruppi di codici Modus.

VU-MP-T	123
NY-VU-T	49
VU-T	45
NY-VU-MP	26
VU-MP	26
MP-T	20
NY-VU	11
NY-T	9
NY-MP-T	6
NY-MP	2

In totale il numero delle lezioni concordanti tra le varie coppie di manoscritti è il seguente, come si legge in *tab. 6.2.*:

¹⁷ Il ricorso agli apici è attestato anche in un martirologio cassinese del XII-XIII secolo (Vaticano, Ott. Lat. 3), dove anzi i numerali latini sono utilizzati insieme con quelli indo-aramici: MV^c XXX4 = 1534 (Lowe, 1914).

Tab. 6.2. – Conteggio lezioni concordanti fra coppie di codici Modus.

VU-T	45
VU-MP	26
MP-T	20
NY-VU	11
NY-T	9
NY-MP	2

Per quanto riguarda l'appendice, per cui è stata utilizzata la lezione del manoscritto NY come base di collazione, i risultati quantitativi sono i seguenti:

- sono emerse in totale 495 differenti lezioni (tra varianti, errori morfologici, sintattici, materiali) rispetto ad NY, da parte di almeno un manoscritto;
- in 95 passi i tre manoscritti presentano la stessa variante o lo stesso errore rispetto ad NY;
- in 56 passi i soli manoscritti VU e T presentano la stessa variante o lo stesso errore rispetto ad NY;
- viceversa in soli 26 passi i manoscritti VU e MP presentano la stessa variante o lo stesso errore rispetto ad NY;
- MP e T hanno in comune solo 14 differenze rispetto a NY e VU, di poco rilievo;
- in 182 passi T si distingue ulteriormente dagli altri e si tratta, anche in questa parte, di differenze in larga misura riconducibili ad errori materiali (omissioni, fraintendimenti, errata lettura di abbreviazioni dell'originale).

Si riportano in sintesi nella *tab. 6.3.* i conteggi delle ricorrenze della stessa lezione fra gruppi di codici:

Tab. 6.3. – Conteggi ricorrenze fra gruppi di codici Modus in appendice.

VU-MP-T	95
VU-T	56
VU-MP	26
MP-T	14

In totale il numero delle lezioni distinte rispetto ad NY è il seguente (*tab. 6.4.*):

Tab. 6.4. – Conteggio lezioni distinte rispetto a NY in appendice.

T	182
MP	88
VU	34

Sulla base dell'analisi del contenuto dei manoscritti, di quanto è emerso dalla collazione, in particolare dell'assenza di alcuni problemi in MP e della datazione dei manoscritti, lo stemma proposto è il seguente:

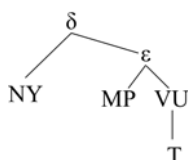


Fig. 6.3. – Stemma della Modus Family.

6.4. LA COLLOCAZIONE DEI MANOSCRITTI NELLA TRADIZIONE

I manoscritti utilizzati da Hughes per l'edizione critica sono stati suddivisi dallo studioso stesso in due famiglie sulla base di 10 lezioni differenti:

- V-1: comprehendi potest de numeris ultime (I.13-14)
- V-2: ad infinitam numerorum comprehensionem (I.13-14)
- V-3: questio est impossibilis (II.B.55)
- V-4: questio est destructa (o destructa) et impossibilis (II.B.55)
- V-5: dupla ergo radicem novem (V.37-38)
- V-6: multiplica ergo radicem novem (V.37-38)
- V-7: capitula numerationis et eorum modos (VI.2)
- V-8: capitula et eorum modos (VI.2)
- V-9: reintegres censum tuum (VII.142-143)
- V-10: reintegres novem radices (VII.142-143)

La matrice riassuntiva (fig. 6.4.), per il confronto dei quattro manoscritti della *Modus Family* con quelli dell'edizione critica, è la seguente (il segno • indica che il senso del passo è il medesimo pur espresso con parole diverse):

	V-1	V-2	V-3	V-4	V-5	V-6	V-7	V-8	V-9	V-10
NY		•		x		x		•	•	
VU		•				x		•	•	
MP		•				x		•	•	
T		•				x		•	•	

Fig. 6.4. – Matrice riassuntiva varianti.

Come si vede, pur in presenza di molte affinità più o meno strette (V-2, V-4, V-6, V-8) con il gruppo riconducibile all'antigrafo β , si evidenzia una relazione anche con il gruppo α (V-9). Ciò potrebbe far supporre la derivazione del capostipite della *Modus Family* da un manoscritto antecedente ad α e β ; questo sarebbe stato poi ampiamente rimaneggiato come dimostrano la presenza di testo sensibilmente rielaborato nella forma ed, a tratti, anche differente per contenuto, ed il ricorso ad espressioni anaforiche tipiche del parlato didattico, come *et*, *item*, *iterum* o *autem*, all'inizio di vari problemi. Tuttavia, data la limitata entità della relazione, è più verosimile un'ipotesi basata su una copia di un manoscritto (o una famiglia) γ dall'antigrafo β , nella quale si sarebbero innestate una contaminazione con un manoscritto della famiglia α ed una con un altro manoscritto (ad oggi perduto) contenente il paragrafo *Modus dividendi* e sarebbero stati omessi i problemi mancanti.

Lo stemma, integrato con quello proposto da Hughes, risulterebbe quindi:

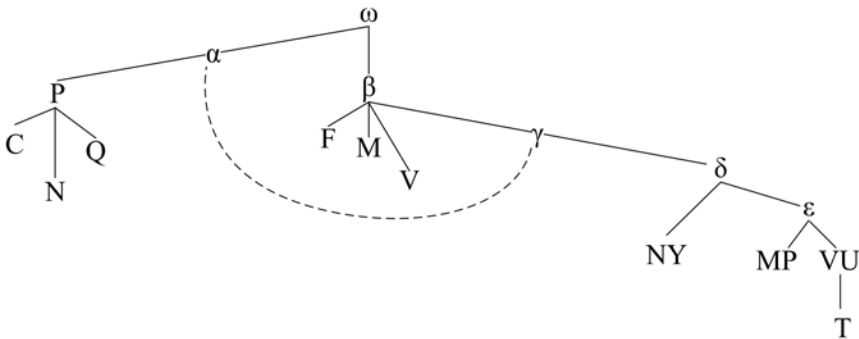


Fig. 6.5. – Stemma della *Modus Family* integrato con lo stemma di Hughes.

Va anche rilevato l'evidente intervento esterno alla tradizione da parte di maestri di algebra (come Maestro Dardi e Regiomontanus) i quali hanno integrato

il materiale presente con ulteriori osservazioni, esempi e commenti, verosimilmente ripresi dalla tradizione algebrica dei trattati d'abaco (v. 10.1.1.). Come si legge nel testo dell'edizione critica di Hughes e in Rashed (Rashed, 2007), inoltre, la cosiddetta *Appendix* sarebbe stata ripresa da un altro libro (*in alio libro tamen repperi haec interposita suprascriptis*), di cui potrebbe esserci stata una seconda traduzione, uguale nel senso, ma non nella forma, oppure potrebbe essere stata semplificata nella forma nel corso degli anni dai docenti per esigenze didattiche; come si vede nelle annotazioni a margine sul Plimpton 188, anche Regiomontanus aveva questa abitudine. Se l'altro libro fosse o meno una diversa copia dell'*Algebra* di al-Khawarizmi, non è dato sapere allo stato attuale.

Colpisce infine il brevissimo lasso di tempo (un solo anno) intercorso fra NY e VU: su questo si possono solo fare alcune congetture. Innanzitutto, la data 1456, riportata su NY, compare sul folio 85, non recante la copia della traduzione di Gerardo, che sta invece nei ff. 73r-82v; se la data non si riferisse anche alla copia *Modus*, si potrebbe ipotizzare che Regiomontanus abbia trovato il manoscritto a Roma, alla Biblioteca Vaticana, o comunque in Italia, nel 1460, durante il suo viaggio con il cardinale Bessarione.

Diversamente, si deve concludere che una traduzione elaborata da un maestro sia arrivata a Vienna, a disposizione di Regiomontanus, ipotesi del tutto plausibile, come conferma la Bianca: «È un dato di fatto che a partire dagli anni '50 del Quattrocento il numero dei copisti di origine tedesca [presso la Curia romana] aumenta notevolmente, come era di pari passo aumentata la stima e l'apprezzamento» (Bianca, 2001).

Per i capp. 1-5 (escluso *Modus dividendi*), i manoscritti sono collazionati con l'edizione critica di Hughes, che si riporta di seguito integralmente; in appendice, è stata posta la trascrizione dei capp. 5 (solo *Modus dividendi*), 6-8 e dell'appendice, basata sul testo del Plimpton 188 (il meno errato, almeno per i contenuti matematici); in nota varianti ed errori degli altri tre manoscritti.

6.5. COLLAZIONE DEI QUATTRO MANOSCRITTI DELLA MODUS FAMILY

LIBER MAUMETI FILII MOYSI ALCHOARISMI DE ALGEBRA ET ALMUCHABALA INCIPIT

<I. DE NUMERIS DECIMALIBUS ET ALGEBRAICIS>

Hic post laudem dei et ipsius exaltationem inquit. Postquam illud quod ad
computationem est necessarium consideravi, repperi totum illud numerum 5
fore, omnemque numerum ab uno compositum esse inveni. Unus itaque inter
omnem consistit numerum. Et inveni omne quod ex numeris verbis exprimitur
esse quod unus usque ad decem pertransit. Decem quoque ab uno progreditur,
qui postea duplicatus et triplicatus et cetera quemadmodum fit de uno. Fiunt ex
eo viginti et triginta et ceteri usque quo compleatur centum. Deinde duplicatur 10
centum et triplicatur quemadmodum ex decem, et fiunt ex eo ducenta et
trecenta, et sic usque ad mille. Post hoc similiter reiteratur mille apud
unumquemque articulum usque ad id quod comprehendi potest de numeris ultime.
Deinde repperi numeros qui sunt necessarii in computatione algebre et 15
almuchabale secundum tres modos fore, qui sunt: radicum et census et numeri
simplicis non relati ad radicem neque ad censum. Radix vero que est unum
eorum est quicquid in se multiplicatur ab uno, et quod est super ipsum ex

1-2 LIBER ... INCIPIT] LIBER MAHUMETI DE ALGEBRA ET ALMUCHABALA IDEST
RECUPERACIONIS ET OPPOSICIONIS PROLOGUS NY MACHUMETI DE ALGEBRA ET AL-
MUCHABALA IDEST RECUPERACIONIS ET OPPOSICIONIS LIBER INCIPIT VU MACHU-
METI DE ALGEBRA ET ALMUHABALA IDEST RECUPERATIONIS ET OPPOSITIONIS LIBER
INCIPIT MP MAHUMETI DE ALGEBRA ET ELMUCHABALA IDEST DE RECUPERATIONE ET
OPPOSITIONE T

I 4 hic] sic VU T < > ic MP exaltationem] exaltacionem et saepe infra VU in-
quit] inquit MP om. T Postquam] quam T illud quod] quod NY om. VU T 5
est ... consideravi] esse consideravi necessarium NY VU MP consideravi necessarium T
repperi] reperi VU MP numerum] de numero NY VU T de numero postea correctus e num-
ero MP 6-7 Unus ... numerum] Unitas itaque certa in omni consistit numero NY VU
MP T 7 verbis] veris VU MP T 8 unus ... pertransit] ab uno ... progreditur XXX
ab uno ... transit VU MP T decem quoque] om. NY VU T ab uno] ab illo NY VU MP
T post progreditur add. decem NY VU T 9 quil] que VU MP T 9-10 duplica-
tus et triplicatus] duplicatur et triplicatur NY VU MP T de uno. Fiunt ex eo] in uno fit in
NY in VU om. MP T 10 viginti ... quo] 10.20.30 et cetera quousque NY T X.XX.XXX et
cetera quousque VU MP 11 ex] om. NY VU MP T 12 trecenta ... sic] 300 etcetera
deinceps NY CCC.CCCC et cetera et sic deinceps VU MP 200.300.400 et cetera T simili-
ter] om. NY VU MP T reiteratur] reiterantur NY VU T 13 unumquemque] quemcu-
mque NY VU MP T 13-14 ad ... ultime] ad infinitam numerorum comprehensionem
NY ad infinitam numerorum quantitatem VU MP T 15 Deinde ... numeros] Numeri NY
VU MP T 16 fore ... sunt] sunt videlicet NY VU MP T 16-17 radicum ... relati]
radices census et numeri simplices et non relati NY radix, census et numerus simplex et non
relatus VU MP T 17 est unum] unum est VU MP 18 in se] om. MP super]

numeris, et quod est preter eum ex fractionibus. Censum autem est quicquid aggregatur ex radice in se multiplicata. Sed numerus simplex est quicquid ex numeris verbis exprimitur absque proportionem eius ad radicem et ad censum. 20

<II. DE MODIS EQUATIONUM>

<A. TRES MODI SIMPLICES>

Ex his igitur tribus modis sunt qui se ad invicem equant. Quod est sicut si dicas 'Census equatur radicibus, et census equatur numero, et radices equantur numero.' Census autem qui radicibus equatur est ac si dicas: 'Census equatur quinque radicibus.' Radix ergo census est quinque. Et census est viginti quinque. Ipse namque quinque suis radicibus equalis existit. Et sicut si dicas: 'Tertia census equatur quattuor radicibus.' Totus igitur census est duodecim radices qui est centum quadraginta quattuor. Et sicut si dicas: 'Quinque census equantur decem radicibus.' Unus igitur census duabus equatur radicibus. Ergo radix census est duo, et census est quattuor. Similiter quoque quod fuerit maius censu aut minus, ad unum reducitur census. Et eodem modo fit ex eo quod ipsi equatur ex radicibus. Census autem qui numero equatur est sicut cum dicitur: 'Census equatur novem.' Ipse igitur est census et radix eius est tres. Et sicut si dicas: 'Quinque census equantur octoginta.' Unus igitur census est quinta octoginta qui est sedecim. Et sicut si dicas: 'Medietas census equatur decem et octo. Ergo census equatur triginta sex. Et similiter omnis census augmentatus et diminutus ad unum reducitur census. Et eodem modo fit de eo quod ei equatur ex numeris. Radices vero que numeris equantur sunt sicut si dicas: 'Radix equatur tribus.' Radix est tres. Et census qui est ex ea est novem. Et sicut si dicas: 'Quattuor radices equantur viginti.' Una igitur ra(P 111 ra)dix 20

supra *VU* 19 quod ... fractionibus] hoc est praeter eum ex fractionibus *NY* hoc etiam in fractionibus est praeter eum in fractionibus *VUMPT* autem] *om. NY VUMPT* 20 in se multiplicata. Sed] multiplicata in se. *MP* Sed] *om. VUT* 21 verbis] veris *MP T* proportionem] comparatione *NY VU* comparatione *MP T* eius] *om. NY VU MP T* et] vel *NY VUMPT*

II.A 3 sunt] tres sunt simplices *VUMPT* equant] equantur *NY T et saepe infra* Quod ... dicas] quod est si dicas *NY* numero. Et si dicas *VUMPT* 4 et] *om. NY VUMPT* et radices equantur] Postea radix equatur *NY VUMPT* 5 radicibus equatur] equatur radicibus *VUMPT* 6 Et census est] Et eius census *NY VUMPT* 7 quinque ... radicibus] XXV equatur suis radicibus et *VUMPT* equalis] aequale *T* 8 quattuor] quattuor *et saepe infra MP T* post radicibus *add.* Tertia pars de CXXXVIII est XXXVIII. quater XII sunt XLVIII *VUMPT* Totus] Unus *NY VUMPT* 9 sicut] *om. NY VUMPT* 10 igitur] ergo *et saepe infra NY VUMPT* duabus ... radicibus] equatur duabus radicibus *NY VUMPT* Ergo] Igitur *et saepe infra MP T* 11 quod] si *NY VUMPT T* 12 censu] census *T* ad..censum] ad unum censum reducetur *VUMPT* modo] *om. VUMPT* 13 equatur ex] equantur *NY* equantur suis *VUMPT* autem] vero *et saepe infra VUMPT* 14 igitur] quidem *et saepe infra NY VUMPT* 16 quinta] i/v de *VU* i/v *MP* post quinta *add.* de *NY* qui] que *T* medietas] i/ii *MP* decem et octo] XVIII *VUMPT* 17 equatur] est *MP T* 18 et] aut *NY VU* eodem modo] similiter *NY VUMPT* 19 numeris] numero *MP* 20 Radix] Ergo radix *NY VUMPT* qui est] qui *T* 21 post viginti *add.* dragmis *NY VUMPT* Una ... radix] Radix ergo

equatur quinque. Et similiter sic dicas: Medietas radicis equatur decem' Ergo radix est viginti. Et census qui est ex ea est quadringenta.

<B. TRES MODI COMPOSITI>

Hos pretereā tres modos qui sunt radices et census et numerus inveni componi. Et sunt ex eis tria genera composita, que sunt hec: census namque et radices equantur numero et census et numerus equantur radicibus; et radices et numerus equantur censui. Census autem et radices que numero equantur sunt sicut si dicas: 'Census et decem radices equantur triginta novem dragmis.' Cuius hec est significatio: ex quo censui cui additur equale decem radicum eius aggregatur totum quod est triginta novem. Cuius regula est ut medies radices que in hac questione sunt quinque. Multiplica igitur eas in se et fiunt ex eis viginti quinque. Quos triginta novem adde, et erunt sexaginta quattuor. Cuius radicem accipias que est octo. Deinde minue ex ea medietatem radicum que est quinque. Remanet igitur tres qui est radix census. Et census est novem. Et si duo census aut tres aut plures aut pauciores nominentur, similiter reduc eos ad censum unum. Et quod ex radicibus aut numeris est cum eis, reduc ad similitudinem eius ad quod reduxisti censum. Quod est ut dicas: Duo census et decem radices equantur quadraginta octo.' Cuius est significatio quod cum quibuslibet duobus censibus additur equale decem radicum unius eorum, aggregantur inde quadraginta octo. Oportet itaque ut duo census ad unum reducantur censum. Novimus autem iam quod unus census duorum censuum est medietas. Reduc itaque quicquid est in questione ad medietatem sui. Et est sicut si dicatur: 'Census et quinque radices equales sunt viginti quattuor.' Cuius

NY VU MP T 22 similiter] om. T dicas] dicatur VU MP medietas] medium
VU MP T 23 qui est] om. VU MP T
II.B 2 Hos ... modos] Hi ... tres modi simplices NY VU MP Hi ... numeri simplices T
invenit] possunt NY MP T possunt componi VU sunt] om. NY VU MP T composita]
componam NY VU MP T namque] om. NY VU MP T 4 et census] et om. NY VU
MP T numerus] radices numerus VU MP 5 numerus] numero VU numeri MP T
numero equantur] equantur numero NY VU MP T quibuslibet] quibusdam et saepe infra
T additur] addatur NY VU MP T decem ... eorum] radicem eorum unius VU MP
radicibus eorum decem T 7 ex quo censui] eum cuipiam censui T quo] quolibet
NY VU MP cui] om. VU MP T 8 aggregatur] aggregatum NY VU MP T quod]
om. NY VU MP T 8-9 radices ... sunt] que in hac questione sunt radices et sunt NY VU
que in hac questione et sunt radices MP que in hac sunt radices et sunt T 9 igitur eas]
ergo 5 NY quinque VU MP T 10 Quos ... erunt] Quibus 39 additis, erunt NY VU MP T
cuius] unam NY 11 accipias] accipies VU MP T 12 Remanet] et remanent NY VU
MP T qui] que VU MP T census] om. NY VU MP T Est IX] IX T Et si]
si NY VU MP T 13 aut tres] om. T similiter] om. NY VU MP T post eos add.
semper NY VU MP T 14 quod ... eis] radices et numeri qui cum eis sunt NY VU MP
T 15 reduxisti censum] censum reduxisti NY VU MP T ut] si NY T ut si VU est
significatio] significatio est NY VU MP T 16 equatur] est MP 17 additur] addatur
NY 18 aggregantur] aggregatur T oportet] oportet MP itaque ut] igitur
ut VU T quod MP 18-19 unum ... censum] unum censum reducantur NY VU MP T
19 iam] om. VU MP T 20 post tribus add. ergo NY 21 post viginti add. dragmis

est intentio quod cum cuilibet censui quinque ipsius radices adduntur,
 aggregantur inde viginti quattuor. Media igitur radices et sunt duo et semis.
 Multiplica ergo eas in se et fient sex et quarta. Adde hoc viginti quattuor et
 erunt triginta et quarta. Cuius accipias radicem que est quinque et semis. Ex qua 25
 minue radicem medietatem que est duo et semis. Remanet ergo tres qui est
 radix census, et census est novem.
 Et si dicatur: 'Medietas census et quinque radices equantur viginti octo.'
 Cuius quidem intentio est quod cum cuiuslibet census medietati additur equale
 quinque radicibus ipsius, proveniunt inde viginti octo. Tu autem vis ut rem 30
 tuam reintegres donec ex ea unus proveniat census. Quod est ut ipsam duplices.
 Duplica ergo ipsam et duplica quod est cum ea ex eo quod equatur ei. Erit
 itaque quod census et decem radices equantur quinquaginta sex. Media ergo
 radices, et erunt quinque. Et multiplica eas in se et provenient viginti quinque.
 Adde autem eas quinquaginta sex et fient octoginta unum. Cuius accipias 35
 radicem que est novem. Et minuas ex ea medietatem radicem que est quinque.
 Et remanent quattuor qui est radix census quem voluisti. Et census est sedecim
 cuius medi(P 111 rb)etas est octo. Et similiter facias de unoquoque censuum, et
 de eo quod equat ipsum ex radicibus et numeris.
 Census vero et numerus qui radicibus equantur sunt sicut si dicas: 'Census et 40
 viginti una dragma equantur decem radicibus,' Cuius significatio est quod cum
 cuilibet censui addideris viginti unum, erit quod aggregabitur equale decem
 radicibus illius census. Cuius regula est ut medies radices et erunt quinque.
 Quas in se multiplica et proveniet viginti quinque. Ex eo itaque minue viginti
 unum quem cum censu nominasti et remanebit quattuor. Cuius accipies 45
 radicem que est duo. Quam ex radicem medietate, que est quinque, minue.
 Remanebit ergo tres qui est radix census quem voluisti; et census est novem.

NY itaque] igitur ergo NY MP T est in questione] est secum in questione NY T est
 secum MP 22 cuilibet] cuidam T adduntur] adduntur T 23 aggregantur]
 aggregatur VU T inde] om. VU MP T semis] i/ii VU MP 24 ergo] om. VU T
 hoc] om. NY VU T 26 radicem medietatem] medietatem radicem VU MP T rema-
 net] remanent VU T qui] que VU MP T 28 dicatur] dicas MP 29 additur]
 addatur VU MP T 30-31 Tu ... tuam] Oportet autem ut NY VU MP Oportet igitur ut T
 rem tuam] om. VU T 31 ex ea ... proveniat] donec proveniat ex ea unus census VU MP T
 post ipsam add. medietatem NY VU T mediam MP 32 post ipsam add. medietatem NY
 VU MP T duplica] id NY VU MP T quod] om. MP quodcumque T est cum
 ea] cum ea est NY VU MP ea est T ex ... ei] et id quod ei equatur NY VU MP T 33
 Erit ... quod] Erit (add. itaque NY) unus census et NY VU MP T quod equantur] que
 equantur VU MP qua equantur T 34 Et] om. VU MP T eas in se] illas in se VU T
 eas illas in se MP provenient] proveniunt NY VU MP T 35 autem] ad NY VU MP
 T fient] fiunt T accipias] accipiat MP 36 Et ... ea] Ex qua minues NY VU T
 Ex qua minuas MP medietatem radicem] radicem medietatem NY VU MP T est]
 sunt MP 37 qui est] que sunt NY VU MP T 39 equat ipsum] equatur ipsi NY VU
 MP T 40 radicibus equantur] equantur radicibus NY VU MP T 41 dragma] dragme
 NY VU MP T 42 cuilibet ... addideris] addideris cuilibet XXI MP censui] om. VU T
 43 illius census] census illius MP 44 proveniet] provenient NY provenient VU MP
 T 45 unum quem] numerum quem NY T unum numerum quem VU MP accipies]
 accipias NY VU MP T 46 minue] subtrahe NY VU MP T 47 remanebit] remanebunt

Quod si volueris, addes ipsam medietati radicum et erit septem. Qui est radix census; et census est quadraginta novem. Cum ergo questio evenierit tibi deducens te ad hoc capitulum, ipsius veritatem cum additione experire. Quod si non fuerit, tunc procul dubio erit cum diminutione. Et hoc quidem unum trium capitulorum in quibus radicum mediatio est necessaria progreditur cum additione et diminutione. Scias autem quod cum medias radices in hoc capitulo et multiplicas eas in se, et fit illud quod aggregatur minus dragmis que sunt cum censu, tunc questio est impossibilis. Quod si fuerit eisdem dragmis equalis, tunc radix census est equalis medietati radicum absque augmento et diminutione. Et omne quod tibi evenierit ex duobus censibus aut pluribus aut paucioribus uno censu, reduc ipsum ad censum unum sicut est illud quod in primo ostendimus capitulo.

Radices vero et numerus que censui equantur sunt sicut si dicas: Tres radices et quattuor ex numeris equantur censui uni.' Cuius regula est ut medies radices que erant unus et semis. Multiplica ergo ipsas in se et provenient ex eis duo et quarta. Ipsum itaque quattuor dragmis adde et fiunt sex et quarta. Cuius radicem que est duo et semis assume; quam medietati radicum que est unus et semis adde; et erit quattuor qui est radix census. Et census est sedecim. Omne autem quod fuerit maius censu uno aut minus, reduc ad censum unum.

Hii ergo sunt sex modi, quos in huius nostri libri principio nominavimus. Et

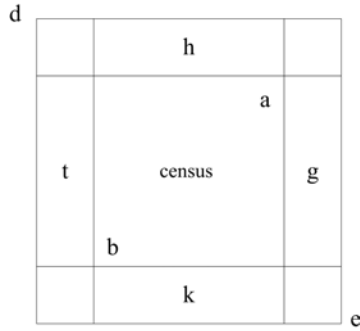
NY et remanent *VUMPT* qui est] que sunt *NY VUMPT* 48 ipsam ... septem] ipsam radicem, que est II, medietati radicum, que est V, eritque VII *NY VUMPT* 48-49 qui ... novem] que sunt radix census et census est ¶ *NY* que sunt radix census XLVIII *VUMPT* que sunt radix census, scilicet, XLVIII *T* 49 Cum ergo] Quando ergo *VUMPT* 50 deducens] reduces *NY VUMPT* hoc] quantum *VUMPT* additione] augmento *NY VUMPT* argumento *T* experire] debes probare *NY VUMPT* 51 tunc procul] sine *NY VUMPT* dubio] dubis *sic T* 51-52 hoc quidem ... capitulorum] istud est unum de capitulis tribus *NY VUMPT* 52-53 in ... deminutione] necessarium est cum addimento (additamento *NY VU*) medietatis radicum aut cum deminutione procedere *NY VUMPT* 53 Scias quod] Et scias quod *VU* Et scias *MP T* cum] quando *NY VUMPT* radices] radicem *NY VUMPT* hoc] quinto *VU om. MP T* 54 eas in se] in se ipsas *NY* eam in se ipsam *VUMPT* et fit ... minus] si id quod provenit fuerit minus de *NY VUMPT* si id quod provenierit erit minus *T* 55 post fuerit *add.* et *MP* post est *add.* destructa vel falsa vel non possibilis *NY* falsa et *VUMPT* si ... equalis] si cum illis dragmis erit equalis *NY VUMPT* si illi dragmis erit aequalis *T* 56 census] de censu *NY* est] erit *NY VUMPT* radicum absque] radicis sine *NY MP T* radicem sine *VU* aumento] additamento et sine *NY VUT* addimento *MP* 57 omne] totum illud *NY VUMPT* evenierit] provenierit *NY* provenierit erit census *VUMPT* provenit erit census *T* 57-59 ex ... capitulo] de 2 censibus aut plus aut minus dummodo census ille reducatur ad unum censum sicut est illud quod in primo capitulo demonstratum *NY* et non plus neque minus dummodo census ille deducatur in unum censum, sicut in primo capitulo demonstratur *VUT* et non plus neque minus dummodo census ille producat in unum censum, sicut in primo capitulo demonstratur *MP* 60 que] qui *VU* 62 erant] sunt ibi et erunt *NY VUMPT* ergo ipsas] ergo istas *NY* istas *VUMPT* ex eis] post *add.* radicibus *NY om. VUT* 63 Ipsum itaque] Que *NY VUMPT* 64 et fiunt] erunt *NY VUMPT* radicem ... assume] assume radicem ... *NY VUMPT* 65 erit ... est] est ¶ qui sunt *NY* sunt IIII que sunt *VUMPT* 66 fuerit] fiunt *VU* fuit *T* censu uno] uno censu *NY VUMPT* reduc ad censum unum] ad unum reduc censum *VUMPT* 67 nostri] mei

nos quidem iam explanavimus eos et diximus quod eorum tres modi sunt in quibus radices non medianitur. Quorum regulas et necessitates in precedentibus ostendimus. Illud vero quod ex mediatione radicum in tribus aliis capitulis est necessarium cum capitulis verificatis posuimus. Deinceps vero unicuique capitulo formam faciemus, per quam pervenitur ad causam mediationis. 70

<III. DE DEMONSTRATIONE REGULARUM>

Causa autem est ut hic census et decem radices equantur triginta novem dragmis. Fit ergo illi superficies quadrata ignotorum laterum, que est census quem et eius radices scire volumus. Que sit superficies *ab*. Unumquodque autem laterum ipsius est radix eius. Et unumquodque latus eius cum in aliquem numerum multiplicatur, tunc numerus qui inde aggregatur est numerus radicum quarum queque (P 11 iva) est sicut radix illius superficies. Postquam igitur dictum est quod cum censu sunt decem radices, accipiam quartam decem que est duo et semis. Et faciam unicuique quarte cum uno laterum superficiei superficiem. Fiunt ergo cum superficie prima que est superficies *ab* quattuor superficies equales cuiusque quarum longitudo est equalis radices *ab* et latitudo est duo et semis. Que sunt superficies *g*, *b*, *i*, *k*. Radici igitur superficiei equalium laterum et etiam ignotorum deest quod ex angulis quattuor est diminutum, scilicet unicuique angulorum deest multiplicatio duorum et semis in duo et semis. Quod igitur ex numeris necessarium est ad hoc ut superficiei quadratura compleatur, est multiplicatio duorum et semis in se quater. Et aggregatur ex summa illius totius viginti quinque. Iam autem scivimus quod prima superficies que est superficies census et quattuor superficies que ipsam circumdant, que sunt decem radices, sunt ex numeris triginta novem. Cum ergo addiderimus ei viginti quinque, qui sunt ex quattuor quadratis que sunt super 20

NY libri] *om.* NY VU MP T 69 necessitates] numerositates VU 70 ostendi-
mus] demonstravimus NY VU MP dinumeravimus T vero] autem NY VU MP T 71
verificatis] verificatione NY VU MP T 72 formam] formas NY VU MP T quam] quas
NY VU MP T causam] causas NY VU MP T
III 3 fit] fiat NY VU MP T quadrata] duadrata MP 4 eius radices] cuius radi-
cem VU MP T Que] Et NY VU MP T 5 ipsius] *om.* NY VU MP T eius] *om.* MP
T 5-6 unumquodque ... multiplicatur] cum aliquo altero numero multiplicatum NY
uno latere eius cum aliquo altero numero multiplicato (multiplicatum VU) VU T in ... ali-
quem] aliquo alio numero MP 6 tunc ... aggregatur] numerus aggregatus est numerus
NY VU MP T 7 superficies] superficiei NY VU MP T 8 accipiam ... decem] accipio
i/iii de X VU MP T post quartam add. de NY post decem add. Radicibus VU T
9 uno] unoquoque NY VU MP T post superficiei add. db NY 10 Fiunt] Fient NY
VU MP T superficiei] *om.* T superficiei] *om.* NY VU T 11 cuiusque quarum]
quarum cuiusque NY quarum IIII superficierum cuiusque VU MP T est ... radices]
equalis est radici NY VU MP T 12 post superficiei add. ab NY VU T 13 etiam] *om.*
VU MP T quod ... est] id quod dant quatuor anguli NY VU MP T 14-15 scili-
cet ... semis] similiter (simile T) quilibet angulorum qui sunt DC (qui ... DC] qui NY) deest
(est VU T) multiplicatio II.i/i cum II.i/ii quod igitur ex numeris est necessarium NY VU MP T
16 in se] in II. i/ii NY VU MP T 17 aggregatur] aggregantur NY VU MP T 18
que ... superficies] *om.* NY VU T ipsum] ipsum T 20 ei] eis NY MP quil] que



angulos superficiei *ab*, complebitur quadratura maioris superficiei que est superficies *de*. Nos autem iam novimus quod totum illud est sexaginta quattuor. Unum igitur laterum eius est ipsius radix que est octo. Minuam itaque quod est equale quarte decem bis ab extremitatibus duabus lateris superficiei maioris que est superficies *de*. Et remanebit latus eius tres. Qui est equalislateri superficiei prime, que est *ab*, et est radix illius census. Nos autem mediamus radices decem et multiplicamus eas in se et addimus eas numero qui est triginta novem, nisi ut compleatur nobis figure maioris quadratura cum eo quod deest quattuor angulis. Cum enim cuiusque numeri quarta in se multiplicatur et deinde quod inde provenit in quattuor, erit quod proveniet multiplicationi medietati eius in se equale. Sufficit igitur nobis multiplicatio medietatis radicum in se, loco multiplicandi quartam in se quater. 25

Est eius preterea forma altera ad hoc idem perducens: que est superficies *ab* que est census. Volumus autem ut addamus ei equale decem radicibus eius. Mediabimus igitur decem et erunt quinque. Et faciemus eas duas superficies super duas partes *ab*, que sint due superficies *g* et *d* quarum cuiusque longitudo 30 35

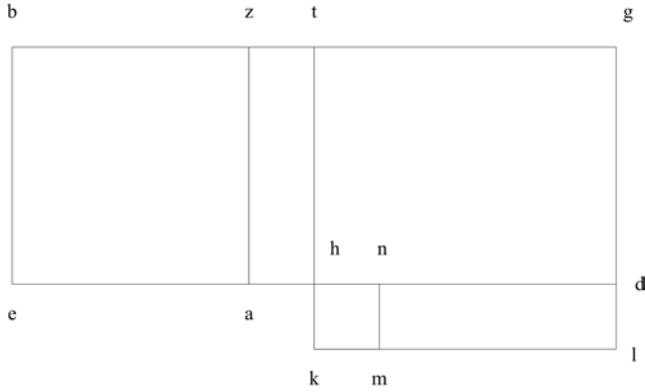
MP T quattuor] *om. NY VU MP T* qui] que *T* 21 maioris] maior *NY VU MP T*
22 de] de *et infra VU T* post est *add. ex VU* post quattuor *add. dragmis NY VU*
MP T 23 est] et *NY VU T* que] *om. NY VU T* Minuam] Minuamus *NY VU MP*
T quarte decem] *i/iiii de X NY VU MP T* 24 lateris] laterum *VU* 25
qui ... equalis] quod ... equale *NY VU MP T* 26 mediamus] mediavimus *MP* 27
multiplicamus eas] multiplicamus in se *NY VU T* multiplicavimus in se *MP* eas] *om. NY*
VU MP T 28 nisi] *om. NY VU T* figurae ... quadratura] figura maioris quadratura
VU figura maioris quadraturae *MP T* 29 deinde quod] quod ex inde *NY VU MP T*
30 provenit] proveniet *T* multiplicationi] multiplicate *NY* medietati eius] medie-
tatis *VU* medietati *MP T* 31-32 Sufficit ... quater] Nos igitur curamus de multiplicatione
medietatis radicum in se: postquam (plusquam *T*) multiplicavimus eorum quartas in se (*add.*
quater insequenter *NY*) et productum quater *NY VU MP T* 33 eius] etiam *NY VU MP T*
forma altera] alia forma *VU MP T* ad ... perducens] ad idem producons *VU MP T*
que ... superficies] que est (sit *VU*) superficies *NY VU* sit superficies *MP T* 34 autem ut
addamus] addere *NY VU MP T* 35 mediabimus] permediabimus *NY* Et] *om. NY*
VU MP T sint] sunt *NY VU T* 36 quarum] quadrangule quarum *NY VU MP T*

sit equalis lateri superficiei *ab* et latitudo eius sit quinque que est medietas decem. Remanebit ergo nobis super superficiem *ab* quadratum quod fit ex quinque in quinque, qui est medietas decem radicum. Quas addidimus super

g	a census b
quinque 25	antiqua d

duas partes superficiei prime. Scimus autem quod superficies prima est census, 40
et quod due superficies que sunt super duas ipsius partes sunt decem radices
eius. Et hoc totum est triginta novem. Ad hoc igitur (P 11 lvb) ut maioris
superficiei quadratum compleatur erit totum illud quod aggregatur sexaginta
quattuor. Accipe ergo radicem eius que est unum laterum superficiei maioris:
quod est octo. Cum ergo minuerimus ex ea equale ei quod super ipsam 45
addidimus quod est quinque, remanebit tres. Qui est latus superficiei *ab* que est
census. Ipse namque est radix eius, et census est novem.
Census autem et viginti unum equantur decem radicibus. Ponam itaque
censum superficiem quadratam ignotorum laterum que sit superficies *ab*.
Deinde adiungam ei superficiem equidistantium laterum cuius latitudo sit 50
equalis uni lateri superficiei *ab*, quod sit latus *gd*. Et superficies sit *ga*. Et ponam
ipsam esse viginti unum. Fit ergo longitudo duarum superficierum simul latus
ed. Nos autem iam novimus quod longitudo eius est decem ex numeris. Omnis
namque superficiei quadrate equalium laterum et angulorum, si unum latus
multiplicatur in unum, est radix illius superficiei. Et si in duo est due radices 55

cuiusque longitudo] uniuscuiusque longitudo NY VU MP T 37 equalis lateri] lateris
superficiei NY VU MP T 38 super] om. NY superficiem] superficies AB quadrata
et NY VU MP T 39 qui] quod NY VU MP T decem radicem] radicem X NY VU MP
T Quas addidimus] Iunximus NY VU MP T 40 prima] add. scilicet AB NY VU MP
T 41 sunt] om. VU MP T 42 eius] om. NY VU T novem] add. ab MP Ad
hoc] om. T maioris] maior NY VU T 43 quadratum] quadratura NY VU MP T
illud quod aggregatur] aggregatum NY VU MP T 44 ergo] om. NY VU MP T 45
quod] que VU MP T minuerimus ex ea] ex ea minuimus NY VU T ex ea minuerimus MP
ei] illi VU MP T super ipsam] supra ipsum NY VU T 46 remanebit] remanebunt
VU MP T Qui est] Que sunt NY VU MP T 47 ipse] ipsum NY VU T eius] om.
NY VU MP T 48 equantur] equatur T Ponam] Ponamus VU MP T 50 ei] illi
T 51 quod sit] et hoc VU MP T ga] gb VU T 52 Fit] Sit NY VU MP T si-
mul] om. NY VU MP T 53 quod] quo T ex] de VU MP T add. radices NY 54
quadrate] quadratura VU MP T 55 multiplicatur] multiplicetur VU MP T illius
superficiei] superficiei illius unum NY superficiei eius unum VU MP T post si add. duo T

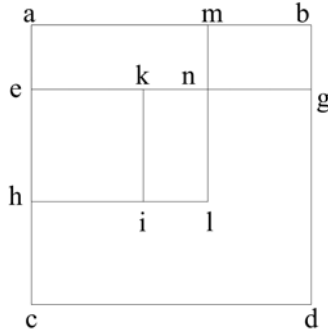


eius. Postquam igitur iam dictum est quod census et viginti una dragma
 equantur decem radicibus. Et scimus quod longitudo lateris *ed* est decem,
 quoniam latus *be* est radix census. Ergo dividam latus *ed* in duo media super
 punctum *b*, et erigam super ipsum lineam *bt*. Manifestum est itaque quod *bd* est
 equalis *be*. Sed iam fuit nobis manifestum quod linea *bt* est equalis *be*. Addam
 itaque linee *bt* quod sit equale superfluo *db* super *bl*, ut quadretur superficies.
 quod sit linea *hk*. Fit ergo *lk* equalis *tg*, quoniam *dh* fuit equalis *tg*; et provenit
 superficies quadrata que est superficies *lt*. Et ipsa est quod aggregatur ex
 multiplicatione medietatis radicum in se, que est quinque in quinque. Et illud
 est viginti quinque. Superficies vero *ag* fuit iam viginti unum qui iam fuit
 adjunctum ad censum. Post hoc faciamus super *hk* superficiem quadratam
 equalium laterum et angulorum, que sit superficies *mb*. Et iam scivimus quod
bt est equalis *eb*. Sed *eb* est equalis *ae*. Ergo *bt* est equalis *ae*. Sed *tk* iam fuit
 equalis *he*. Ergo *ba* reliqua est equalis relique *hk*. Sed *hk* est equalis *mn*. Ergo
mn est equalis *bt*. Sed *tk* iam fuit equalis *kl*, et *hk* est equalis *mk*. Ergo *ml*
 reliqua est equalis *bt* relique. Ergo superficies *ln* est equalis superficiei *ta*. Iam
 autem novimus quod superficies *lt* est viginti quinque. Nobis itaque patet quod

est ... eius] duo sunt eius radix (radices *NY*) *NY VU MP T* **56** iam] *om. NY VU T*
 dragma] *om. NY VU MP T* **57** lateris] ut latus *NY* sive latus *VU MP T* **58** be] *ae VU*
T **59** ipsam] ipsam *VU MP T* post *ht add.* que est equalis *ae* (be *NY*) *NY VU T*
 post quod *add.* linea *NY VU MP T* **60** post equalis *add.* linee *NY VU MP T* nobis] *om*
NY VU T be] linee *ea VU T* linee *be NY* **61** linee] *om. VU MP T* superfluo]
 excessum *T* hl] *ht NY VU T* ut] *et NY VU MP* ut ... *hk*] et sit linea *hr* et qua-
 dratur superficies *T* **62** Fit] Equalis erit *VU MP* Fit ... *tg*] equalis erit ergo *tk tg VU*
NY equalis ergo erit *tr ipsi tg T* provenit] proveniet *VU MP T* **63** ipsa] ipse *T*
 quod] que *MP* quod aggregatur] que aggregantur *VU aggregatum T* **65** ag] *bg VU*
T iam fuit] numerus iam fuit *NY* nusquam fuit *VU T* adjunctum] adjunctus *NY VU*
MP T **67** scivimus] scimus *VU T* **68** ante *ht add.* linea *NY VU T* eb] *ae NY*
VU MP ea] *eb T* post ergo *add.* linea *MP* **68-69** sed ... *he*] *om. NY* er-
 go ... *hk*] Igitur *ha* relique est equalis *hk* relique. Sed *hk* est equalis *mn* ergo *mn* est equalis
hb VU MP T **69** post ergo *add.* superficies *T* post equalis *add.* superficiei *T*
70 ht] *ha NY* **70-71** ergo ... *ta*] *om. T* **72** Nobis itaque patet] Manifestum fuit

superficies *gb* addita sibi superficiei *ln* est equalis superficiei *ga* que est viginti unum. Postquam ergo minuerimus ex superficie *lt* superficiem *gb* et superficiem *nl*, que sunt viginti unum, remanebit nobis superficies parva que est superficies *nk*. (P li 2ra) Et ipsa est superfluum quod est inter viginti unum et viginti quinque. Et ipsa est quattuor cuius radix est *bk*. Sed ipsa est equalis *ba* et illud est duo. Sed he est medietas radicum, que est quinque. Cum ergo minuerimus ex ea *ba* que est duo, remanebit tres qui est linea *ae* que est radix census. Et census est novem. Et illud est quod demonstrare voluimus. 75
 Dictum est autem tres radices et quattuor dragme equantur censui. Ponam ergo cenum superficiem quadratam ignotorum laterum sed equalium et equalium angulorum, que sit superficies ad. Tota igitur hec superficies congregat tres radices et quattuor quos tibi nominavi. Omnis autem quadrate superficiei unum latus in unum multiplicatum est radix eius. Ex superficie igitur ad secabo superficiem ed, et ponam unum latus eius quod est eg tres qui est numerus radicum. Ipsum vero est equale zd, nobis itaque patet quod superficies eb est quattuor qui radicibus est additus. Dividam ergo latus eg quod est tres radices in duo media super punctum *b*. Deinde faciam ex eo superficiem quadratam que sit superficies et'. Et ipsa est quod fit ex multiplicatione medietatis radicum, que est unum et semis in se, et est duo et quarta. Post hoc addam lineae *bt* quod fit equale *ae* que sit linea *tl*. Fit ergo linea *bl* equalis *ab*, et provenit superficies quadrata que est superficies *bm*. Iam autem manifestum fuit nobis quod linea *ag* est equalis *ez*, et *ab* est equalis *en*. Remanet ergo *gb* equalis *nz*. Sed *gb* est equalis *kt*. Ergo *kt* est equalis *nz*. Sed *mn* est equalis *tl*. 80
 Superficies igitur *mz* fit equalis superficiei *kl*. Iam autem scivimus quod superficies *az* est quattuor qui est additus tribus radicibus. Fiunt ergo superficies *an* et superficies *kl* simul equales (P 11 2rb) superficiei *az* que est quattuor. Manifestum est igitur quod superficies *bm* est medietas radicum que est unum et semis in se, quod est duo et quarta, et quattuor additi qui sunt superficies *an* 85
 90
 95
 100

etiam NY VUMPT 74 post lt add. que est XXV NY VUMPT post gh add. que est equalis superficiei gh NY VUMPT 75 nobis] om. NY VUMPT 75-76 que est superficies nk] pone NK NY VUMPT 76-77 Et ... hk] et illud est superfluum XXV super XXI sunt 4 et radix eius est HK NY VUMPT 77 ipsa] illa NY VUMPT 78 duo] duo sunt radix de IIII in quibus superat superficies lt superficiem in ga (gb VUMPT) NY VUMPT 79 remanebit] remanent NY VUMPT remanet T 80 demonstrare voluimus] volebamus demonstrare NY VUMPT monstrare T 81 autem] etiam VUMPT dragme] dragmas equari censui VUMPT Ponam] Ponamus VUMPT 82 cenum] om. NY VUMPT sed equalium] om. NY VUMPT 83 hec superficies] superficies hec NY 84 quos ... nominavi] dragmas quas tibi nominavi (notavi NY) in questione NY VUMPT 85 eius] om. VUMPT Ex] De NY VUMPT post ponam add. in NY VUMPT 87 quod] om. VUMPT 88 est] esse VUMPT est additus] sunt additi NY VUMPT 89 ex eo] om. NY VUMPT 90 sit] est MP quod]que T 91 in ... quarta] que est 2 1/4 VU T 92 post ht add. linea TL que sit equalis AE. Erit ergo NY VUMPT 93 provenit] proveniet superficiem quadratam HM VUMPT post HM add. dicta MP lam] om. MP 94 nobis] om. NY VUMPT post et add. linea NY VUMPT 96 fit] est NY VU T scivimus] scimus NY T 97 qui sunt] que sunt addita NY VUMPT Fiunt] Fuerunt NY VUMPT 99 igitur] om. VUMPT hm] kh NY 100 post in



et superficies *kl*. Quod vero ex eo aggregatur est sex et quarta, cuius radix est
 duo et semis. Que est latus *ba*. Iam autem remansit nobis ex latere quadrati
 primi, quod est superficies *ad* que est totus census, medietas radicum que est
 unum et semis. Et est linea *gb*. Cum addiderimus super lineam *ab*, que est radix
 superficiei *bm* quod est duo et semis, lineam *hg* que est medietas radicum trium
 que est unum et semis, provenit illud totum quattuor. Quod est linea *ag*. Et ipsa
 est radix census qui est superficies *ad*. Et ipse est sedecim. Et illud est quod
 demonstrare volumus.

Inveni autem omne quod fit ex computatione in algebra et almuchabala
 impossibile esse quin proveniat ad unum sex capitulorum que retuli tibi in
 principio huius libri.

<IV.> CAPITULUM MULTIPLICATIONIS

Nunc quidem refferam tibi qualiter res multiplicentur que sunt radices alie
 scilicet in alias cum fuerint singulares et cum numerus fuerit cum eis, aut fuerit
 exceptus ex eis numerus, aut ipse fuerint excepte ex numero, et qualiter alie aliis
 aggregentur, et qualiter alie ex aliis minuantur. Scias itaque impossibile esse
 quin unus omnium duorum numerorum, quorum unus in alterum multiplica-
 tur, duplicetur secundum quantitatem unitatum que est in altero. Si ergo fuerit

se *add.* multiplicata *T* quod] que *VUMPT* **101** est] *om.* *T* **102** Que] Quod
NY VUMPT nobis] *om.* *NY VUMPT* **104** Cum addiderimus] Quando nos iunxi-
 mus *NY VUMPT* **105** quod] et *NY VUMPT* lineam] et est lineam *MP* ra-
 dicum trium] de tribus radicibus *NY VUMPT* **106** que] et *NY VUMPT* quod est]
 que sunt *NY VUMPT* **107** qui] quod *T* **108** volumus] volebamus *NY VUMPT*
109 omne] *om.* *T* in algebra] algebre *NY VUT* almuchabala] almuchabale *NY VU*
MP elmuchabala *T*

IV **2** refferam] referam *MP NY T* quidem] *om.* *NY VUMPT* multiplicentur]
 multiplicantur *VUMPT* **3** cum fuerint] *om.* *VUMPT* singulares] multiplicant
 singula res *VU* singula res *T* numerus fuerit] numeri fuerint *VUT* fuerit] fuerint
NY VUMPT **4** exceptus ... numerus] excepti ... numeri *NY VUMPT* fuerint]
om. *NY VUMPT* post alie *add.* cum *NY VUMPT* est] sunt *MP NY T* **5** ag-
 gregentur] aggregantur *NY VUMPT* et qualiter] qualiterque *NY VUT* ex] ab *NY*
VUMPT **6** in alterum multiplicatur] multiplicatur in alterum *T* **7** post duplicetur

articulus et cum eo fuerint unitates aut fuerint unitates excepte ex eo,
impossibile erit quin eius multiplicatio quater fiat; videlicet, articuli in
articulum et unitatum in unitates, et unitatum in articulum et articuli in
unitates. Quod si omnes unitates que sunt cum articulo fuerint addite aut
diminute omnes, tunc quarta multiplicatio erit addita. Sin autem une earum
fuerint addite et alie diminute, tunc quarta multiplicatio minuetur. Quod est
sicut decem et unum in decem et duo. Ex multiplicatione igitur decem in decem
fiunt centum. Et ex multiplicatione unius in decem fiunt decem addita. Et ex
multiplicatione duorum in decem fiunt viginti addita. Et ex multiplicatione
duorum in unum fiunt duo addita. Totum ergo illud est centum et triginta duo.
Et cum fuerint decem uno diminuto in decem uno diminuto, multiplicabis
decem in decem et fient centum. Et unum diminutum in decem et fient decem
diminuta. Et unum diminutum iterum in decem et fient decem diminuta.
Unum quoque diminutum multiplicabis in unum diminutum, et fiet unum
additum. Erit ergo totum illud octoginta unum.
Quod si fuerint decem et duo in decem uno diminuto, multiplicabis decem in
decem et fient centum. Et unum diminutum in decem et erunt decem diminuta.
Et duo addita in decem et erunt viginti addita. Quod erit centum et
de(P 11 2va)cem. Et duo addita in unum diminutum et erunt duo diminuta.
Totum ergo illud erit centum et octo. Hoc autem non ostendi tibi nisi ut per
ipsum perducaris ad multiplicationem rerum aliarum scilicet in alias, quin cum
eis fuerit numerus aut cum ipse excipiuntur ex numero aut cum numerus
excipitur ex eis.
Cumque tibi dictum fuerit: Decem dragme re diminuta — est enim rei
significatio radix — multiplicare in decem', multiplicabis decem in decem et fient
centum, et rem diminutam in decem et erunt decem res diminute. Dico igitur
quod sunt centum, decem rebus diminutis. Si autem dixerit aliquis: Decem et

add. aut triplicetur *VUMPT* est] sunt *NY VU* **8** *post* unitates *add.* addite *VUMPT*
ex eo] *om. VUMPT* **9-11** videlicet ... unitates] duc articulum in articulum et unitates
in unitates in articulum. Et articulum in unitates *MP* impossibile ... unitates] duc
articulum in articulum et unitates in articulum et articulum in unitates *VU* duc articulum in
articulum et unitates in unitates in articulum. Et articulum in unitates *T* **11** cum] in *NY*
VU T **12** *post* omnes *add.* Quantitates *VU T* tunc ... diminute] multiplicatio erit
addita. Si vero una earum fuerit (fuerint *VU*) addita et alie diminute *VU T om. MP* **14-15**
Ex multiplicatione unius] *post add.* additi *NY* Multiplico igitur *VU T* Multiplico unius additi
MP **15-17** Et ... addita.] Et iterum *X* in due fiunt *XX* addita *NY VU om. MP T* **19**
fient] fiunt *NY VUMPT* unum] *om. VUMPT* et fient] fiunt *NY VUMPT* **20**
Et fient] et iterum deminutum in decem fiet *VUMPT* fiunt *T* **21** Unum quoque]
Unumquodque diminutum *VUMPT* multiplicabis] *om. VU T* unum] *om. VU*
T **22** Erit ergo] Ergo erit *NY VUMPT* **23** Quod] Et *VUMPT* **24** fient] fiunt
NY T diminutum] diminuto *T* erunt] fient *NY* erit *T* **25** et erunt] *om. MP*
et] *om VUT* **26** et] *om. VUT* decem] *20 T* et] *om. T* **27** ostendi] demonstravi
NY VUMPT **28** scilicet in] per *NY VU T* quin] quando *T* **29** excipiuntur]
excipiat *T* **30** ex] ab *NY VU T* **31** cum ... fuerit] cum enim date fuerint *VU om.*
T **31** re diminuta] diminuta (*add.* Una *VU*) re ut multiplices in *10 VU NY* **31-34**
Decem ... diminutis] Cumque date tibi fuerint *10* dragme diminuta *1* re ut multiplices in *10*.

res in decem', multiplica decem in decem et erunt centum, et rem additam in 35
decem et erunt decem res addite. Erit ergo totum centum et decem res.
Quod si dixerit: 'Decem et res in decem et rem', dic: Decem in decem faciunt
centum. Et res addita in decem facit decem res additas. Et res addita in decem
facit etiam decem res additas. Et res addita in rem additam facit censum
additum. Erit ergo totum centum et viginti res et census additus.' Quod si quis 40
dixerit: Decem re diminuta in decem re diminuta', dices: Decem in decem
fiunt centum. Et res diminuta in decem fit decem res diminute. Et res diminuta
in decem fit decem res diminute. Et res diminuta in rem diminutam fit census
additus. Est ergo illud centum et census additus diminutis viginti rebus.'
Et similiter si dixerit: 'Dragma minus sexta in dragma minus sexta', erit illud 45
quinque sexte multiplicata in se, quod est viginti quinque partes triginta sex
partium unius dragme. Regula vero eius est ut multiplices dragmam in
dragmam et erit dragma, et sextam dragme diminutam in dragmam et erit sexta
dragme diminuta. Et sextam diminutam in dragmam, et erit sexta diminuta. Fit
ergo illud tertia dragme diminuta. Et sextam diminutam in sextam diminutam 50
et erit sexta sexte addita. Totum igitur illud erit due tertie et sexta sexte.
Si vero aliquis dixerit: Decem re diminuta in decem et rem', dices: 'Decem in
decem centum fiunt. Et res diminuta in decem fit decem res diminute. Et res in
decem fit decem res addite. Et res diminuta in rem fit census diminutus. Est

Est enim rei significatio radix. Multiplica bis in 10 fiunt 100; rem diminutam in 10 erunt 10
res diminute Dico ergo quod sunt 100 10 rebus diminutis *NY* Cum enim date fuerint (fuerunt
T) 10 dragme diminuta una re ut multiplices in 10. Est enim rei significatio radix. Multiplica
(multiplicata *T*) 10 in 10 fiunt 100 rem diminutam in 10 et erunt 10 res diminute. Dico ergo
quod sunt 100 minus 10 rebus diminutis *VUT* Cum enim date fuerint *X* dragme diminute una
re ut multiplices in *X* erunt decem res addite et iterum rem additam. Est enim rei significatio
radix. Multiplica *X* in *X* fiunt *C* rem diminutam in *X* erunt *X* res diminute. Dico ergo quod
sunt centum minus tribus rebus diminutis. *MP* 35 ante res *add.* una *VUMPT* et
erunt] fiunt *NY VUT* fiunt *MP* 36 post res *add.* addite *VUMPT* 37 dic] duc *NY VU*
MP T faciunt] fiunt *NY* et fiunt *VUMPT* 38 res addita] rem additam *NY VUMPT*
facit ... additas] fiunt ... addite *NY VUMPT* 38-39 Et ... additas] Et iterum rem addi-
tam in *X* fiunt *X* res addite. *NY VUMPT* 40 post res *add.* addite *NY VUMPT* quis]
om. NY VUT 41 Decem ... dices] 10 et res diminuta in 10 et rem diminutam, duc *NY T*
Centum et res diminuta in *X* et rem diminutam. Duc *VUMP* 42 ante fiunt *add.* et *MP T*
res ... decem] rem diminutam in *X* fiunt *NY VUMPT* res diminuta] rem diminutam *VU*
MP T 43 fit] sunt *NY* fiunt *VUMPT* diminuta] minuta *MP* 43-44 fit ... ad-
ditus] facit censum additum *VUMPT* 44 post illud *add.* totum *NY VUMPT* 45
post si *add.* quis *VUMPT* in dragma] in dragmam *VU* 46 post sexte *add.* que *NY*
VUMPT quod est] erunt *NY VUMPT* 46-47 viginti ... partium] XXV/XXXVI *VU*
MP T 25 partes de 36 partibus *NY* 47 vero eius] huius *NY VUMPT* 48 erit]
fiat *NY VUMPT* 49 Et sextam] Et iterum i/vi dragme *NY VUMP* post sexta *add.*
dragme *NY VUMPT* 49-50 Fit ... diminuta] *om. NY VUMPT* 50-51 Et ... et] i/vi
diminuta in i/vi diminutam *NY VUMPT* post sexte *add.* unius dragme *NY* post sexte²
add. addita *VUMP* 52 Decem ... re] *X* et res *NY VUMPT* 52-55 decem re ... dixerit]
om. T 52 dices] duces *VU* ducas *MP* 53 fiunt] fiunt *VUMP* Et ... fit] Et rem di-
minutam 10 in 10 fiunt *NY* Et rem diminutam in *X* fiunt (fiunt *VU*) *VUMP* 53-54 Et ... fit]
Et res diminuta in 10 fiunt *NY* Et rem additam in *X* fiunt *VUMP* 54 fit ... diminutus.]

ergo illud centum dragme censu diminuto.' Si autem dixerit: Decem re 55
diminuta in rem', dices: 'Decem in rem fiunt decem res. Et res diminuta in rem
fit census diminutus. Sunt ergo decem res censu diminuto. Et si dixerit: Decem
et res in rem decem diminutis, dices: Res in decem fit decem res, et res in rem
fit census. Et decem diminuta in decem fiunt centum dragme diminute. Et
decem diminuta in re fiunt decem res diminute.' Dico igitur quod est census 60
centum diminutis, postquam cum eo oppositum fuerit. Quod ideo est quoniam
prohiciemus (P I l2vb) decem res diminutas cum decem rebus additis, et
remanebit census centum dragmis diminutis. Si autem dixerit quis: 'Decem
dragme et medietas rei in medietatem dragme quinque rebus diminutis', dices:
'Medietas dragme in decem dragmas facit dragmas quinque. Et medietas 65
dragme in medietatem rei facit quartam rei addite. Et quinque res diminute in
decem dragmas fiunt quinquaginta res diminute. Et quinque res diminute in
medietatem rei fiunt duo census et semis diminuti. Est ergo illud quinque
dragme diminutis duobus censibus et semis, et diminutis quadraginta novem
radicibus et tribus quartis radicis.' 70
Quod si aliquis dixerit tibi: 'Decem et res in rem diminutis decem', et est
quasi dicat: 'Res et decem in rem decem diminutis', dic ergo: 'Res in rem facit
censum. Et decem in rem fiunt decem res addite. Et decem diminuta in rem
fiunt decem res diminute. Pretermittantur itaque addita cum diminutis, et
remanebit census. Et decem diminuta in decem fiunt centum diminutum ex 75
censu. Totum ergo illud est census diminutis centum dragmis.' Et omne quod
est ex multiplicatione additi et diminuti, sicut res diminute in additam rem, in
postrema multiplicatione semper minuitur.

facit censum diminutum *VUMP* 55 illud] totum *NY VUMP* re] et res *NY VUMP*
T 56 dices] duc *NY VUMP T* res diminuta] rem diminutam *VUMP T* 57
post res add. et *NY MP T* censu diminuto] census diminutus *NY VUMP T* Decem]
om. MP 58 post rem add. et *VUMP T* diminutis] diminuta *T* dices] duces *VU*
T ducas *MP* 58-59 Res ... census] Rem (Res *T*) in *X* fiunt *X* res, et rem in rem fit census
VUMP T 59 dragme] *om. VUMP T* diminute] et 10 diminuta in rem fiunt 10 res
diminutae *VU T* diminuta *MP* 60 igitur] *om. VUMP T* in re] rem *NY* 61
fuerit] erit *NY VUMP T* 62 prohiciemus] proiciemus *VUMP T* post additis add.
sibi oppositis *NY VUMP T* 63 quis] *om. NY VUMP T* 64 dices] duces *NY VUMP*
T 65 Medietas ... medietas] Medietatem (Medietates *T*) dragme in decem dragmas
fiet *V* dragme. Et medietatem (medietas *NY*) *NY VUMP T* 66-67 et ... diminute] *om. T*
67 fiunt] faciunt *NY* facit *VUMP T* res diminute] ras diminutas *NY* 68 fiunt] facit
VUMP T 70 radicibus] rebus *VUMP T* 71 tibi] *om. NY VUMP T* et] *om.*
NY VU T 72 Res ... ergo] res in *X* fiunt *X* res addite et *X* diminuta in rem fiunt *X* res
diminute et *VU* res in *X* fiunt *X* res diminute et *MP T* dic] duc *NY* 73 Et ... addite]
om. VUMP T 73-74 rem ... diminute] decem faciunt *C* diminuta *VUMP T* 74
Praetermittantur ... cum] Praetermissis itaque *C* additis et *X* diminutis *NY VUMP T* et]
om. VUMP T 75-76 Et ... censu] *om. NY VUMP T* 76 Totum ergo] Est ergo totum
NY VUMP et] *om. NY VUMP T* 77 est] *om. MP NY T* sicut ... diminute] sicut
diminute *NY* fit res *VUMP T* 78 post minuitur add. de additione *NY VUMP T*

<V.> CAPITULUM AGGREGATIONIS ET DIMINUTIONIS

Radix ducentorum diminutis decem adiuncta ad viginti diminuta radice
ducentorum est decem equaliter. Et radix ducentorum exceptis decem diminuta
ex viginti excepta radice ducentorum est triginta diminutis duabus radicibus
ducentorum. Et due radices ducentorum sunt radix octingentorum. Sed centum 5
et census diminutis viginti radicibus, ad quem adiuncta sunt quinquaginta et
decem radices diminutis duobus censibus, sunt centum et quinquaginta
diminutis censu et decem radicibus. Ego vero illius causam in forma ostendam,
si deus voluerit.
Scias itaque quod cum quamlibet census radicem notam sive surdam 10
duplicare volueris, cuius duplicationis significatio est ut multiplices eam in duo.
oportet ut multiplices duo in duo et deinde quod inde pervenerit in censum.
Radix igitur eius quod aggregatur est duplum radicis illius census. Et cum
volueris triplum eius, multiplicabis tres in tres et postea quod inde provenierit in
censum. Erit ergo radix eius quod aggregatur triplum radicis census primi. Et 15
similiter quod additur ex duplicationibus aut minuitur erit secundum hoc
exemplum.
Scias ergo ipsum quod si radicis census medietatem accipere volueris, oportet
ut multiplices medietatem in medietatem, deinde quod provenierit in censum.
Erit ergo radix eius quod aggregatur medietas radicis census. Et similiter si 20
volueris tertiam aut quartam eius aut minus aut plus, usquequo possibile est
consequi secundum diminutionem et duplicationem. Verbi gratia: si enim
volueris ut duplices radicem novem, multiplica duo in duo, postea (P 11 3ra) in
novem et aggregatur triginta sex, cuius radix est sex. Qui est duplum radicis
novem. Quod si ipsam volueris triplicare, multiplica tres in tres, postea in 25
novem, et erunt octoginta unum, cuius radix est novem. Qui est radix novem
triplicata. Sin autem radicis novem medietatem accipere volueris, multiplicabis
medietatem in medietatem et proveniet quarta. Quam postea multiplicabis in

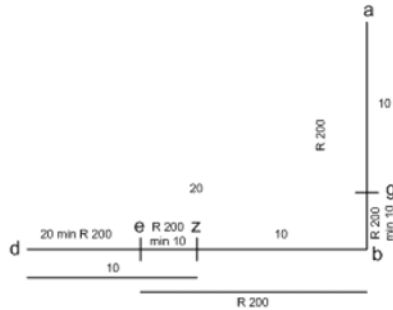
V 3 equaliter] equale *NY VU T* Et] *om. MP NY T* post ducentorum *add. 10 T*
4 ex] de *NY VU MP* et *T* diminutis] diminuta *MP T* **5** Et] Sed *NY VU MP T* **6**
ad quem] atque *NY VU MP T* sunt] ad *NY VU MP T* **8** post diminutis *add. uno VU*
MP T post radicibus *add. eius NY VU MP T* Ego ... illius] Illius vero *NY VU MP*
T **9** deus voluerit] deo placuerit *NY VU MP T* **10** quamlibet] cuiuslibet *NY VU MP*
T post volueris *add. in MP* **11-12** multiplices ... pervenerit] multiplices II in II et
(*add. VU*) quod inde provenierit *NY VU MP T* **12** oportet ... deinde] *om. NY* **13**
ante radix *add. Et NY VU MP T* igitur] *om. NY VU MP T* duplum] dupla *NY VU MP*
T **15** triplum] tripla *NY VU MP T* post primi *add. et secundi T* Et similiter]
om. T **16** duplicationibus] multiplicationibus *VU* multiplicationibus *MP T* **19** in
medietatem] *om. VU MP T* **21** post est *add. fuerit NY* post usquequo *add. fuerit*
VU MP T **21-22** est consequi] est *NY om. VU MP T* **22** enim] *om. NY VU MP T*
23 duplices] duplicem *VU MP T* postea] et productum *NY VU T om. MP* **24** aggre-
gatur] aggregatum inde *VU MP T* **24-25** Qui ... novem] Que est due radices de 9 *NY T*
Que sunt II radices (*add. de novem VU*) *VU MP* **25** ipsam volueris] volueris ipsam *NY*
VU MP T tres in ... postea] III in III sed (et *VU*) postea illud productum *NY VU MP T*
26 erunt] erit *VU MP T* Qui] Que *VU MP T* post radix *add. de VU MP T* **27**
Sin] Si *VU MP T* **28** quarta] in i/iiii *VU MP* multiplicabis] multiplica *VU MP T*

novem. Et erunt duo et quarta cuius radix est unus et semis. Qui est medietas
radicis novem. 30
Et similiter quod additur aut minuitur ex noto et surdo erit. Et hic est eius
modus. Quod si volueris dividere radicem novem per radicem quattuor, divides
novem per quattuor et erunt duo et quarta. Cuius radix est id quod provenit uni
quod est unis et semis. Quod si radicem quattuor per radicem novem volueris
dividere, divide quattuor per novem et erunt quattuor none. Cuius radix est id 35
quod provenit uni que est due tertie unius. Sin vero duas radices novem per
radicem quattuor dividere volueris et absque hoc aliorum censuum, dupla ergo
radicem novem secundum quod te feci noscere in opere multiplicium. Et quod
aggregatur, divide per quattuor aut per quod volueris. Et quod ex censibus
fuerit minus aut maius, secundum hoc exemplum operaberis per ipsum, si deus 40
voluerit.
Quod si radicem novem in radicem quattuor multiplicare volueris, multiplica
novem in quattuor et erunt triginta sex. Accipe igitur radicem eius que est sex.
Ipse namque est radix novem in radicem quattuor. Et similiter si velles
multiplicare radicem quinque in radicem decem, multiplicares quinque in 45
decem et acciperes radicem eius. Et quod inde aggregaretur esset radix quinque
in radicem decem. Quod si volueris multiplicare radicem tertie in radicem
medietatis, multiplica tertiam in medietatem, et erit sexta. Radix ergo sexte est
radix tertie in medietatem.
Sin autem duas radices novem in tres radices quattuor multiplicare volueris, 50
producas duas radices novem secundum quod tibi retuli donec scias cuius
census sit. Et similiter facias de tribus radicibus quattuor, donec scias cuius
census sit. Deinde multiplica unum duorum censuum in alterum et accipe

29 Qui] Que *VU MP T* 30 *post* radicis *add.* de *NY VU MP T* 31 est] *om.* *NY*
32 volueris ... quattuor] radicem VIII per radicem IIII volueris dividere *MP* 33 id] *i/iii*
VU MP erunt] erit *VU* 33-34 uni ... semis] ex divisione III per II *MP* est
id quod provenit uni quod est] 1 1/2 quod provenit ex divisione 3 per 2. *NY VU* 34-35
volueris dividere] dividere volueris *NY* 35 quattuor none] *iiii/9 VU iii/ix MP* id]
om. *NY VU MP T* 36 provenit] proveniet *VU T* provenerit *MP* que] quod *VU MP T*
Sin vero] Si autem *VU MP T* *post* radices *add.* de *NY VU MP T* 37 *post* radicem
add. de *NY VU MP T* et] *om.* *NY VU MP T* dupla] multiplica *NY VU MP T* 38
te feci] feci te *NY VU MP T* multiplicium] multiplicacionum *NY VU* multiplicatorum *MP*
39 per quod] quod *VU T* quot *MP* Et quod] Et quot *T* 40 fuerit] fiunt *VU MP T*
operaberis] operaveris *T* 43 Novem in quattuor] IIII in VIII *MP T* Accipe ... eius]
Cuius ergo accipe radicem *NY VU MP T* 44 Ipse namque] Quia illa *NY VU T* Quoniam il-
le *MP* *post* radix *add.* de *NY VU MP T* in radicem] multiplicata per radicem de *NY*
VU MP T velles] volueris *NY VU MP T* 45 multiplicare ... multiplicares] radicem
(de *NY*) 5 per radicem 10 multiplicare, multiplica *NY VU MP T* 46-47 acciperes ... de-
cem] sunt I cuius radix est id quod posuerit (provenerit *NY*) ex radice de V in radicem de X
NY VU MP T volueris] velis *NY* 48 *post* ergo *add.* huius *MP* unius *VU T* 49
post radix *add.* huius *MP* unius *NY VU T* *post* in *add.* radicem *NY* 50 Sin] Si *NY*
VU T *post* radices *add.* de *NY VU MP T* in] et *NY VU MP T* *post* radices
add. de *NY VU MP T* 51 *post* radices *add.* de *NY VU MP T* 52 sit] est *NY VU MP*
T *post* quattuor *add.* de *NY* 52-53] Et ... sit] *om.* *T* 53 sit] est *NY VU MP*

radicem eius quod aggregatur. Ipsa namque est due radices novem in tres
radices quattuor. Et similiter de eo quod ex radicibus additur aut minuitur
secundum hoc exemplum facias. 55

Cause autem radices ducentorum diminutis decem, adiuncte ad viginti
diminuta radice ducentorum, forma est linea *ab*. Ipsa namque est radix
ducentorum. Ab *a* ergo ad punctum *g* est decem. Et residuum radices
ducentorum est residuum lineae *ab* quod est linea *gb*. Deinde protraham a
puncto *b* ad punctum *d* lineam que sit linea viginti. Ipsa namque est dupla lineae
ag que est decem. A puncto igitur *b* usque ad punctum *e* quod *e* sit equale lineae
ab que est radix ducentorum. Et residuum de viginti sit a puncto *e* usque ad
punctum *d*. Et quia volumus aggregare quod remanet ex radice ducentorum
post projectionem decem quod est linea *gb*, ad lineam *ed* que est viginti 65

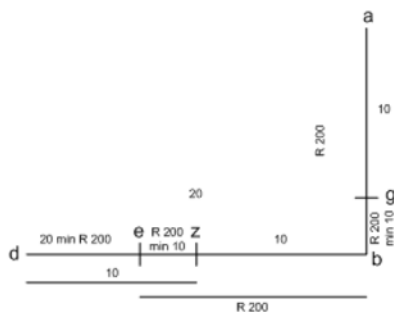


diminuta radice ducentorum. Et iam fuit nobis manifestum quod line(P I i 3rb)a
ab que est radix ducentorum est equalis lineae *be*, et quod linea *ag* que est decem
est equalis lineae *bz*. Et residuum lineae *ab* que est linea *gb* est equale residuo lineae
be quod est *ze*. Et addidimus super lineam *ed* lineam *ze*. Ergo manifestum est
nobis quod iam minuitur ex linea *bd* que est viginti, equale lineae *ga* que est
decem que est linea *bz*., et remanet nobis linea *zd* que est decem. Et illud est
quod demonstrare voluimus. 70

Causa vero radices ducentorum exceptis decem diminute ex viginti excepta

54 alterum] alium NY VU T due ... radices] radix II radicum de NY VU MP T 55
post radices add. de NY VU MP T ex radicibus] ad radices NY VU MP T 57 cause]
causa VU MP T post decem add. dragmis NY VU MP T 59 est] sunt NY sit VU MP
T 60 post est add. residuum radices CC NY VU MP T quod est] videlicet NY VU
MP T deinde protraham] traham NY VU T 61 linea] om. NY VU MP T lineae]
ad lineam VU T 62 est decem] decem est NY MP est T quod est] om. VU MP T
equale] equalis VU T 63 post ducentorum add. Et a puncto *b* usque ad punctum *z* sit X.
NY VU MP T 64 quia] quae T 65 quod] que VU MP T 66 fuit ... manifestum]
manifestum nobis fuit VU MP T 67 be] eb NY 68 est] om. MP T et] ergo
NY VU MP T que] quod NY VU MP T equale] equales MP equalis VU T 69
post est add. linea NY addidimus super] quia (quod NY) adiunximus supra NY VU MP
T 70 nobis] om. NY VU MP T 71 nobis] om. NY VU MP T 73 Causa] Cause

75



80

85

90

est quare iam scivimus quod apud te sunt centum et census exceptis viginti radicibus. Postquam ergo addidisti eis quinquaginta et decem radices, facta sunt centum et quinquaginta et census exceptis decem radicibus. Hec namque decem radices addite restaurant viginti radicum diminutarum decem radices. Remanent ergo centum et quinquaginta et census, exceptis decem radicibus. Sed cum centum fuit iam census. Postquam ergo minueris duos census exceptos de quinquaginta, preteribit census cum censu, et remanebit tibi census. Fiet ergo centum et quinquaginta excepto censu, et exceptis decem radicibus. Et illud est quod demonstrare volumus.

<VI.> CAPITULUM QUESTIONUM

Iam processerunt ante capitula numerationis et eorum modos sex (P II 3va) questiones quas posui exempla sex capitulis precedentibus in principio huius libri de quibus tibi dixi, quoniam impossibile est quin computatio algebre et almuchaba eveniat tibi ad aliquod capitulum eorum. Postea secutus sum illud ex questionibus cum eo quod intellectui propinquius fuit, per quod difficultas alleviabitur. Et significatio facilius fiet, si deus voluerit.

Questio earum prima est sicut si diceris: Divide decem in duas partes, et multiplica unam duarum partium in alteram deinde multiplica unam earum in se. Et sit multiplicatio eius in se equalis multiplicationi uni duarum sectionum in alteram quater. Eius vero regula est ut ponas unam duarum sectionum rem, et alteram sectionem ponas decem excepta re. Multiplica igitur rem in decem excepta re, et erunt decem res excepto censu. Deinde multiplica hoc totum in quattuor, que dixisti. Erit ergo quod proveniet quadruplum multiplicationis unius duarum sectionum in alteram. Erunt itaque quadraginta res exceptis quattuor censibus. Postea multiplica rem in rem que est una duarum sectionum in se; et erit census qui est equalis quadraginta rebus exceptis quattuor censibus. Deinde restaurabis quadraginta per quattuor census. Post hoc addes census censui. Et erit quod quadraginta res erunt equales quinque censibus. Ergo unus census erit octo radices qui est sexaginta quattuor. Radix ergo sexaginta quattuor est una duarum sectionum multiplicata in se. Et residuum ex decem est duo, qui est sectio altera. Iam ergo perduximus hanc questionem ad unum sex capitulorum, quod est quod census equatur radicibus.

Questio secunda: Divide decem in duas partes et multiplica decem in se. Et sit quod aggregatur ex multiplicatione decem in se equale uni duarum sectionum multiplicata in se bis et septem nonis vicis unius. Computationis vero huius regula est ut ponas unam duarum sectionum rem. Multiplica igitur eam in se, et fiet census, deinde in duo et septem nonas. Erunt ergo duo census

Quod] Que *VUMP T* 95 quare] quia *VU T* scivimus] scimus *NY VUMP T* et] *om. VUMP T* 96 post radices *add.* exceptis duobus censibus *NY VU T* exceptis duobus radicibus *MP* facta] facti *NY VUMP T* 97 census exceptus] excepto censu et *NY VUMP T* 97-103 Hec ... volumus] Quantum (Quod tum *VU T*) enim diminutum perdit: tantum restaurat additum; quoniam X radices addite faciunt XX radices diminutas. (*add.* esse 10 diminutas *NY VU T*) Et II census deminuti (*add.* faciunt *NY*) unum censum additum esse: unum diminutum. *NY VUMP T*

et septem nonne census unius. Deinde multiplica decem in se, et erunt centum.	
Est ergo ut centum sit equale duobus censibus et septem nonis census unius.	30
Reduc ergo totum illud ad censum unicum, qui est novem partes viginti	
quinque, quod est quinta et quattuor quinte quinte unius. Accipe igitur quintam	
centum et quattuor quintas quinte ipsius, que sunt triginta sex. Et ipse equantur	
censui cuius radix est sex. qui est una duarum sectionum. Iam ergo produximus	
hanc questionem ad unum sex capitulorum, quod est quod census equatur	35
numero.	
Questio tertia: Divide decem in duas sectiones et divide unam duarum	
partium per alteram, et provenient quattuor.' Cuius regula est ut ponas unam	
duarum sectionum rem et alteram decem excepta re. Deinde dividas decem	
excepta re per rem, ut proveniat quattuor. Iam autem scivisti quod cum	40
multiplicaveris quod provenit ex divisione in idem per quod divisum (P 11 3vb)	
fuit, redibit census tuus quem divisisti. Sed proveniens ex divisione in hac	
questione fuit quattuor et id, per quod divisum fuit, fuit res. Multiplica igitur	
quattuor in rem, et erunt quattuor res. Ergo quattuor res equantur censui quem	
divisisti, qui est decem excepta re. Restaura itaque decem per rem, et adde	45
ipsam quattuor. Erit ergo quod decem equatur quinque rebus. Ergo res est duo.	
Iam ergo perduximus hanc questionem ad unum sex capitulorum, quod est quod	
radices equantur numero.	
Questio quarta: Multiplica tertiam census et dragmam in quartam eius et	
dragmam. et sit quod provenit viginti.' Cuius regula est ut tu multiplices tertiam	50
in quartam, et erit quod proveniet medietas sexte census. Et dragmam in	
dragmam, et erit dragma addita. Et tertiam rei in dragmam. et erit tertia radices.	
Et quartam rei in dragmam, et erit quarta radices. Erit ergo illud medietas sexte	
census et tertia rei et quarta rei et dragma, que equatur viginti dragmis. Prohice	
ergo dragmam unam ex viginti dragmis et remanent decem et novem dragme,	55
que equantur medietati sexte census et tertie et quarte radices. Reintegra ergo	
censum tuum. Eius vero reintegratio est ut multiplices totum quod habes in	
duodecim, et provenient tibi census et septem radices, que erunt equales	
ducentis et viginti octo. Media igitur radices et multiplica eas in se, que erunt	
duodecim et quarta. Et adde eas ducentis et viginti octo. Erit ergo illud ducenta	60
et quadraginta et quarta. Deinde accipe radicem eius que est quindecim et	
semis. Ex qua minue medietatem radicum que est tres et semis. Remanet ergo	
duodecim qui est census. Iam ergo perduximus hanc questionem ad unum sex	
capitulorum, quod est quod census et radices equantur numero.	
Questio quinta: Divide decem in duas partes, et multiplica unamquamque	65
earum in se et aggrega eas. Et proveniat in quinquaginta octo.' Cuius regula est	
ut multiplices decem excepta re in se, et provenient centum et census exceptis	
viginti rebus. Deinde multiplica rem in se et erit census. Postea aggrega ea et	
erunt centum nota et duo census exceptis viginti rebus, que equantur	
quinquaginta octo. Restaura ergo centum et duos census per res que fuerunt	70
diminute, et adde eas quinquaginta octo. Et dices: 'Centum et duo census	
equantur quinquaginta octo et viginti rebus.' Reduc ergo ea ad censum unum.	
Dices ergo: 'Quinquaginta et census equantur viginti novem et decem rebus.'	
Oppone ergo per ea. Quod est ut tu prohicias ex quinquaginta viginti novem.	

Remanet ergo viginti unum et census, que equantur decem rebus. Media ergo radices, et provenient quinque. Eas igitur in se multiplica. et erunt viginti quinque. Prohice itaque ex eis viginti unum, et remanebunt quattuor. Cuius radicem accipias que est duo. Minue ergo ipsam ex quinque rebus, que sunt medietas radicem; et remanet tres, qui est una duarum sectionum. Iam ergo perduximus hanc questionem (P li 4ra) ad unum sex capitulorum, quod est census et numerus equantur radicibus. 75

Questio sexta: 'Tertia census multiplicetur in quartam eius, et proveniat inde census. Et sit augmentum eius viginti quattuor.' Cuius regula est quoniam tu nosti quod cum tu multiplicas tertiam rei in quartam rei, provenit medietas sexte census que est equalis rei et viginti quattuor dragmis. Multiplica igitur medietatem sexte census in duodecim ut census reintegretur et fiat census perfectus. Et multiplica etiam rem et viginti quattuor in duodecim et proveniet tibi ducenta et octoginta octo et duodecim radices, que sunt equales censui. Media igitur radices et multiplica eas in se. Quas adde ducentis et octoginta octo; et erunt omnia trecenta et viginti quattuor. Deinde accipe radicem eius que est decem et octo. Cui adde medietatem radicem, et fiet census viginti quattuor. Iam igitur perduximus hanc questionem ad unum sex capitulorum, quod est: numerus et radices equantur censui. 80

85

90

<VII. QUESTIONES VARIE>

< 1 > Quod si aliquis interrogans quesierit et dixerit: 'Divisi decem in duas partes. Deinde multiplicavi unam earum in alteram et provenerunt viginti unum.' Tu ergo iam scivisti quod una duarum sectionum decem est res. Ipsam igitur in decem, re excepta, inultiplica, et dicas: 'Decem excpta re in rem sunt decem res, censu diminuto, que equantur viginti uno.' Restaura igitur decem excepta re per censum, et adde censum viginti uno; et dic: 'Decem res equantur viginti uno et censui.' Radices ergo mediabis et erunt quinque. Quas in se multiplicabis et proveniet viginti quinque. Ex eo itaque prohice viginti unum, et remanet quattuor. Cuius accipe radicem que est duo, et minue eam ex medietate rerum. Remanet ergo tres qui est una duarum partium. 5

< 2 > Quod si dixerit: 'Divisi decem in duas partes et multiplicavi unamquamque earum in se. Et minui minus ex maiore et remanserunt quadraginta.' Erit eius regula ut multiplices decem excepta re in se et provenient centum et census, viginti rebus diminutis. Et multiplica rem in rem, et erit census. Ipsum ergo minue ex centum et censu exceptis viginti rebus. Remanet itaque centum exceptis viginti rebus que equantur quadraginta. Restaura ergo centum per viginti, et adde ipsum quadraginta. Habebis ergo quadraginta et viginti res que erunt equales centum. Oppone igitur per eas centum; prohice quadraginta ex centum. Remanent sexaginta que equantur viginti rebus. Ergo res equatur tribus, qui est una duarum partium. 10

< 3 > Si autem dixerit: 'Divisi decem in duas partes et multiplicavi unamquamque partem in se, et aggregavi eas. Et insuper addidi eis superfluum quod fuit inter utrasque sectiones antequam in se multiplicarentur. Et provenit illud totum quinquaginta quattuor.' Regula itaque eius est ut multi(P i l4rb)pli- 15

20

25

ces decem excepta re in se; et erit quod proveniet centum et census exceptis viginti rebus. Ex decem vero remansit res. Multiplica ergo ipsam in se, et erit quod proveniet census. Deinde aggrega ea, et erit illud quod proveniet centum et duo census exceptis viginti rebus. Adde igitur superfluum quod fuit inter eas aggregato, quod est decem exceptis duabus rebus. Totum ergo illud est centum et decem et duo census exceptis duabus rebus et exceptis viginti rebus, que equantur quinquaginta quattuor dragmis. Cum ergo restaurabis, dices: Centum et decem dragme et duo census equantur quinquaginta quattuor et viginti duabus rebus.' Reduc ergo ad censum suum. Et dic: Census et quinquaginta quinque equantur viginti septem dragmis et undecim rebus.' Prohice ergo viginti septem et remanebunt census et viginti octo que equantur undecim rebus. Media igitur res et erunt quinque et semis. Et multiplica eas in se, et erunt triginta et quarta. Ex eis igitur minue viginti octo. Et residui radicem sume, quod est duo et quarta. Est ergo unum et semis. Et minue eam ex medietate radicum et remanebunt quattuor, qui est una duarum partium.

< 4 > Quod si dixerit: Divisi decem in duas partes et divisi hanc per illam et illam per istam. Et provenerunt due dragme et sexta.' Huius autem regula est. Quoniam cum tu multiplicabis unamquamque partem in se et postea aggregabis eas, erit sicut cum una duarum partium multiplicatur in alteram. Et deinde quod provenit multiplicatur in id quod aggregatur ex divisione, quod est duo et sexta. Multiplica igitur decem excepta re in se, et erunt centum et census exceptis viginti rebus. Et multiplica rem in rem, et erit census. Aggrega ergo illud. Et habebis centum et duo census exceptis viginti rebus, que equantur rei multiplicate in decem minus re. Que est decem res excepto censu multiplicato in id quod provenit ex duabus divisionibus, quod est duo et sexta. Erit ergo illud viginti et una res et due tertie radices exceptis duobus censibus et sexta, que equantur centum et duobus censibus exceptis viginti rebus. Restaure ergo illud, et adde duos census et sextam centum et duobus censibus exceptis viginti rebus. Et adde viginti res diminutas ex centum, viginti uni et duabus tertiis radices. Habebis ergo centum. et quattuor census. et sextam census que equantur quadraginta uni rei et duabus tertiis rei. Reduc ergo illud ad censum unum. Tu autem iam scivisti quod unus census quattuor censuum et sexte est quinta et quinta quinqte. Totius igitur quod habes accipe quintam et quintam quinqte; et habebis censum et viginti quattuor dragmas que equantur decem radicibus. Media ergo radices et multiplica eas in se. Et erunt viginti quinque ex quibus minue viginti quattuor que sunt cum censu, et remanebit unum. Cuius assume radicem que est unus. Ipsam ergo minue ex medietate radicum que est quinque. Et remanet quattuor, qui est una duarum sec(P 11 4va)tionum. Et provenit ex hoc ut cum illud quod provenit ex divisione quarumlibet duarum rerum, quarum una per alteram dividitur, multiplicatur in id quod provenit ex divisione alterius per primum, erit semper quod proveniet unum.

< 5 > Sin vero dixerit: Divisi decem in duas partes et multiplicavi unam duarum partium in quinque et divisi quod aggregatum fuit per alteram. Deinde proeci medietatem eius quod provenit et addidi ipsam multiplicato in quinque. Et fuit quod aggregatum est quinquaginta dragme. Erit huius regula ut ex decem accipias rem et multiplices eam in quinque. Erunt ergo quinque res

divise per secundam que est decem excepta re, accepta eius medietate. Cum ergo acceperis medietatem quinque rerum que est duo et semis, erit illud quod vis dividere per decem excepta re. He ergo due res et semis divise per decem excepta re, equantur quinquaginta exceptis quinque rebus. Quoniam dixit: Adde ipsam uni duarum sectionum multiplicate in quinque', est ergo totum illud quinquaginta. Iam autem scivisti quod cum multiplicas quod provenit tibi ex divisione in id per quod dividitur. redit census tuus. Tuus autem census est due res et semis. Multiplica ergo decem excepta re in quinquaginta exceptis quinque rebus. Erit itaque quod proveniet quingenta et quinque census exceptis centum rebus, que equantur duabus rebus et semis. Reduc ergo illud ad censum unum. Erit ergo quod centum dragme et census exceptis viginti rebus equantur medietati rei. Restaure igitur centum et adde viginti res medietati rei. Habebis ergo centum dragmas et censum que equantur viginti rebus et medietati rei. Ergo media radices et multiplica eas in se, et minue ex eis centum, et accipe residui radicem, et minue eam ex medietate radicum que est decem et quarta. Et remanebit octo que est una duarum sectionum.	75
< 6 > Quod si aliquis dixerit tibi: 'Divisi decem in duas partes et multiplicavi unam duarum partium in se. Et fuit quod provenit equale alteri parti octuagies et semel. Erit huius regula ut dicas: 'Decem excepta re in se fiunt centum et census exceptis viginti rebus, que equantur octoginta uni rei.' Restaure ergo centum, et adde viginti radices octoginta uni. Erit ergo quod centum et census erunt equales centum radicibus et uni radici. Media igitur radices et erunt quinquaginta et semis. Multiplica eas in se et erunt bis mille et quingente et quinquaginta et quarta. Ex eis itaque minue centum. Ei remanebunt bis mille et quadringente et quinquaginta et quarta. Accipe igitur eius radicem que est quadraginta novem et semis. Et minue eam ex medietate radicum que est quinquaginta et semis. Et remanebit unus qui est una duarum sectionum.	80
< 7 > Et si aliquis dixerit: Duo census sunt inter quos sunt due dragme quorum minorem per maiorem divisi, et (P il 4vb) provenit ex divisione medietas.' Dic: 'Hic rem ponit pro censu.' Ergo res et due dragme in medietatem, que est id quod provenit ex divisione, est medietas rei et dragma, que sunt equales rei. Prohice ergo medietatem rei cum medietate, et remanet dragma que est equalis medietati rei. Dupla ergo, et dic ergo quod res est due dragme et altera est quattuor.	85
< 8 > Quod si dixerit tibi: 'Divisi decem in duas partes. Deinde multiplicavi unam earum in alteram. Et post divisi quod aggregatum fuit ex multiplicatione per superfluum quod fuit inter duas sectiones antequam una in alteram multiplicaretur. Et provenerunt quinque et quarta.' Erit eius regula ut accipias ex decem rem, et remanebunt decem excepta re. Unum igitur multiplica in alterum et erunt decem radices excepto censu. Et hoc est quod provenit ex multiplicatione unius eorum in alterum. Deinde divide illud per superfluum, quod est inter ea, quod est decem exceptis duabus rebus. Provenit ergo quinque et quarta. Cum ergo multiplicaveris quinque et quartam in decem exceptis duabus rebus, proveniet inde census multiplicatus qui est decem res excepto censu. Multiplica ergo quinque et quartum in decem exceptis duabus rebus. Et	90
	95
	100
	105
	110
	115

erit quod proveniet quinquaginta due dragme < et semis > exceptis decem radicibus et semis, que equantur decem radicibus excepto censu. Restaure ergo quinquaginta duo et semis per decem radices et semis, et adde eas decem radicibus excepto censu. Deinde restaure eas per censum et adde censum quinquaginta duobus et semis. Et habebis viginti radices et semis que equantur quinquaginta duabus dragmis et semis et censui. Operaberis ergo per eas secundum quod posuimus in principio libri, si deus voluerit.

< 9 > Si quis vero tibi dixerit: Est census cuius quattuor radices multiplicatae in quinque radices ipsius reddunt duplum census et augent super hoc triginta sex dragmas.' Huius regula est. Quoniam cum tu multiplicas quattuor radices in quinque radices, fiunt viginti census qui equantur duobus censibus et triginta sex dragmis. Prohice ergo ex viginti censibus duos census cum duobus censibus. Ergo remanent decem et octo census qui equantur triginta sex. Divide igitur triginta sex per decem et octo. Et proveniet duo qui est census.

< 10 > Quod si dixerit: 'Est census cuius tertia et tres dragme, si auferantur et postea multiplicetur quod remanet in se, redibit census.' Erit eius regula. Quoniam cum tu proieceris tertiam et tres dragmas, remanebunt eius due tertie exceptis tribus dragmis, que est radix. Multiplica igitur duas tertias rei, id est census. exceptis tribus dragmis in se. Due ergo tertie multiplicatae in duas tertias fiunt quattuor none census. Et tres dragme diminute in duas tertias rei, due radices sunt. Et tres diminute in duas tertias faciunt duas radices, et tres in tres fiunt novem dragme. Sunt ergo quattuor none census et novem dragme exceptis quattuor radicibus que equantur radici. Adde ergo quattuor radices radici. Et erunt quinque radices que erunt equales quattuor nonis census et novem dragmis. Cum ergo vis ut multiplices quattuor nonas donec reintegres censum tuum, multiplica igitur omne quattuor in duo et quartam, et multiplica novem in duo et quartam. Et erunt viginti dragme et quarta. Et multiplica quinque radices in duo et quartam, et erunt undecim res et quarta. Facies ergo per ea sicut est illud quod retuli tibi de mediatione radicum, si deus voluerit.

< 11 > Et si dixerit: 'Dragma et semis fuit divisa per hominem et partem hominis, et evenit homini duplum eius quod accedit parti.' Erit eius regula ut dicas: 'Homo et pars est unum et res.' Est ergo quasi dicat: 'Dragma et semis dividitur per dragmam et rem, et proveniunt dragme due res.' Multiplica ergo duas res in dragmam et rem. Et provenient duo census et due res que equantur dragme et semis. Reduc ea ad censum unum. Quod est ut accipias ex unaquaque re ipsius medietatem. Et dicas: Census et res equantur tribus quartis dragme.' Oppone ergo per ea secundum quod ostendi tibi.

< 12 > Quod si dixerit tibi: Divisi dragmam per homines, et provenit eis res. Deinde addidi eis hominem. Et postea divisi dragmam per eos. et provenit eis minus quam ex divisione prima secundum quantitatem sexte dragme unius.' Erit eius consideratio ut multiplices homines primos in diminutum quod est inter eos. Deinde multiplices quod aggregatur per illud quod est inter homines primos et postremos. Proveniet ergo census tuus. Multiplica igitur numerum primorum hominum qui est res in sextam que est inter eos, et erit sexta radices. Deinde multiplica illud in numerum hominum posteriorum. qui est res et unum. Erit ergo quod sexta census et sexta radices divisa per dragmam equatur

dragme. Ergo reintegra illud: multiplica ipsum in sex, et erit quod habebis census et radix. Et multiplica dragmam in sex, et erunt sex dragme. Census ergo et radix equantur sex dragmis. Media ergo radices et multiplica eas in se et adde eas super sex. Et accipe radicem eius quod aggregatur et minue ex ea medietatem radidis. Quod ergo remanet est numerus hominum primorum, qui sunt duo homines. 165

<VIII.> CAPITULUM CONVENTIONUM NEGOCIATORUM

Scias quod conventiones negotiationis hominum omnes, que sunt de emptione et venditione et cambitione et conductione et ceteris rebus, sunt secundum duos modos, cum quattuor numeris quibus interrogator loquitur. Qui sunt pretium et appretiatum secundum positionem, et pretium et appretiatum secundum querentem. Numerus vero qui est appretiatum secundum positionem opponitur numero qui est pretium secundum querentem. Et numerus qui est pretium secundum positionem opponitur numero qui est appretiatum secundum querentem. Ho(P 11 Srb)rum vero quattuor numerorum tres semper manifesti et noti, et unus est ignotus. Qui est ille qui verbo loquentis notatur per quartum, et de quo interrogator querit. Regula ergo in hoc est ut consideres tres numeros manifestos. Impossibile est enim quin duo eorum sint quorum unusquisque suo compari est oppositus. Multiplica igitur unumquemque duorum numerorum apparentium oppositorum in alterum. Et quod proveniet, divide per alterum numerum cui numerus ignotus opponitur. Quod ergo proveniet, est numerus ignotus pro quo querens interrogat. Qui etiam est oppositus numero per quem dividitur. 5

Cuius exemplum secundum primum modum eorum est ut querens interroget et dicat: Decem cafficii sunt pro sex dragmis; quot ergo provenient tibi pro quattuor dragmis? Sermo itaque eius, qui est decem cafficii, est numerus appretiati secundum positionem. Et eius sermo, qui est sex dragme, est numerus eius quod est pretium secundum positionem. Et ipsius sermo, quo dicitur quantum te contingit, est numerus ignotus appretiati secundum querentem. Et ipsius sermo, qui est per quattuor dragmas, est numerus qui est pretium secundum querentem. Numerus ergo appretiati qui est decem cafficii opponitur numero qui est pretium secundum querentem, quod est quattuor dragme. Multiplica ergo decem in quattuor, qui sunt oppositi et manifesti, et erunt quadraginta. Ipsum itaque per alium numerum manifestum divide, qui est pretium secundum positionem, quod est sex dragme. Erit ergo sex et due tertie qui est numerus ignotus. Qui est sermo dicentis quantum. Ipse namque est appretiatum secundum querentem, et opponitur sex qui est pretium secundum positionem. 10

Modus autem secundus est sermo dicentis: 'Decem sunt pro octo; quantum est pretium quattuor?' Aut forsitan dicitur: Quattuor eorum quanti pretii sunt.' Decem ergo est numerus appretiati secundum positionem. Et ipse opponitur numero qui est pretii ignoti, qui notatur per verbum illius quantum'. Et octo est numerus qui est pretium secundum positionem, Ipse namque opponitur numero manifesto qui est appretiati qui est quattuor. Multiplica ergo duorum numerorum manifestorum et oppositorum unum in alterum, scilicet quattuor 15

20

25

30

35

in octo, et erunt triginta duo. Et divide quod proveniet per alium numerum manifestum, qui est appretiati, et est decem. Erit ergo quod perveniet tres et quinta, qui est numerus qui est appreciatum. Et ipse est oppositus decem per quem divisum fuit. Et similiter erunt omnes conventiones negociationis et earum regule. 40

Quod si aliquis querens interrogaverit et dixerit: Quemdam operarium condux in mense pro decem dragmis, qui sex diebus operatus est; quantum ergo contigit eum? Tu autem iam scivisti quod sex dies sunt quinta mensis, et quod illud quod ipsum contingit ex dragmis est secundum quantitatem eius quod operatus est ex mense. Eius vero regula est quod mensis est triginta dies quod est appretiatur secundum positionem. Et sermo eius qui est decem est pretium secundum positionem. Eius vero sermo qui est sex dies est appretiatur secundum querentem. Et sermo eius quantum contigit est pretium secundum querentem. Multiplica ergo pretium secundum positionem, quod est decem, in appretiatur secundum querentem, quod est ei oppositum et est sex. (P 11 Sva) 45

Et provenient sexaginta. Ipsum ergo divide per triginta qui est numerus manifestus qui est appretiatur secundum positionem. Erit ergo illud due dragme quod est pretium secundum querentem. Et similiter fiunt omnia quibus homines inter se conveniunt in negociatione, secundum cambium et mensurationem et ponderationem. 50 55

<APPENDIX>

Liber hic finitur. In alio tamen libro repperi hec interposita suprascriptis.

< 1 > Iterata quod si quis dixerit tibi: Divisi decem in duas partes et multiplicavi unam duarum sectionum in se. Et fuit quod provenit equale alteri octuagies et semel. Erit eius regula ut dicas: Decem excepta re in se fiunt centum et census exceptis viginti rebus que equantur octoginta uni rei.' Restaura ergo centum et adde viginti radices octoginta uni et erunt centum et census, que erunt equales centum et uni radici. Radices igitur mediabis et erunt quinquaginta et semis. Multiplica ergo eas in se. et erunt bis mille et quingente et quinquaginta et quarta. Ex quibus minue centum, et remanebunt bis mille et quadringente et quinquaginta et quarta. Huius itaque accipe radicem. Que est quadraginta novem et semis. Quam minuas ex medietate radicem, que est quinquaginta et semis. Et remanebit unum, qui est una duarum sectionum. 5

< 2 > Si autem aliquis dixerit: Divisi decem in duas partes et multiplicavi unam duarum partium in decem et alteram in se, et fuerunt equales.' Erit eius regula ut multiplices rem in decem, et erunt decem radices. Deinde multiplica decem excepta re in se, et erunt centum et census exceptis viginti rebus. Que equantur decem radicibus. Oppone ergo per eas. 10

< 3 > Quod si dixerit: Due tertie quinte census, septime radices ipsius sunt equales. Tunc tota radix equatur quattuor quintis census et duabus tertiis quinte ipsius, que est quattuordecim partes de quindecim.' Erit huius regula ut multiplices duas tertias quinte in septem ut radix compleatur. Due vero tertie quinte sunt due partes de quindecim. Multiplica igitur quindecim in se, et erunt ducenta et viginti quinque, et quattuordecim in se, et erunt centum et nonaginta sex. Minue igitur ex ducentis viginti quinque duas tertias quinte ipsius que est triginta. et erit pars de quindecim. Quam dividas per 20

septimam diminutam ex centum nonaginta sex que est viginti octo. Et proveniet unum et quarta decima unius, que est media septima et est radix census.	25
< 4 > Si autem dixerit: 'Multiplicavi censum in quadruplum ipsius et provenerunt viginti.' Erit eius regula. Quoniam cum tu multiplicas ipsum in se. provenit quinque. Ipse namque est radix quinque.	
< 5 > Quod si dixerit: 'Est census quem in sui tertiam multiplicavi, et provenit decem.' Erit eius consideratio. Quoniam cum tu multiplicas ipsum in se, provenit triginta. Dic ergo quod census est radix triginta.	30
< 6 > (P 11 5vb) Si dixerit: 'Est census quem in quadruplum ipsius multiplicavi, et provenit tertia census primi.' Erit eius regula. Quoniam si tu multiplicaveris ipsum in duodecuplum ipsius, proveniet quod erit equale censui. Quod est medietas sexte in tertiam.	35
< 7 > Quod si dixerit: 'Est census quem multiplicavi in radicem ipsius, et provenit triplum census primi.' Erit eius consideratio. Quoniam cum tu multiplicas radicem census in tertiam ipsius, provenit census. Dico igitur quod istius census. tertia est radix eius. Et ipse est novem.	40
< 8 > Si vero dixerit: 'Est census cuius tres radices in ipsius quattuor radices multiplicavi, et provenit census et augmentum quadraginta quattuor.' Erit regula huius. Quoniam cum tu multiplicas quattuor radices in tres radices. fiunt duodecim census. Qui sunt equales censui et quadraginta quattuor dragmis. Ex duodecim igitur censibus prohice censum unum. Remanent ergo undecim census equales quadraginta quattuor. Divide itaque quadraginta quattuor per undecim, et perveniet unus census qui est quattuor.	45
< 9 > Et similiter si dixerit: 'Est census cuius radix in quattuor radices eius multiplicata reddit triplum census et augmentum quinquaginta dragmarum.' Erit eius regula. Quoniam radix una in quattuor radices multiplicata facit quattuor census qui equantur triplo census illius radice et quinquaginta dragmas. Ergo prohice tres census ex quattuor censibus. Et remanebit census qui erit equalis quinquaginta dragmis. Ipse enim est census. Cum ergo multiplicabis radicem quinquaginta in radices quattuor quinquaginta. proveniet triplum census et augmentum quinquaginta dragmarum.	50
< 10 > Quod si dixerit tibi: 'Est census cui addidi viginti dragmas, et fuit quod provenit equale duodecim radicibus census.' Erit eius regula. Quoniam dicis quod census et viginti equantur duodecim radicibus. Ergo media radices et multiplica eas in se, et minue ex eis viginti dragmas, et assume radicem eius quod remanet. Ipsam ergo ex medietate radicem que est sex minue. Quod igitur remanet est radix census, quod est duo. Et census est quattuor.	55
< 11 > Si vero dixerit: Multiplicavi tertiam census in quartam ipsius, et rediit census.' Erit eius regula. Quoniam cum multiplicas tertiam rei in quartam rei, provenit medietas sexte census que equatur rei. Ergo census est duodecim res. Et ipse est census.	60
< 12 > Quod si tibi dixerit: 'Est census cuius tertiam et dragmam multiplicavi in quartam ipsius et duas dragmas, et rediit census et augmentum tredecim dragmarum.' Erit eius consideratio ut multiplices tertiam rei in quartam rei et proveniet medietas sexte census, et dragmam in quar(P 11 6ra) tam rei et proveniet quarta rei, et duas dragmas in tertiam rei et provenient due tertie rei, et dragmam in duas dragmas et erunt due dragme. Erit ergo totum illud medietas sexte census et due dragme et undecim partes duodecim ex radice, que equantur radici et tredecim dragmis. Prohice ergo duas	65
	70

dragmas ex tredecim et remanebunt undecim. Et prohice undecini partes ex radice, et remanebit medietas sexte radices et undecim dragme, qui equantur medietati sexte census. Ipsum ergo reintegra quod est, ut ipsum in duodecim multiplices et multiplices omne quod est cum eo in duodecim. Proveniet ergo quod census equatur centum et triginta duabus dragmis et radici. Oppone ergo per ea.	75
< 13 > Quod si dixerit: 'Est census cuius tertiam et quartam proieci, et insuper quattuor dragmas. Et multiplicavi quod remansit in se. Et quod provenit fuit equale censui et augmento duodecim dragmarum.' Huius regula erit ut accipias rem et auferas tertiam et quartam ex eo, et remanebunt quinque duodecime partes rei. Et minue ex eis quattuor dragmas, et remanebunt quinque duodecime partes rei exceptis quattuor dragmis. Eas igitur in se multiplica. Erunt ergo quinque partes in se multiplicatae, viginti quinque partes centessime quadragesime quarte census. Postea multiplica quattuor dragmas exceptas in quinque partes duodecimas rei duabus vicibus. Et erunt quadraginta partes, quarum queque duodecim sunt res una. Ei quattuor dragme diminute in quattuor fiunt sedecim dragme addite. Fiunt ergo quadraginta partes, tres radices et tertia radices diminute. Proveniunt ergo tibi viginti quinque partes centesime quadragesime quarte census et sedecim dragme exceptis tribus radicibus et tertia. que equantur radici et duodecim dragmis. Per eas igitur oppone. Prohice igitur duodecim ex sedecim et remanent quattuor dragme. Et adde tres radices et tertiam radices et provenient tibi quattuor radices et tenia radices que equantur viginti quinque partibus centesimis quadragesimis quartis census et quattuor dragmis. Oportet igitur ut censum tuum reintegres. Ipsum ergo multiplica in quinque et decem et novem partes vigesimas quintas donec reintegretur. Et multiplica quattuor dragmas in quinque et decem et novem partes. Erunt ergo viginti tres dragme et pars una vigesima quinta. Et multiplica quattuor radices et tertiam in quinque et decem et novem partes vigesimas quintas. Erunt ergo viginti quattuor radices et viginti quattuor partes vigesimas quintas radicis. Media ergo radices, Erunt ergo duodecim radices et duodecim partes vigesime quinte. Multiplica ergo eas in se, et erunt centum et quinquaginta quinque et quadringente et sexaginta novem partes sexcentesi(P 11 6rb)me et vigesime quinte. Minue ergo ex eis viginti tres et partem vigesimam quintam que est cum censu. Et remanebunt centum et triginta duo et quadraginta et quadringenta quattuor partes sexcentesime et vigesime quinte. Eius itaque accipe radicem que est undecim et tredecim partes vigesime et quinte. Ipsam ergo medietati radicum, que est duodecim et duodecim partes vigesime quinte, adde. Erit ergo illud viginti quattuor, qui est census quem queris.	80
< 14 > Si vero tibi dixerit: Est census que in duas tertias multiplicavi et provenit quinque.' Erit eius consideratio ut multiplices rem aliquam in duas tertias rei et sint due tertie census equales quinque. Ipsam ergo reintegra per equalitatem medietatis ipsius, et adde super quinque ipsius medietatem. Et habebis censum equalem septem et semis. Radix ergo eius est res quam multiplicabis in duas tertias et proveniet quinque.	85
< 15 > Quod si dixerit tibi: 'Duo census sunt inter quos sunt due dragme. Quorum minorem per maiorem divisi et evenit ex divisione medietas.' Erit eius regula ut multiplices rem et duas dragmas in id quod ex divisione provenit quod est medietas; et erit quod proveniet medietas rei et dragma que equantur rei. Prohice ergo medietatem cum medietate. Remanet dragma que equatur medietati rei. Duplica eas. Ergo habebis rem que equatur duabus dragmis. et ipsa est unus duorum censuum. Et alter census est quattuor.	9
	95
	100
	105
	110
	115

- < 16 > Si autem dixerit: 'Multiplicavi censum in tres radices et provenit quintuplum censui.' Quod est quasi dixisset: 'Multiplicavi censum in radicem suam et fuit quod provenit equale censui et duabus tertiis. Ergo radix census est dragma et due tertie. Et census est due dragme et septem none.' 120
- < 17 > Quod si dixerit tibi: 'Est census cuius proieci tertiam. Deinde multiplica residuum in tres radices census primi, et rediit census primus.' Erit eius regula. Quoniam cum tu multiplicas totum censum ante projectionem sue tertie in tres radices eius, provenit census et semis, quoniam due tertie eius multiplicatae in tres radices eius faciunt censum. Ergo ipse totus multiplicatus in tres radices eius est census et semis. Ipse ergo totus multiplicatus in radicem unam reddit census medietatem. Ergo radix census est medietas. Et census est quarta. Tertie ergo census due sunt sexta. Et tres radices census est dragma et semis. Quotienscumque igitur multiplicas sextam in dragmam et semis, provenit quarta que est census tuus. 125
- < 18 > Sin autem dixerit: 'Est census cui abstuli quattuor radices. Deinde accepi tertiam residui, que fuit equalis quattuor radicibus. Census igitur est ducenta et quinquaginta sex.' Erit eius regula. Quia enim scis quod tertia eius quod remanet est equale quattuor radicibus eius, et sic illud quod remanet est equale duodecim radicibus. Ergo adde ei quattuor radices quas prius abstulisti. et erit sedecim radices. Ipse enim est radix census. 130
- < 19 > (P 11 6va) Quod si dixerit: 'Est census de quo radicem suam proieci et addidi radici radicem eius quod remansit, et quod provenit fuit due dragme. Ergo hec radix census et radix eius quod remansit fuit equale duabus dragmis. Prohice ergo ex duabus dragmis radicem census. Erunt itaque due dragme excepta radice in se multiplicatae, quattuor dragme et census exceptis quattuor radicibus. Que equantur censui radice diminuta. Oppone ergo per eas. Est ergo census et quattuor dragme que equantur censui et tribus radicibus. Prohice itaque censum cum censu, et remanebunt tres radices equales quattuor dragmis. Ergo radix equatur dragme et tertie. Et census est dragma et septem none dragme unius. 135
- < 20 > Et si dixerit: 'Est census ex quo proieci tres radices suas. Deinde residuum in se multiplicavi et provenit census.' Iam ergo scis quod illud quod remanet est etiam radix, et quod census est quattuor radices. Et ipse est sedecim dragme. 140
- < 21 > Si quis autem tibi dixerit: 'Multiplicavi censum in duas tertias ipsius et provenit quinque.' Erit eius regula. Quoniam cum multiplicas ipsum in se. provenit septem et semis. Dic ergo quod ipse est radix septem et semis. Multiplica igitur duas tertias radices septem et semis, quod est ut multiplices duas tertias in duas tertias. Provenient ergo quattuor nono. Quattuor ergo none multiplicatae in septem et semis sunt tres et tertia. Ergo radix trium et tertia est due tertie radices septem et semis. Multiplica igitur tres et tertiam in septem et semis. Et provenient viginti quinque dragme. cuius radix est quinque. 145

6.6. PARAGRAFI MODUS

< V. MODUS DIVIDENDI >

MODUS DIVIDENDI unam quantitatem in duas quantitates propositas sub nomine radice est sicut si dicerem: «Divide 8 in 3 et radicem de 4 aut in 3 minus radice de 4». Considera quomodo divisor sit propositus. Utrum sit coniunctus, sicut 3 et radix de 4, aut detractus sive diminutus, ut 3 minus radice de 4. Et postquam illud considerasti, 5
semper multiplica illud quod est positum per suum divisum seu oppositum. Ut isto modo si dicis: «Divide 8 in 3 et radicem de 4», quoniam propositus divisor est in coniuncto, ideo multiplica per oppositum, scilicet 3 et radicem de 4 per 3 minus radice de 4 ut sit 9. Postea ter radix de 4, deinde ter radix de 4 diminuta faciunt 0, quia quantum unus ponit, tantum alter dimittit, ita quod ex multiplicatione provenit 0. 10
Postea radix de 4 per radicem de 4 diminutam faciunt 1 radicem de 16 diminutam. Hec est quatuor diminuta. Habes ergo 9 minus 4 quod provenit in essentia 5. Debemus itaque 8 dividere per 3 minus radice de 4. Quia divisor coniunctus numeratus est in diminutum. Multiplicemus ergo 8 per 3 minus radice de 4 et sunt 24 minus 8 radicibus de 4, hoc est minus 1 radice de 256. Divide ergo illud per 5 et dividendo 24 provenit 4 4/5. Et divide 15
radicem de 256 per 5, sic constitue 5 radices et eius census 25. Divide igitur radicem de 256 per radicem de 25 modo quo dictum est. Et provenit radix de 10 et 6/25; proveniunt ergo ex divisione 4 et 4/5 minus radice de 10 6/25. Si accipis radicem de 10 et 6/25, que est 3 1/5, et subtraxeris eam de 4 et 4/5, remanebit tibi 1 3/5 et tantum provenit ex divisione 8 per 3 et unam radicem de 4. Proba: divide 8 in 3 et radicem de 4, que 2 est, 20
quod tantum sonat. Sicut divide 8 in 5 et proveniunt 1 3/5, sicut dictum est. Supradicta autem operatio in numeris habentibus radicem data est propter numeros qui non habent radicem discretam. Alius modus. Si diceret aliquis: «Divisi 12 per 1 cosam et illud quod provenit non dico; postea divisi 12 per eandem cosam et 1 et quod ex ambabus divisionibus pervenerat 25
adiunxi insimul et habui 7. Quero per quem numerum divisi». Multiplica 12 per 1 cosam et habebis 12 cosas. Multiplica iterum 12 per 1 cosam et 1 plus et habebis 12 cosas et 12 que sunt iuncta sunt 24 cose et 12, que reserua per se. Post multiplica divisores unum per alium, scilicet 1 cosam per 1 cosam et 1, et habebis 1 censem et 1 cosam. Ideo si dividis 24 cose et 12 per 1 censem et 1 cosam, debent provenire 7. Multiplica igitur 7 30

V 3 radicis] radicem *MP* divide] divides *VU* aut in 3] *om.* 3 *MP om.* in *T*
6 semper] *om.* *T* 7 propositus] oppositus *MP* 8 opportunum] oppositum *VU T*
9 diminuta] *om.* *T* 10 post diminuit *add.* Postea radix de IIII *MP* itaque ... 0] *om.*
T post 0 *add.* quia quantum unus posuit, tantum alter dimittit *VUMP* 12 9 ... 4]
VIII III *MP* provenit ... 5] pervenit *T* 13 dividere] multiplicare *T*
numeratus] multiplicatus *T* 15 de] *om.* *MP* 4.4/5] iii/v *MP* provenit] proveniunt
T 16 radices] radicem *T* radicem] *om.* *VUMP* 17 modo ... est] *om.* *VUMPT*
proveniunt] perveniunt *T* 18 4 et] *om.* *T* 19 tibi] *om.* *VUMPT* 20 divide]
dividere *MP T* 21 divide] dividere *VUT* 22 autem] *om.* *MP* propter] per *MP*
24 diceret aliquis] quis dixerit *T* divis] divide *VUMPT* 25 et quod] et 1 cosam
VU om. *MP* pervenerat] proveniat *MP* 26 cosas] causas *VUMPT* 28 sunt]
simul *VUMPT* reserua] serua *T* 29 et 1] *om.* *MP* 30 dividis] dividas *VUMPT*

per 1 census et 1 cosam et exibunt 7 census et 7 cose qui equantur 24 cosis et 12. Depone 7 cosas a quolibet equalium et remanent 7 census qui sunt equales 17 radicibus et 12. Reduc ad unum censum, dividendo per 7, et habebis 1 census equalem 2 et $\frac{3}{7}$ cosis et $1\frac{5}{7}$ dragmis. Media cosas et cetera et valebit cosa 3; et tantum fuit primus divisor et alius fuit uno plus, scilicet 4.

35

<VI.> CAPITULUM QUESTIONUM

Hec sunt ergo sex capitula in principio huius nostri libri nominata quorum modum operandi cum addicionibus, subtractionibus, multiplicacionibus et divisionibus iam tibi dixi; et impossibile est quod in computacione de Algebra et Almuchabala non contingat te ad aliquod eorum capitulorum pervenire. Sed ut res gravis levis tibi fiat, sequar id quod ex questionibus in textu propinquis cum illo erat per quarum significacionem in aliis consimiliter operaberis, si deus voluerit.

5

< **Questio prima** > Divide decem in duas partes, et multiplica unam duarum partium in alteram et postea multiplica unam earum in se. Et fiat productum ex multiplicacione unius partis in se equale ei quod producit ex multiplicacione unius partis in aliam quater. Sua regula est ut ponas unam partium esse unam radicem, tunc alia pars erit 10 minus una radice. Multiplica ergo unam per aliam, scilicet 10 minus 1 radice, per 1 radicem et erunt 10 radices minus 1 censu. Postea multiplica totum illud in 4 eo quod dictum est in questione quod productum ex multiplicacione unius partis in se fiat quater tantum quantum productum ex multiplicacione unius partis in alteram. Fiunt ergo 40 radices minus 4 censibus. Post multiplica unam duarum partium in se, scilicet cosam in cosam, et erit unus census qui est equalis 40 radicibus minus 4 censibus. Postea restaura 40 per 4 census deminutos addendo sibi eosdem, quos etiam addes uni censui. Et erunt 40 equales 5 censibus. Erit ergo 1 census 8 radices qui est 64. Radix ergo de 64 est una duarum partium in se multiplicata et residuum de 10 est 2 que sunt altera pars. Iam ergo ista questio duxit te ad unum sex capitulorum quod est census equalis radicibus.

10

15

20

< **Questio secunda** > Divide 10 in duas partes et multiplica 10 in se et quod provenit sit equale uni partium multiplicato in se et in $2\frac{7}{9}$. Huius computacionis est hec regula. Pone unam partem esse 1 radicem quam multiplica in se, fit 1 census, quem postea multiplica in $2\frac{7}{9}$, fiunt 2 census et $\frac{7}{9}$ unius census. Deinde multiplica 10 in se, fiunt 100 que sunt equalia 2 censibus et $\frac{7}{9}$ census. Reduc ergo totum ad unum censum qui est novem partes de 25 quod est $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$ unius 5e. Sume ergo $\frac{1}{5}$ de 100 et $\frac{4}{5}$ unius quinte et erunt 36 et illud est equale uni censui, cuius radix est 6 et hoc erat una duarum partium. Iam devenisti per istam questionem ad unum sex capitulorum quod est census equalis numero.

25

30

provenire] pervenire *T* 31 equantur] equivalent *VU T* equalent *MP* dividendo] elidendo *MP* 34 post $5/7$ add. de *VU MP T* 35 scilicet] videlicet *VU MP T*
VI 2 post hec add. etiam *VU* quorum] quodum *T* 3 addicionibus] additionibus *T* subtractionibus, multiplicacionibus] om. *MP* illo] ille *T* quorum] quorum *VU T* 7 operaberis, si deus voluerit] om. *T* post voluerit add. Questiones circa sex modos; circa primam regulam *VU MP T* 9 Et] Ut *VU MP* 10 partis] om. *VU T* Sua] om. *VU MP T* 15 radices] om. *T* 16 exit] erit *VU T* 17 radicibus] om. *VU T* 21 equalis] equale *T* 22 provenit] proveniet *T* 23 post et om. in *VU MP T* 24 sit] et fit *VU T* 27 25] $9/25$ *VU T* 28 erat] erit *VU T*

< **Questio tertia** > Divide 10 in duas partes et dividendo unam partem per aliam proveniant 4. Eius regula est: pone unam duarum partium esse unam radicem seu unam rem < a > ut unam cosam quod idem est; et tunc altera pars erit 10 minus una radice; divide ergo 10 minus una radice per unam radicem ad hoc ut proveniat 4. Scias certe quod, si multiplicaveris illud quod tibi provenit ex divisione per illud quod fuit divisor, resultabit tibi census quem divisisti. Istud autem quod tibi provenit in ista questione ex divisione est 4. Multiplica ergo 4 in cosam et fiunt 4 cose. Ergo 4 cose sunt equales censui quem divisisti qui est 10 minus 1 cosa. Restaura igitur 10 per unam cosam et iunge eam 4 et fiet quod 10 erunt equalia 5 cosis. Ergo cosa est 2. Iam ergo perduxisti te in hac questione ad unum sex capitulorum quod est quod radices sunt equales numero. 35

< **Questio quarta** > Multiplica $\frac{1}{3}$ alicuius numeri et 1 dragmam in suam quartam et unam dragmam et que proveniant 20. Sua regula est ut ponas quod iste numerus sit una radix. Multiplica ergo $\frac{1}{3}$ radices et 1 in $\frac{1}{4}$ radices et 1 et multiplica $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{4}$ proveniet $\frac{1}{2}$ unius 6te census et 1 dragmam in 1 dragma et erit dragma addita et $\frac{1}{3}$ radices in 1 dragmam et erit $\frac{1}{3}$ radices et $\frac{1}{4}$ radices in unam dragmam et erit $\frac{1}{4}$ radices. Erit ergo totum productum $\frac{1}{2}$ 6te census et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ cose et 1 dragma que sunt equalia 20. Sume ergo unam dragmam de 20 et remanent 19 que sunt equalia $\frac{1}{2}$ unius 6te census et $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ radices. Reduc itaque totum ad unum censum et hoc multiplicando totum quod secum ponitur in 12 eo quod partes census in proposito sunt $\frac{1}{12}$ unius census et provenit census et 7 radices equales 228. Media ergo radices et multiplica in se et erunt 12 $\frac{1}{4}$, adiunge 228 et erit totum 240 $\frac{1}{4}$. Huius sume radicem que est 15 $\frac{1}{2}$ a qua minue medietatem radicem, scilicet 3 $\frac{1}{2}$, et remanent 12 et talis est numerus quesitus. Iam igitur perduxisti hanc questionem ad unum de sex capitulis nostris quod est quod census et radices sunt equales numero. 40

< **Questio quinta** > Divide 10 in duas partes et multiplica quamlibet per se et producta ex multiplicacionibus iuncta faciunt 58. Regula ipsius est ut multiplices 10 minus una radice in se modo dicto supra et proveniunt centum et census minus 20 radicibus. Postea multiplica radicem in se et provenit census quem iunge simul et sunt 100 et 2 census minus 20 radicibus qui sunt equales 58. Equas partes addendo diminuta et habebis 100 et 2 census qui sunt equales 58 et 20 radicibus; exeunt postea 2 census et 42 equales 20 radicibus. Reduc ergo ad unum censum, erunt ergo 50 et census equales 29 et radicibus 10. Depone 45

una ... partium] duarum partium una *VUMP T* 31 et ut *T* post et *add.* multiplica quamlibet *MP* proveniant] perveniat *MP* perveniant *VU* proveniat *T* 32 est] *om. MP* pone] ponam *VU T* 32-33 seu ... est] *om. VUMP T* 34 proveniat] perveniant *VU T* 35 proveniat] pervenit *VU T* quod] qui *VU* 36 in] ex *MP* 37 fiunt] fient *VUMP* 39 erunt equalia] erit equalis *VU T* perduxisti ... questione] perduxisti te in hac questionem *VU* ad hanc questionem *MP* duxisti te in hac questione *T* 42 unam] *om. T* quel] quod *T* Sua] Eius *VUMP T* sit] est *VUMP T* 43 et 1] *om. T* 44 1dragma] unam dragmam *VU T* 45 post $\frac{1}{3}$ radices et *add.* 10 *T* 49 post in *add.* hoc *VUMP T* 50 provenit] perveniet *VU T* 228] XXVIII *MP* 128 *T* 52 15 $\frac{1}{2}$] 19 $\frac{1}{2}$ *T* remanent] remanet *T* 53 perduxisti] produxisti *MP* 54 quod] quando *VU T* 56 faciunt] faciunt *VU T* 57 proveniunt] proveniet *MP* provenient *T* ante census *add.* unus *VUMP T* 58 provenit] proveniet *VUMP* sunt] fient *MP* 2] 11 *T* 59 Equa] In qua *MP A* qua *T* addendo diminuta] addendas diminutas *MP* 60 2] 11 *T* exeunt ... radicibus] *om. VUMP T* 61 ante reduc

a quolibet equalium 29 et remanent 21 et census que sunt equalia 10 radicibus. Media ergo radices et fiunt 5; multiplica in se, fiunt 25; aufer 21, remanent 4 cuius radix est 2, quam minue de 5, medietate radicum sive cosarum, et manent 3 que sunt una pars de duabus. Iam autem reducta est questio ad unum de sex capitulis quod est quod census et numerus sunt equales radicibus. 65

< **Questio sexta** > Una tertia unius census multiplicata in suam quartam, producit ipsum censum et 24. Regula huius est. Scias autem quod quando multiplicas $\frac{1}{3}$ radices in 4tam radices venit medietas unius 6te census quod est equale uni cose et 24 dragmis. Reduc ad unum censum multiplicando singula per 12; eo quod partes census in proposito sunt 70 duodecima pars census. Et proveniunt < 288 > et 12 radices que sunt equalia uni censui. Media ergo radices et multiplica in se: sunt 36, adde ad < 288 > et sunt 324. Huius quere radicem, que est 18, cui iunge medietatem radicum et fit census quesitus 24. Reduxi autem hanc questionem ad unum de sex capitulis quod est quod numerus et radix sunt equales censui.

<VII. QUESTIONES VARIE>

< **1** > Si dixerit aliquis: «Divide 10 in duas partes et quando multiplicat una partium alteram producat 21». Tu ergo iam scivisti quod ponere debes unam partem esse unam radicem quam multiplica in 10 minus una radice et sunt 10 radices minus 1 censu que sunt equalia 21. Restaura 1 censum uni parti, scilicet 10 res minus 1 censu, et iunge 5 censum ad 21 et erunt 10 radices equales 21 et uni censui. Media radices et sunt 5; in se multiplicata sunt 25; a quibus deme 21, manent quattuor, quorum radix est 2 quam minue de medietate radicum, scilicet 5; manent 3 et hec est una partium. 5

< **2** > Et si dixerit: «Divide 10 in duas partes et multiplica quamlibet earum per se et quod provenit ex minore subtrahatur de producto maioris et remaneant 40». Hec est sua regula: 10 multiplica 10 minus una radice in se, sunt 100 et census minus 20 radicibus. Multiplica 1 radicem in se et fit census, quem deme de 100 et censu minus 20 radicibus; manent 100 minus 20 radicibus que sunt equales 40. Restaura ergo 100 per 20 radices, adde etiam 20 radices ad 40: erunt ergo 40 et 20 radices equales 100; depone a quolibet 40 et remanent 60 que sunt equalia 20 radicibus. Erit ergo una radix 3, que sunt una partium. 15

< **3** > Si vero dixerit: «Divide 10 in duas partes et multiplica quamlibet partem in se et producta iunge. Adde etiam huic differentiam que est inter has duas partes et quod totum

add. Totum ergo *VUMPT* erunt] erit *VUT* ergo] *om. MP* ante census *add.*
 unus *T* **62** remanebit *MP* **63** fiunt] sunt *VUT* **64** 5 ... cosarum] medietate
 cosarum scilicet quinque *VUMPT* et manent] remanent *VUMPT* **67** unius] minus
T multiplicata] multiplicatur *VUMP* multiplica *T* suam quartam] suum quartum
VUT producit] perducit *VUT* **68** post et *add.* sit suum plus *VUMPT* **69** reduc]
 et reducat *MP* **71** proveniunt] perveniunt *VUT* <288>] 228 *NY* **72** sunt] erunt
T 324] CCCXXII *MP* **74** sunt equales] equant *MP* equantur *VUT*
VII **2** quando ... alteram] qui in una partium multiplica aliam *T* alteram] aliam
VUMP **3** scivisti] scisti *T* ponere ... esse] unam partem debes ponere *VUMP*
T **4** 10 radices] 20 *VUMPT* **7** deme] debes demere *MP* **8** post minue *add.* 5 *MP*
 hec] *om. MPVUT* **9** 10] 20 *T* multiplica quamlibet] multiplicetur quelibet *VU*
MP **10** provenit] provenerit *VUMPT* de] a *VUMPT* remaneant] remanent
T **11** post et *add.* 2 et *infra NY* **11-13** manent ... radicibus] *om. T* 20] 200
VUMPT **14** a] de *VUMPT* **15** equalia] equales *VUMPT* una] *om. T* **16**
 Si ... dixerit] *om. VUMPT* partem] *om. VUMPT* **17** producta] perducta et *saepe*

productum fiat 54. Huius regula est; multiplica 10 minus 1 radice in se: sunt 100 et census minus 20 radicibus et de 10 remansit radix. Quam multiplica in se et provenit census quem iunge cum 100 et censu minus 20 radicibus et veniunt 100 et 2 census minus 20 radicibus. 20 Iunge etiam ad id superfluum quod est inter unam partem et aliam, scilicet inter 10 minus 1 radice et inter 1 radicem. Subtrahendo enim 1 radicem a 10 minus 1 radice, manent 10 minus 2 radicibus et illud est superfluum addendum. Et erit in toto 100 et 10 et 2 census minus 22 radicibus que sunt equalia 54 dragmis. Restaura radices et erunt < 110 > et 2 census equales 54 dragmis et 22 radicibus. Reduc ergo dictum ad unum censum, scilicet 25 mediando; et dic census et 55 sunt equales 27 dragmis et 11 radicibus. Tolle itaque 27, remanent 28 et census, que sunt equalia 11 radicibus. Media radices, fiunt 5 1/2, multiplica in se, erunt 30 1/4, tolle 28 et remanent 2 1/4 cuius radix est 1 1/2, quam minue de medietate radicem et manent 4; et hec est una partium quesitarum.

< 4 > Divide 10 in duas partes et dividendo unam per aliam eveniant 2 1/6, ut scis. Divide 10 30 in duas partes tales quod, quando dividis illam per istam et istam per illam, proveniat 2 1/6 in aggregato harum divisionum. Scias quod, quando multiplicas quamlibet harum partium in se et simul iunges productum, erit equale 61 quod fit ex multiplicacione unius partis in aliam. Et postea quod provenit in illud quod debebat exire ex divisione tali, scilicet in 2 1/6. Multiplica ergo 10 minus 1 radice in se, sunt 100 et census minus 20 radicibus; 35 multiplica etiam 1 radicem in se, fit unus census, que, simul iuncta, sunt 100 et 2 census minus 20 radicibus que sunt equalia ei quod provenit ex multiplicacione radicis in 10 minus una radice et postea in 2 1/6 sed, multiplicando radicem per 10 minus radice, proveniunt 10 radices minus censu et illud multiplicatum in id quod provenit ex duabus divisionibus, scilicet in 2 1/6, facit 21 2/3 radicis minus 2 1/6 census, que -sicut dictum 40 est- sunt equalia 100 et 2 censibus minus 20 radicibus. Restaura diminuta et erunt 100 et 4 1/6 census equales 41 2/3 radicis. Reduc ergo ad unum censum; nam tu iam scis quod unus census est de 4 1/6 census. Et dico 1/5 et 1/5 unius quinte de toto ergo sume 1/5 et 1/5 unius 5e. Et erunt census et 24 equales 10 radicibus. Media radices et multiplica in se et sunt 25; depone 24, manet 1, cuius radix est 1 quam aufer ex medietate radicem 45 remanent 4, que sunt 1 partium quesitarum. Et provenit de isto illud quod provenit de divisione cuiuslibet earum (partium) per alteram et multiplicacionem in illud quod provenit per divisionem alterius per primam et fiet semper illud quod provenit de uno.

< 5 > Divide 10 in duas partes et multiplica unam per 5 et quod provenit divide per alteram partium et quod exit ex divisione medietatum addatur producto ex multiplicacione in 5 50

<i>infra T</i>	differentiam] dragmam T	has] istas VU MP T	duas] om. T	18
54] 44 T	2] om. VU MP T	19 remansit] mansit VU T	post remansit add. una	
VU MP T	20 veniunt] proveniunt MP	22 a] de VU MP T	24 equalia] om. MP T	
post 100 add. et X VU MP T	25 22] 20 T	dictum] totum VU MP	27 11] duobus T	
fiunt] sunt T	28 erunt] fient VU MP T	cuius] qui huius MP	29 hec] hoc T	
30 1/6] 1/2 T	ut scis] vel sic VU T et sic MP	31 divides] VU T	proveniat]	
proveniant T	32 quamlibet] aliquam T	33 61] ei VU MP T	34 aliam] alia	
VU T	in] om. VU MP T	35 post et add. 2 T	36 100] 10 T	38 sed mul-
tuplicando ... radice] scilicet multitudo radicem per VU multitudo radicem per X minus una	radice MP om. T	40 2/3] iii/v VU 3/5 T	in] III MP	43 unus] om. T
Et VU T	unius] minus T	43-44 de ... 5e] om. VU MP T	45 depone] deponet	
T	46 sunt] est VU	proveniet] proveniret T	48 de] ex VU MP T	

et producat 50 dragmas. Fiat regula hec: multiplica radicem in 5, fiunt 5 radices quas divide per 2am partem, scilicet 10 minus radice, et quod provenit in divisione debes mediare et postea illud mediatum cum 5 radicibus, videlicet multiplicatum per 5, addere; et erit illud quod volo. Cum autem ita sit quod, quando totus numerus dividendus dividitur per divisorem certum et medietas eius quod provenit ex divisione est equale ei 55 quod provenit ex divisione mediatatis dividendi per eundem divisorem, ut, si divido 12 per 3, exeunt 4, qui, mediata, 2 sunt que sunt equales ei quod exit per divisionem medietatis 12, scilicet 6, in 3. Idcirco medietas 5 radicum, scilicet 2 1/2 radices, divisa per 10 minus 1 radice est equalis 50 minus 5 radicibus, ex quo quod dixi quod ei quod exit ex medietate divisionis debent addi producto ex multiplicacione in 5 quod est 5 radices. Sed modo sibi illas 60 non addidi, sed tamen eas ab alia parte diminui et tantum facit. Iam autem scivist quod, quando tu multiplicas id quod provenit in divisione per divisorem, exit census tuus, scilicet, dividendus. Census autem tuus seu dividendus est 2 1/2 radices. Multiplica ergo 10 minus 1 radice in 50 minus 5 cosis; proveniunt 5 census 500 dragme minus cosis 100 qui sunt equales 2 1/2 radicibus. Sed reduc totum ad unum censum, scilicet capiendo 65 quintam partem cuiuslibet et erunt 1 census et 100 dragme minus 20 radicibus equivalentes uni medie radici. Ideo restaura diminuta et erunt 1 census et 100 dragme equales 20 1/2 radicibus. Media igitur radices et multiplica in se et a producto extrahe 100 et residui cape radicem quam ex medietate radicum minue quod est 10 1/4 et manebunt 8, que sunt una de duabus partibus. 70

< 6 > Si dixerit tibi aliquis: «Divide 10 in duas partes et multiplica unam earum in se et quod proveniat sit equale alteri parti 81 uicibus sumptae». Fiat hec sua regula: multiplica 10 minus 1 radice in se, fiunt 100 et census minus 20 radicibus que sunt equales 81 cosis. Restaura deminuta, iungendo 20 radices ad 81 et erunt 100 et census equales 101 radicibus. Media igitur radices: sunt 50 1/2, multiplica in se, fiunt 2550 1/4 a quibus 100 minue, 75 remanent 2450 1/4, cuius radix est 49 1/2, quam ex medietate radicum, scilicet 50 1/2, minue et remanet 1 que est una pars de partibus dictis.

< 7 > Si tibi dixerit aliquis: sunt duo census inter quos est differentia 2arum dragmarum; quorum si minor fuerit divisus per maiorem, producit medietatem dragme. Pone pro minori censu 1 radicem, pro maiore 1 radicem et 2 dragmas. Si ergo multiplicaveris 1 radicem et 2 80 dragmas, scilicet divisorem, per medietatem dragme, scilicet id quod provenire debet ex divisione minoris census per maiorem, provenit 1/2 radices et 1 dragma que erunt equales dividendo, scilicet 1 radici. Aufer igitur a quolibet equalium medietatem radices et remanet dragma 1 que est equalis 1/2 radices. Radix ergo est 2 dragme et tantum fuit 85 primus census, scilicet minor, alius 4.

51 post multiplica add. unam VUMPT 53 multiplicatum] multiplica VUMPT 55 per] in MP T 57 exeunt] et erunt VUMPT exit] erit VU exit] erit VUMPT 59 quo quod] quodquod T 60 debent] deberet MP sed] si MP 61 scivist] fecisti MP scisti T 62 in] ex T tuus] titus T 63 tuus] om. VUMPT 1/2] 1/6 T 64 in] et T cosis] radicibus VUMPT proveniunt] perveniunt T cosis] om. T 500] 5 T 65 reduc totum] reductorum VUT 69 manebunt] remanebunt T 71 tibi] om. VUMPT 72 81] 8 T Fiat] fiet VUMPT 73 fiunt] fiet VUMPT 74 101] CX VU 100 T 75 fiunt] sunt MP a quibus] aequalibus T 77 remanet] remanebit VUMPT pars] om. VUMPT dictis] om. T 78 tibi] om. VUMPT T differentia] dragma et semper infra T 79 fuerit] fuit VUMPT 80 1] 11 T radicem] reduc VU reduc et T dragmas] scilicet divisorem per medietatem dragmae add. VUMPT 81 post dragme add. scilicet id quod provenit MP 83-84 et ... radices]

< 8 > Si tibi dictum fuerit: divide 10 in duas partes quarum unam multiplica per aliam et productum divide per id quod est inter duas partes de differentia. Et ex tali divisione proveniunt $5 \frac{1}{4}$. Fiat hec regula: capias de 10 1 radicem et remanebit 10 minus 1 radice; multiplica unam in aliam et erunt 10 radices minus censu 1; hoc autem productum ex multiplicacione unius partis in aliam divide per superfluum sive per differentiam que est inter duas partes, scilicet inter 1 radicem et 10 minus 1 radice. Tale vero superfluum sive differentia est 10 minus 2 radicibus quod patet subtrahendo unam partem ab altera, scilicet 1 radicem a 10 minus una radice. Dividendo ergo 10 radices minus uno censu per 10 minus 2 radicibus debent exire $5 \frac{1}{4}$ ergo quando tu multiplicas $5 \frac{1}{4}$ in 10 minus 2 radicibus proveniunt $50 \frac{1}{2}$ minus 10 $\frac{1}{2}$ radicibus que erunt equales 10 radicibus minus censu. Ideo restaura diminuta addendo $10 \frac{1}{2}$ radices ad 10 radices minus censu et addendo censum ad $51 \frac{1}{2}$ et erunt census et $51 \frac{1}{2}$ equales 20 $\frac{1}{2}$ radicibus. Media ergo radices. Sunt 10 $\frac{1}{4}$, multiplica in se erunt $105 \frac{1}{16}$ et a producto extrahe $52 \frac{1}{2}$, remanent $52 \frac{1}{2}$ et $9/16$. Huius radix quadrata est $7 \frac{1}{4}$ que, subtracta a medietate radicum, scilicet $10 \frac{1}{4}$, remanent 3 et tantum est una partium; altera erit 7. 90

< 9 > Si tibi dixerit: est census cuius 4 radices multiplicatae in 5 radicibus suis reddunt duplum census et ultra hoc 36 dragmas. Eius regula est: quando tu multiplicas 4 radices in 5 radices erunt 20 census: isti sunt equales 2 censibus et 36 dragmis. Extrahe igitur de 20 censibus 2 census et remanent 18 census qui sunt equales 36 dragmis. Divide ergo 36 in 18 et evenient 2 et tantum est census quesitus. 105

Probacio huius satis pulchra: debes multiplicare 4 radices de 2 in 5 radices de duobus, sed ex precedentibus tibi notum est quod 4 radices de 2 sunt 1 radix de 32 et 5 radices de 2 sunt una radix de 50. Ideo multiplicando 1 radicem de 32 in 1 radicem de 50, provenit ut daret ex dictis una radix de 1600 que est 40. Sic ergo, multiplicando 4 radices duorum in 5 radices duorum, proveniunt 40 que 40 sunt duplum ad duo et crescunt super hoc in 36. 110

< 10 > Si dixerit aliquis: «Est census a quo si $\frac{1}{3}$ et 3 dragme extrahuntur, residuum in se multiplicatum faciat ipsum censum. Regula eius est isto modo: quoniam quando extrahis $\frac{1}{3}$ et 3 dragmas a toto remanent $\frac{2}{3}$ minus 3 dragmis, quas multiplica in se, multiplicando $\frac{2}{3}$ radice in $\frac{2}{3}$ radice proveniunt $\frac{4}{9}$ census et ex multiplicacione 3 dragmarum diminutarum in $\frac{2}{3}$ radice, erunt 2 radices. Et adhuc 3 dragmae diminutae in $\frac{2}{3}$ radice sunt 2 radices diminutae et tandem multiplicacio 3 dragmarum diminutarum in 3 dragmas diminutas facit 9 dragmas additas. Sunt igitur $\frac{4}{9}$ census et 9 dragme minus 4 radicibus equales uni radici. Sed restaura 4 radices iungendo 1 radicem et fiunt 5 radices equales $\frac{4}{9}$ census et 9 dragmis. Reduc ergo ad unum censum integrum, quia unus 115

om. VU MP T Radix ... dragme] om. T 86 fuerit] fuit MP unam multiplica] una multiplicatur VU 88 hac] hec VU proveniunt] proveniant VU MP 91 post duas add. dragmas T post et add. inter VU 92 subtrahendo] protrahendo VU MP T 93 minus] om. VU T 94 debent] debet T multiplicas] multiplices MP in 10] om. MP 95 $50 \frac{1}{2}$] LII MP 12 T 97 $51 \frac{1}{2}$] XXV.ii VU $25 \frac{1}{2}$ T 98 erunt] sunt T post et add. viii/xvi MP $52 \frac{1}{2}$] $25/2$ MP T 99 quadrata] om. VU MP T 100 remanent] manent T altera] alia VU MP T 102 census] censui VU MP T hoc] om. MP 105 evenient] venient MP 108 multiplicando] multiplicabo VU MP T 109 multiplicando] multitudo VU MP 111 in] om. VU MP T 112 125] om. MP si] 5 T extrahuntur] extrahunt T 113 faciat] facient T eius] om. VU T extrahis] extrahis T 117 multiplicatio] multiplicabo T 120 integrum] in

census integer ad 4 eius nonas est duplus sexquiquartus. Multiplica ergo singula per $2 \frac{1}{4}$ et erit 1 census et $20 \frac{1}{4}$ dragme equales 11 et $\frac{1}{4}$ radicibus. Media igitur radices sunt $5 \frac{5}{8}$, multiplica in se, sunt $31 \frac{41}{64}$, ex quibus minue $20 \frac{1}{4}$ manent $11 \frac{25}{64}$, quarum radix quadrata, subtracta a medietate radicum, non facit propositum, sed oportet te radicem ipsam addere cum medietate radicum. Radix autem est $3 \frac{3}{8}$ que addita cum $5 \frac{5}{8}$ faciunt 9 quod erat propositum. 125

< 11 > Si tibi dixerit: dragma 1 et $\frac{1}{2}$ fuerunt divise per hominem et partem hominis. Et provenerat homini duplum eius quod provenerat parti. Quaeritur modo quanta sit hec pars hominis. Fiat hec sua regula: sit homo et pars unius et radix una; si igitur homini tangit duplum partis, eveniet ergo parti una cosa, tunc eveniunt homini 2 cose; propterea dicimus: si uni homini deveniunt 2 radices, quid devenit homini et uni radici? Multiplica ergo 2 radices per unum hominem et radicem et eveniunt 2 census et 2 radices quas debes dividere per 1 sed manet idem. Eveniunt ergo homini et parti 2 census et 2 radices que sunt equales dragma $1 \frac{1}{2}$. Reduc ad unum cenum totum mediando et sunt 1 census et 1 radix equales dragmis $\frac{3}{4}$. Media ergo radicem et $\frac{1}{2}$ in se multiplica, fit $\frac{1}{4}$; adde huic $\frac{3}{4}$, fiunt unum a quo aufer $\frac{1}{2}$, remanet $\frac{1}{2}$ et tanta fuit pars hominis. 130 135

< 12 > Si tibi dictum fuerit: divide 1 dragmam per aliquot homines et evenit cuilibet 1 radix; postea iunge illis hominibus unum hominem et divide iterum dragmam per ipsos et eveniat cuilibet eorum minus quam ex divisione primi secundum quantitatem unius 6te dragme. Hoc est tantum dicere: divide unam quantitatem per unam quantitatem et quod provenit, salva. Post divide eandem quantitatem per illam quantitatem et 1 plus et quod ex 2a divisione exit, est minus $\frac{1}{6}$ eo quod exivit per primam divisionem. Quaero per quem fuit prima divisio. Fiat isto modo: pone quod numerus primorum hominum sit 1 cosa, tunc numerus secundorum erit 1 cosa et 1. Primus igitur divisor erit 1 cosa et secundus divisor erit 1 cosa et 1. Ideo multiplica per primum divisorem minuimentum quod est inter utrasque divisiones et quod exit multiplica per secundum divisorem et productum divide per illud quod est inter primum et secundum divisorem in differentia et provenit census tuus. Multiplica ergo $\frac{1}{6}$ per primum divisorem, scilicet per 1 cosam, et proveniet $\frac{1}{6}$ cose, quam multiplica in secundum divisorem, scilicet in 1 cosam et 1, et exit $\frac{1}{6}$ census et $\frac{1}{6}$ cose quas divide per differentiam primi et secundi divisorum, scilicet per 1, et provenit $\frac{1}{6}$ census et $\frac{1}{6}$ cose que sunt equales dragme. Comple ergo cenum et habebis cenum et radices equales 6 dragmis; media igitur radices, sunt $\frac{1}{2}$, 140 145 150

eorum *T* 121 eius] *om. VU* 122 dragme] *om. T* 11 et $\frac{1}{4}$] duobus et i/iiii *VU*
T 123 sunt] fiunt *T* 11.25/64] 11.35/64 *NY* 125 $5 \frac{5}{8}$] i/viii *VU* 126
quod] quo *T* 127 dixerit] dicat quis *VUMPT* 128 modol] ergo *VU* 129
unius et] eius *VUT* radix una] ut dixi *T* 130 homini] homo *T* 131 propte-
rea] praeterea *T* deveniunt] eveniunt *VUMPT* quid devenit] quid evenit *VU* quid
venit *MP* quod evenit *T* 132 eveniunt] erunt *VUMPT* 134 $1 \frac{1}{2}$] dragme I./ii *VU*
iii/iiii *MP* sunt] sit *VU* 134-135 Reduc ... $\frac{3}{4}$] *om. MP* Media ... $\frac{3}{4}$] *om.*
VUT 137 fuerit] fuit *VUMPT* evenit] eveniat *VU* veniat *T* 140 dicere] dicen-
dum *MP* 141 provenit] provenerit *VUT* Post] *om. MP* eandem] illam
VUMPT illam] eandem *VUMPT* 142 exit] provenit *MP* proveniet *T* est] sit *T*
142-143 Quaero ... divisio] *om. MP* 143 pone] pono *VUT* 144 divisor] divisus *T*
147 divisorem] divisores *VUT* in differential] indentia *T* 150 exit] erit *T* divisorum]
divisoris *T* 151 provenit] proveniet *T* 152 sunt] fiet *VU* radices] radicem

multiplica in se, est $1\frac{1}{4}$ et iunge 6, sunt $6\frac{1}{4}$, extrahe radicem, sunt $2\frac{1}{2}$, a qua aufer medietatem radicem, manent 2, numerus hominum primorum. Considera bene quantum eadem quantitas dividitur per diversos divisores; si multiplicaveris tunc differentiam que exit in divisionibus seu in quotientibus numeris per primum divisorem et quod exit multiplicaveris in secundum divisorem et totum productum dividis per differentiam que est in divisionibus, provenit precise numerus dividendus. Exemplum: si 20 dividis per 4, proveniunt in divisione 5. Et si eadem 20 dividis per 10, veniunt in divisione 2. Iam differentia inter divisores seu quotientes est 3, quam si multiplicas in primum divisorem, scilicet 4, exeunt 12 que si multiplicas in secundum divisorem, scilicet 10, producuntur 120 que divisa per differentiam divisorum, que est 6, proveniunt precise 20 que erant dividenda et ita de aliis similiter omnibus propter exemplum sit ita questio.

<VIII.> CAPITULUM CONVENTIONUM NEGOCIATORUM

Quidam emit certum numerum brachiorum pro 36 ducatis et, si fuissent adhuc 6 brachia cum illis pro eadem pecunia, venisset unum brachium in uno ducato minus quam ita venit. Quero quot erunt brachia empta. Pone quod fuerunt 1 radix quam emit pro 36 ducatis. Tunc dicit: si adhuc fuissent 6 brachia, ergo fuissent 1 radix et 6, tum venisset unum brachium in ducato minus quam ita venit. Debes ergo dividere 36 per 1 radicem et quod exit esset uno ducato plus quam si divideres eadem 36 per 1 radicem et 6. Est ergo differentia divisionum illarum unum quod multiplica per primum divisorem, scilicet per 1 radicem, et exit una radix, quam multiplica per secundum divisorem, scilicet per unam radicem et 6, et proveniunt 1 census et 6 radices quos divide per differentiam divisorum, scilicet per 6, et quod exit, scilicet $1\frac{1}{6}$ census et una radix, est equale dividendo, scilicet 36 ducatis. Reduc ergo ad unum censum singula, multiplicando per 6 et erunt 1 census et 6 radices equales 216. Iam media radices, sunt 3. Multiplica in se: sunt 9, quibus adde 216 et erunt 225, cuius radix est 15, a qua subtrahe medietatem radicem, scilicet 3, manent 12 et tot erant brachia.

T $1\frac{1}{2}$ ex] $2\frac{1}{2}$ a *T* **153** a] ex *MP* **154** numerus] numeri *VU* **155** multiplicaveris] multiplicas *T* **156** per] *om.* *VU T* **157** multiplicaveris] multiplicabis *T* dividis] diviseris *MP T et infra* proveniunt] provenit *MP* **159** veniunt in divisione] perveniunt in divisione *VU* proveniunt *MP* **160** differentia] dicta *T* **3** *4 T* **161** multiplicas] multiplices *T* **162** producuntur] exeunt *VU MP T* **163** propter] per *MP* **164** ita] *om.* *VU MP T*
VIII **2** pro] per *T* **3** In uno ducato] uno brachio *VU MP T* **4** fuit] fuerunt *T* **6** venisset] fuisset *T* **8** est] sit *MP* illarum unum] 11 *T* **10** proveniunt] quod exit *MP* **11** divisorum] divisorem *T* **12** post equale *add.* scilicet *T* ducatis] *om.* *T* **13** multiplicando] multiplica *VU T* sunt] est *T* **14** 216] CXVI *VU* **15** erant] erunt *VU MP T*

<APPENDIX>

< 1 > Si tibi dixerit aliquis: 'Divide 10 in duas partes et multiplica unam earum in 10 et aliam in se, et fiant producta equalia.' Regula eius est ut multiplices 1 radicem in 10 et erunt 10 radices. Postea multiplica 10 minus 1 radice in se, et fient 100 et census minus 20 radicibus, que sunt equales 10 radicibus. Restaura diminuta et erunt 100 et census equales 30 radicibus. 5
Oppone igitur per illos et habebis.

< 2 > Et si dixerit: $\frac{2}{3}$ unius 5e census, sunt equales uni 7me sue radices. Fiat ergo tota radix equalis $\frac{14}{15}$ ipsius census; fac isto modo: $\frac{2}{3}$ unius 5e sunt $\frac{2}{15}$. Duc ergo 15e ipsius census sunt equales $\frac{1}{7}$ radices suae; divide ergo unam 7am per $\frac{2}{15}$ et proveniunt $< \frac{15}{14} >$: et tantum fuit radix. Sed census est $\frac{225}{196}$. 10

< 3 > Si diceret: est census qui multiplicatus per quadruplum eius fit 20. Hec est eius regula: si tu multiplicas eum in se, fit 5 ex quo 5 est 4a pars de 20; ergo ille census est radix de 5. Adverte rationem: tantumque aliquis numerus multiplicatus in suum multiplicem tunc submultiplex consimilis producti ex tali multiplicacione est id quod provenit ex multiplicacione talis numeri in se. Exemplum: si multiplicas 2 in quintuplum eius, 15
scilicet 10, proveniunt 20 quorum subquintuplus est 4 que fiunt ex multiplicacione 2 in se; iterum si multiplicas 3 in suum quadruplum, scilicet in 12, producuntur 36, quorum subquadruplus est 9, qui etiam fiunt, si multiplicas 3 in se; et ita de aliis.

Declaracio alia: multiplicatus census per suum quadruplum, fit 20. Tantum est dicendum: invenias unum numerum qui, multiplicatus per quatuor, tantum facit 20. Pone quod 20
numerus sit 1 radix quam multiplica per quatuor tantum, id est per 4 radices, fiunt 4 census qui sunt equales 20. Reduc ad unum censum, erit ergo unus census 5; erit ergo census quaesitus radix de 5. Ad probandum hoc, multiplica radicem de 5 per 4 radices de 5, sed primo videas quid sint 4 radices de 5, reducendo ad unam radicem quater enim 4, sunt 16 que, per 5 multiplicata, sunt 80. Ergo 4 radices de 5 sunt 1 radix de 80; ideo multiplica 25
1 radicem de 5 in 1 radicem de 80 et provenit 1 radix de 400; illa est 20. Patet ergo propositum.

< 4 > Et si dixerit: da mihi censum qui, multiplicatus in suam $\frac{1}{3}$, producat 10. Regula: cum quicumque aliquis numerus multiplicatus in suum submultiplicem producti ex tali multiplicacione provenientis consimilis multiplex est id quod provenit ex multiplicacione talis numeri in se. Exemplum: si multiplicas 10 in suum subduplum seu medietatem 30
scilicet 5, proveniunt 50. Huius autem producti duplum, scilicet 100, est id quod provenit

APPENDIX 1-6] *om. MP* 2 aliam] aliud *VU MP* 3-4 et ... radices] *om.*
T 5 que ... 10 radicibus] *om. VU T* 7 post radices *add.* Hec est eius regula *MP*
T 7-8 Fiat ... census] Hec est eius regula: equalis XIII decimis quintis ipsius census
VU T 8 2/15] 2/25 et *infra T* Duc] due *MP T* 15e] 15 T 9 15/14] 14/15
NY radices] radici *MP* 15/14] 14/15 *NY* 25/14 T 10 225/196] ccxv/clxxxx
VU MP 12 tu] *om. MP* 13 Adverte] Adduco T tantumque] quodcumque
VU MP quoniam quinque T aliquis] unus *VU MP T* 14 submultiplex] si multiplex
T 15 2] *om. T* eius] *om. VU MP T* 16 10] 20 *MP T* 17 iterum] item *VU T*
19 dicendum] dicere *VU T* 24 quid] quantum *VU MP* sed ... 5] *om. T* 25
multiplicata] multiplica T 80] 81 *NY* 27 mihi] michi *VU MP* 10] is T 28
cum] *om. VU MP T* submultiplicem] subduplum *MP* 30 multiplicas] multiplices *VU*

ex multiplicacione 10 in se. Ergo in proposito, si multiplicas censum in suam tertiam, scilicet suum subtripulum, producit 10 quorum triplum est 30 que proveniunt ex multiplicacione talis census in se; est ergo census quaesitus radix de 30.

< 5 > Et si dixerit: est unus census qui, per suum quadruplum multiplicatus, producat 1/3 sui. 35
Pone quod ille census sit una radix cuius quadruplum sunt 4 radices. Multiplica ergo 1 radicem per 4 radices et sunt 4 census qui sunt equales 1/3 radice posite. Divide ergo 1/3 per 4 proveniet 1/12 et tantum fuit census quaesitus. Probacio: multiplica 1/12 per 4/12 et proveniunt 4/144 que sunt 1/36 sed 1/36 est una tertia pars unius 12me ergo etcetera.

< 6 > Et si diceret: est unus census, multiplicatus in suam radicem, et proveniat ter tantum, 40
sicut est iste census. Considera quando aliquis numerus multiplicatus in suam radicem quadratam producit triplum sui, tunc ipsius radix quadrata multiplicata in 1/3 istius numeri seu quadrati constituit numerum ipsum. Dico ergo quod, si multiplicas radicem census in suam tertiam, provenit census. Ideo tertia census est radix istius census et est 9. 45

< 7 > Sed si dixerit: est census cuius 3 radices multiplicatae in 4 radices suas faciunt censum et plus 44. Regula eius est ut multiplices 4 radices in 3 radices et sunt 12 census qui equivalent censum et 44. Sunt ergo 11 census equales 44 dragmis. Dividendo ergo 44 per 11, provenit 1 census, scilicet 4.

< 8 > Similiter si dixerit: est census cuius radix, in suas radices 4 multiplicata, facit censum 50
ter et plus 50 dragmis. Hec est eius regula: 1 radix multiplicata in 4 radices facit 4 census qui sunt equales tribus censibus et 50 dragmis. Erit ergo census unus 50 dragmae. Probacio: si multiplicas 1 radicem de 50 in 4 radices de 50 que 4 radices de 50 sunt 1 radix de 800; venit 1 radix de 40000 et illa est 200 que est ter 50 et plus 50.

< 9 > Et si tibi dixerit: est census cui adiunxi 20 dragmas et proveniens erat equale 12 suis 55
radicibus. Hec est sua regula: quod dicas census et 20 sunt equales 12 radicibus. Media ergo radices, sunt 6, multiplica in se, sunt 36, extrahe 20, manent 16, cuius radix 4 de medietate radicum 6 dempta: manent 2 radix, cuius census est 4 quaesitus.

< 10 > Et si dixerit: est census cuius tertia multiplicata in suam quartam producit ipsum censum. Hec est sua regula: multiplica 1/3 cose per 1/4 cose et erit 1/12 census equalis 60
uni radici. Divide ergo unam radicem per 1/12 et provenit 12; est ergo census quesitus 12.

< 11 > Iterum est census cuius 1/3 et 1 dragma multiplicata in suam 1/4 et 2 dragmas efficit ipsum censum et plus 13 dragmis. Regula eius est ut multiplices 1/3 radice in 1/4 radice et fit 1/12 census et postea 1 dragmam in 1/4 radice, fit 1/4 radice, et deinde

T 32 multiplicas] multiplices T 35 unus] unum T 37 4 census ... equales] om.
MP T posite] positi T 38 1/12] 20 MP T 39 4/144] 144 MP 1/36] i/lxvi
VUMMP pars] om. VUT duodecime] 12 T 40 diceret] dixerit MP 41
iste] ille T numeris] numerum T 42 multiplicata] multiplicatur VUMMP multiplica
T multiplicas] multiplices T 43 ergo] om. T 44 radicem ... tertiam] radice
tertiarum in suam tertiam census VUT 47 ut multiplices] multiplica VUMMP T 47-48
Regula ... 44] om. T censum] censui VU 48 11] XX VUMMP T 49 provenit]
proveniet T 50 dixerit] dixeris MP multiplicata facit] multiplicatus fecit VU
T 51 radix ... multiplicata] radicem ... multiplica VUMMP T facit] et sunt VUMMP
T 52 unus] om. MP que ... 800] fiunt I radix de LXXX MP sunt I radix de LXXX VU
T 55 erat] est MP 56 sua] om. MP T 57 manent] remanent VUMMP T 58
post radicem add. scilicet VUMMP T radice] radices MP 59 multiplicata] multiplica

2 dragme in $1/3$ radices et fit $2/3$ radices et ultimo 1 dragmam in 2 dragmas et fiunt 65
 2 dragme. Erit ergo totum $1/12$ census et $11/12$ radices et 2 dragmae que sunt equales
 radici et 13 dragmis. Extrahe et oppone et invenies.
 < 12 > Diceret: est census a quo subtraxi eius $1/3$ et $1/4$ et 4 dragmas, residuum in se
 multiplicatum constituit unum censum et 12 dragmas. Hec est eius regula: aufer a radice
 una eius $1/3$ et $1/4$ et remanent $5/12$ radices a quibus demptis 4 dragmis manens, scilicet 70
 $5/12$ minus 4 dragmis, in se multiplicatum facit $25/144$ census et 16 dragme minus 3
 $1/3$ radices qui sunt equalis radici et 12 dragmis. Oppone igitur per ipsos et invenies
 $25/144$ census et 4 dragmas esse equales $4/3$ radicibus. Restaura censum ad integritatem
 multiplicando singula in 5 et $19/25$ et erunt census 23 et $1/24$ dragme equales 24 et $24/25$
 radicibus. Media ergo radices etcetera et invenies censum esse 24, sicut quesitum erat. 75
 < 13 > Et si tibi dixerit: multiplica 1 censum in 3 suas radices et veniet quintuplum census.
 Quod est sicut si diceret: multiplica unum censum in suam radicem et productum erit equale
 censui uni et $2/3$. Ergo radix illius census est dragma $1/3$. Census autem est dragme $2/9$.
 Semper enim quando aliquis numerus ducitur in multiplicacionem cuiuscumque alterius
 et productum debeat esse quantumlibet multiplex ad illum sic ductum, tunc, si vis scire 80
 si ille numerus propositus duceretur in illum numerum tantum in cuius
 multiplicacione prius duxisti, quantum fiat productum respectivi primi sic ducti. Divide
 numerum significantem proporcione < m > producti quod debeat venire ad numerum primum,
 per numerum sequentem proporcione multiplicis illius in quem duci debet primus et
 exhibit proporcio numeri provenientis ex multiplicacione talis numeri in numerum in cuius 85
 multiplicacione primus ducere debebas. Exemplum: multiplica 1 censum in suas 3
 radices et quod exit sit 12 uicibus ille census. Ergo multiplicando unum censum in
 unam suam radicem exit quadruplum illius census. Quod patet dividendo 12 per 3; est
 ergo radix illius census 4 et census est 16. Si enim multiplicas 16 per 12, que sunt sue 3
 radices, exit duodecuplum ad 16. Ibi enim 16 ducitur in multiplicacionem, scilicet in 90
 triplum ad 4, et exit duodecuplum ad 16 et, si dividis 12 per 3, exeunt 4. Sic si multiplicas
 16 in illos 4 in quorum triplum prius ducebas, exit tantum quadruplum ad 16.
 < 14 > Et si dixerit: est census a quo $1/3$ eius ablato residuum multiplicatum in 3 radices
 illius census, producit ipsum censum. Oportet te multiplicare totum censum in 3 suas
 radices, antequam extrahes illam tertiam, et veniet census unus et $1/2$. Ex quo enim sue 95
 $2/3$ multiplicate in 3 suas radices faciunt ipsum censum; ergo totus census, qui est 3 tertie,
 multiplicatus in easdem 3 radices suas est census $1/2$. Quod patet per regulam

T et saepe infra 65 fiunt] fient *T* 66 ante Erit add. Ergo *VU* post Erit add.
 ergo *T* 67 diceret] diceret *VU MP T* 68 post $1/4$ add. dragme *T* et 4] *om.*
VU MP T 69 post dragmas add. 9 *T* est] *om.* *T* 70 $1/4$] 4 *T* $5/12$] $5/15$
MP a quibus demptis] minus *MP* 71 manens ... $5/12$] manent $5/12$ radices *VU T*
 73 $4/3$] 24 et 14.25 *T* 73-75 Restaura ... radicibus] *om.* *T* 74 $1/24$] i/xxv *MP*
 vigesimum quintum *VU* 24] 14 *VU MP T* 76 veniet] eveniet *MP* 77 si] *om.*
MP T diceret] dicere *T* 78 $1/2/3$] $1/3$ *VU T* 79 enim] autem *T* 81
 cuius] maius *T* 82 prius] *om.* *MP* quantum] quantum *T* respectivi primi] *om.*
VU MP primi *T* 83 significantem] sequentem *VU MP T* 84 multiplicis] multiplica *T*
 86 primus ... debebas] primus ducere debeas *VU T* plus ducere debeas *MP* 89 multi-
 plicas] multiples *T* sunt] sue *T* 90 exit] erit *T* 91 duodecuplum] decuplum
MP Sic] sicut *T* multiplicas] multiples *VU T* 92 prius] plus *T* exit] erit
T 95 extrahes] extrahas *VU MP T* $1/2$] v/ii *VU iv/v* *MP 5/2 T* 96 3 tertie] iii/v

iusticie]. Si $2/3$ dant $1/1$, quid dat $1/1$? Et tunc si census, multiplicatus in 3 radices suas, facit censum et $1/2$, tunc ipse census multiplicatus in unam suam radicem facit $1/2$ census, quod patet ex precedenti doctrina dividendo $2/3$ per 3. Est ergo census $1/4$ et radix eius est $1/2$. 100

< 15 > Una vero tertia census huius est $1/12$; due vero 3e residue sunt $2/12$, sive $1/6$. Una igitur 6ta multiplicata in tres radices, scilicet $3/2$, efficiunt $1/4$ tantum unum censum. Sed si diceres est census a quo cum subtrahuntur 4 eius radices residui tertia est equalis 4 suis radicibus. Regula eius: tu scis si remanentis $1/3$ est equalis 4 radicibus, tunc totum remanens est equale 12 radicibus. Quibus ergo adde 4 radices que primo a toto censu demebantur et erunt 16 radices equales toti censui. Est ergo una radix 16 et census est 256. 105

< 16 > Sed si dixerit: est census a quo, si demitur eius radix et ipsa radix additur cum radice residui census post subtractionem radice eius ab eo, erit 2 dragme. Regula. Ergo radix census et radix remanentis sunt equales 2 dragmis; extrahe ergo de 2 dragmis radicem census et manent 2 dragme minus radice que sunt equales radici remanentis, scilicet radici eius quod manet post extracionem radice census ab ipso censu. Ut autem habeas equale toti remanenti, multiplica 2 dragmas minus radice in se et erunt 4 dragme et census minus 4 radicibus equales toti remanenti, scilicet censui minus radice. Oppone igitur per illos et erunt census et 4 dragme equales censui et tribus radicibus. Aufer censum et erunt 4 dragme equales 3 radicibus; ergo 1 radix est equalis $1\frac{1}{3}$ dragme cuius census est $1\frac{7}{9}$ dragme. Subtractis enim $4/3$ a $16/9$, manent $4/9$, quarum radix est $2/3$ que si iunguntur cum $4/3$ erunt 2 dragme. 110

< 17 > Et si tibi dixerit aliquis: est census a quo, cum subtracte fuerint eius 3 radices, residuum in se multiplicatum constituat ipsum censum. Regula: ergo id quod remansit fuit etiam eius radix una ex quo in se multiplicatum constituit ipsum censum. Et sic totus census est 4 radices. Ideo census est 16 et radix 4. 120

< 18 > Si autem aliquis dixerit: multiplica 1 censum in eius $2/3$ et veniant 5. Hec erit eius regula: si ita est quod aliquod totum multiplicatum in eius $2/3$ facit 5, tunc ipsum multiplicatum in se totum facit $7\frac{1}{2}$ quod patet per regulam. Si $2/3$ dant 5, quid dat 1? Ideo dic quod census iste quesitus est radix de $7\frac{1}{2}$. Multiplica igitur $2/3$ radice de $7\frac{1}{2}$ in radicem de $7\frac{1}{2}$. Hoc est quod tu multiplices $2/3$ in $2/3$ et perveniunt $4/9$ quas multiplica in $7\frac{1}{2}$ et erunt $3\frac{1}{3}$ ergo $2/3$ radice de $7\frac{1}{2}$ est una radix de $3\frac{1}{3}$. Multiplicando ideo $3\frac{1}{3}$ in $7\frac{1}{2}$ proveniunt 25; igitur quando tu multiplicas radicem de $7\frac{1}{2}$ in eius $2/3$, scilicet in $2/3$ radice de $7\frac{1}{2}$, provenit radix de 25 et illa est 5 et cetera. 125 130

VUMPT 98 iusticie] iustitie VUMPT 2/3] ii/v MP 2/5 T 1/1] i/ii VUMPT et
infra 99 unius] om. T 100 2/3] 3/2 VUMPT 103 multiplicata] multiplica T
tantum] scilicet VUT Sed] Et T 104 equalis] equale VUT 105 post eius add.
est MP remanentis] remanente VUMPT equalis] equale VUMPT 106 adde]
addo VU addito MP T 107 demebantur] debebantur VUMPT 108 dixerit] diceret
VUMPT 110 remanentis] remanebit MP 2] 11 T 111 manent] remanent T
113-114 multiplica ... remanenti] om. VUMPT 116 1 1/3] uni tertie T est] om. T
117 4/3] iv/v VUMPT et infra 4/9] om. T quarum] quare VU 119 fuerint] sunt
VUMPT 120 id] illud VUMPT 121 post se add. ipsum MP etiam] cuius T
125 quid] quod T 128 est] et T multiplicando ideo] Multiplica igitur VUMPT
129 per] in MP proveniunt] provenient VUT proveniat MP 130 in 2/3 radice] om.
VUMPT post et cetera add. Explicit liber Machumeti de algebra et almuchabala VU
Explicit liber Muchumeti de algebra et almuchabala. Laus Deo nostro. Amen MP T

7.

LA TRADUZIONE LATINA DEL KITAB AL-HISAB AL-HINDI DI AL-KHAWARIZMI

Nulla si sa attualmente dell'originale arabo da cui furono tratte le traduzioni del *Kitab al-hisab al-hindi*. A testimoniarne la versione in latino restano tuttavia quattro opere, studiate da Allard (Allard, 1975, 1992), di cui manteniamo la nomenclatura:

- *Dixit Algorizmi...* (DA)
- *Liber Ysagogarum Alchorismi* (LY, in tre versioni, più un compendio legato alla prima)
- *Liber Alchorismi* (LA)
- *Liber Pulueris* (LP)

7.1. LE QUATTRO OPERE LATINE

7.1.1. *Dixit Algorizmi*

La prima è la più nota, a seguito delle molteplici edizioni che ne sono state fatte (Boncompagni, 1857b; Vogel, 1963; Youshkevitch, 1976); testimoniata da un solo manoscritto (Cambridge, Univ. Libr. Ii.6.5), è considerata la versione più antica del testo arabo perduto di al-Khawarizmi; perciò è ritenuta una traduzione diretta dall'arabo, anche sulla base di alcune osservazioni rilevanti:

- Il testo presenta un lessico insolito nella lingua latina, con il ricorso a frequenti arabismi come l'uso di *diuidere super* (*kasama 'ala*) invece di *diuidere per* o *in*, oppure *exitus* (*makbraj*) invece di *denominatio*;
- L'inizio del testo contiene un'invocazione simile alla *basmala*;
- Si fa riferimento per ben tre volte ad al-Khawarizmi stesso;
- Viene ricordata per due volte l'origine indiana dei numerali, tipica consuetudine araba.

Altri elementi appaiono notevoli. La presenza di lacune insanabili impedisce di individuare con esattezza le parti originali o introdotte da altre fonti in versioni più tarde (questo è particolarmente evidente per la sottrazione). Non si parla, ad esempio, in modo esplicito dell'uso dello zero, se non in un passo dubbio.

Allard (Allard, 1992) propone di confrontare tutti gli esempi numerici contenuti in DA fino all'interruzione del manoscritto con quelli che compaiono anche in altri testi, evidenziando anche la forma latina con cui sono espressi (uso della prima persona plurale o seconda singolare, etc.), come si evidenzia in *tab. 7.1.*:

Tab. 7.1. – Confronto di esempi numerici in DA, LY, LA/LP.

OPERAZIONE	PRESENTE IN	TESTO
6422 - 3211	DA	Constituamus ... ponamus
1144 - 144	DA	Rursum ponamus. ... Et constituamus
2326 x 214	DA	Quod cum uellemus ... posuimus
46468 : 324	DA	Quod cum uellemus ... posuimus
1800.09.00	DA, LA/LP	Et si uolueris ... scribes
		Quod cum scriberemus ... fuerunt
2° x 2'	DA, LY III, LA	Eruntque ... multiplicati in
3° x 6'''	DA, LY III, LA	Eruntque ... multiplicati in
6' x 7'	DA, LY III	Sex minuta multiplicata ... erunt
7'' x 9'	DA, LY III	VII secunda in IX minutis erunt
1 1/2 x 1 1/2	DA, LY I, LA/LP	Et cum uolueris ... fac
2°45' x 3°10'30''	DA, LY I	Et si uolueris ... pone
15/3 : 6/3	DA, LY I	XV tercie si diuidantur ... exhibunt ... cum diuiseris ... exhibunt
10'' : 5'	DA, LY I, LA/LP	Et cum uolueris ... pone
10' : 5'''	DA, LY II	Item cum uolueris ... uerte
3/7 x 4/9	DA, LY I, LA/LP	Quasi uelles ... multiplicaresque
3 1/2 x 83/11	DA, LY I, LA/LP	Cum ergo uolueris ... scribes

Come si vede, per il primo gruppo di esempi, DA è l'unico testimone; per il secondo gruppo se ne affianca almeno un altro. Inoltre gli esempi di DA sono espressi alla prima persona plurale, mentre gli altri ricorrono alla seconda singolare o alla terza plurale.

Questo farebbe pensare a due fonti distinte, che utilizzano forme grammaticali diverse. Allard ipotizza che una di esse potrebbe essere il *Kitab al-bisab al-hindi* di al-Khawarizmi, come anche l'*incipit* potrebbe suggerire. Tuttavia un passo di LA getta un'altra luce su questa duplice fonte. Dopo aver esposto dettagliatamente la moltiplicazione di frazioni, l'autore aggiunge un capitolo sullo stesso argomento (*capitulum de eodem aliter*) utilizzando un altro metodo, in cui al-Khawarizmi viene citato esplicitamente come autore dell'esempio della

moltiplicazione di $\left(8 + \frac{3}{11}\right) \left(3 + \frac{1}{2}\right)$, un esempio presente in tutti i manoscritti,

espresso in DA alla seconda singolare.

Perciò, insiste Allard, DA risulta un testo ibrido, lontano dall'essere una traduzione fedele del testo arabo di al-Khawarizmi, quindi i passi presenti in DA ma mancanti negli altri manoscritti possono essere utilizzati solo con cautela, come nel caso della lettura del numero 1180703051492863 da scomporre in un certo numero di *uices* (successioni) per identificare agevolmente i multipli di mille in modo analogo a quello dei nostri esponenti. Questo suggerimento per la lettura (così come la parola *uices* nel contesto dell'aritmetica) non compare in nessun testo precedente di questo gruppo, ma si ritrova nell'opera (pur posteriore) di Fibonacci, con l'aggiunta dell'uso degli apici (v. 8.2.1.) e nei manoscritti della *Modus Family* (v. 6.), che risentono del lessico abacistico.

Sembra verosimilmente trattarsi di un intervento personale dell'autore di DA, ispiratosi in questo caso a qualche altra fonte latina, come negli esempi tipicamente suoi; Allard sottolinea che anche nella definizione di unità e di numero, l'influenza dell'aritmetica tradizionale studiata sui testi di Boezio si fa sentire. L'autore inoltre in due riprese pone fine ad alcune considerazioni, come se si trattasse di un *excursus* che distrae dall'argomento di interesse (*Sed nunc redeamus ad librum ...; nos autem redeamus ad librum ...*). Alcuni storici (Youshkevitch, 1976) hanno ipotizzato che questi passi possano alludere alla fine dei riferimenti all'*Algebra* di al-Khawarizmi, ma Allard ribadisce che, sebbene l'*Algebra* sia citata nell'introduzione di DA, una frase dello stesso contesto rimanda ad un altro libro di aritmetica (*quod in alio libro arithmetice dicitur*) e perciò egli respinge la correzione di aritmetica in algebra; a suo giudizio, la frase citata è inserita in un contesto in cui si tratta il concetto di unità come di *radice* (*radix*), ossia come origine naturale di ogni numero, secondo una tradizione che risale fino ai *Theologoumena arithmetica* di Nicomaco di Gerasa (v. 1. e 10.10.) e a Boezio. Poco importa, secondo lo studioso belga, che l'opera di Nicomaco si sia diffusa in ambiente arabo solo più tardi grazie a Thabit ibn Qurra: la basilarietà e la diffusione della nozione fanno pensare che al-Khawarizmi potesse conoscerla anche avulsa dal testo completo.

Il seguito del DA contiene la descrizione precisa delle operazioni fondamentali (addizione, sottrazione, dimezzamento, raddoppiamento, moltiplica-

zione, divisione) con numeri interi e frazioni sessagesimali, attribuite anch'esse agli Indiani e presentate come un caso particolare delle frazioni ordinarie.

Dopo la prima trascrizione del manoscritto di Cambridge da parte di Boncompagni nel 1857, gli studiosi sono concordi nel ritenere che l'opera fu composta attorno alla metà del XII secolo, il che richiederebbe di anticipare la datazione del manoscritto dal XIII al XII secolo. Alcuni hanno persino ipotizzato la paternità di **Sacrobosco** o **Adelardo di Bath**, ma senza poter sostenere l'attribuzione con prove certe.

Nonostante tutti i suoi limiti, DA resta comunque un prezioso testimone del testo di al-Khawarizmi, perché permette di ricostruire la più antica tappa dell'introduzione nella scienza araba dell'aritmetica indiana e l'uso che ne fece l'Occidente latino nel XII secolo.

7.1.2. *Liber Ysagogarum Alchorismi*

Anche del *Liber Ysagogarum*, per la cui attribuzione sono stati proposti i nomi di **Adelardo di Bath** (Tannery, 1911) e di **Petrus Alfonsi** (Millàs Vallicrosa, 1943), esistono più versioni, oltre a quella sintetica:

- LY I: versione comune a tutti i manoscritti e in parte anche alla versione sintetica;
- LY II: versione accresciuta della precedente, contenuta nei manoscritti A e P (v. 1.2);
- LY III: versione originale del manoscritto O (v. 1.2);
- LY: versione comune a LY I e LY II, ma non a LY III.

La parte aritmetica occupa i primi tre dei cinque libri; i restanti due sono invece dedicati a compendi di astronomia e geometria. Uno studio accurato del testo permette di vedere che, nonostante le cifre indo-arabiche non compaiano né nell'opera di Adelardo né in quella di Petrus, le tavole del V libro di LY I sono calcolate sulla base del 1° ottobre 1116 e sono identiche a quelle di Petrus Alphonsi (folio 114r del manoscritto 283 del Corpus Christi College di Oxford), lasciando aperto il campo alle ipotesi di un contatto, se non addirittura di una collaborazione fra i due.

Si possono inoltre evidenziare, secondo Allard, alcune analogie significative fra LY I e la traduzione fatta da Gerardo da Cremona del *Sermo de motu*, tratto dal *Liber de quinque essentiis* di al-Kindi ¹. Anche se non si può parlare

¹ LY I: *Motus uero species sunt VI... compositi sunt augmentatio et diminutio... constructio et destructio... alteram qualitativam, ut de dulci in amarum, de calido in frigidum... alterum uero directum cuius sex sunt species, ante et retro, dextrorsum et sinistrorsum, sursum et deorsum ...*; Al-Kindi (Versione di Gerardo): *Motus autem diuiditur in sex species... quarta augmentatio, quinta diminutio... generatio... corruptio... alteratio autem non est nisi in qualitate... sicut frigidum permutatione fit calidum et sicut dulce permutatur in ama-*

di vere corrispondenze, si direbbe probabile una fonte comune, forse proprio l'opera di **al-Kindi**.

Un'opera con cui LY presenta affinità, secondo un altro studio di Allard (Allard, 1997), è il cosiddetto *Helcep Sarracenicum* (v. 9.2.): lo storico pensa ad uno stesso ambiente di produzione, forse vicino ad Adelardo di Bath.

7.1.3. La tradizione del Liber Alchorismi e del Liber Pulueris

In base alla trascrizione fatta da Boncompagni (Boncompagni, 1857b) di un *Liber Alghoarismi de pratica arismetrice qui editus est a magistro Iohanne Yspalensi* (o *Liber Mahamaleth*, dal termine arabo *muhamalāt*, ossia [calcolo] pratico), contenuto nel manoscritto 7359 della Bibliothèque Nationale di Parigi, si attribuisce a **Johannes Hispalensis**, la stesura di un trattato in latino basato sull'aritmetica di al-Khawarizmi. Questo manoscritto sarebbe l'unico dei dieci manoscritti oggi superstiti in cui compare il nome di Johannes Hispalensis, in qualità di autore: Allard dissente però da questa attribuzione, dal momento che il manoscritto costituirebbe un testimone molto tardo (XIV secolo) e considerevolmente corrotto; inoltre, non ritiene Johannes Hispalensis all'altezza di realizzare una traduzione tanto tecnica e complessa.

Il copista del manoscritto di Salamanca (S, sempre del XIV secolo, in 7.2) ha aggiunto all'espressione **Magister Johannes**, trovata evidentemente nell'antigrafo, la precisazione «*Hec est arimetica Iohannis de Sacrobosco*». Sulla base del manoscritto 15461 di Parigi (inizio XIII secolo) si può essere certi che LA fu composto a Toledo verso il 1143: infatti il manoscritto, appartenuto senza dubbio, secondo Allard, al collezionista **Richard de Fournival** e poi al teologo della Sorbona **Gérard d'Abbeville** (1230-1272), fu copiato in Italia, ma presenta un calendario toledano dal 1143 al 1159, che doveva comparire nel testo originale (d'Alverny, 1993). Tutto riporta alla figura di un **Magister Johannes**, da non identificarsi né con Johannes Hispalensis, a giudizio di Allard, né con Sacrobosco. Sesiano dapprima ritiene inattendibile l'attribuzione a Hispalensis (Sesiano, 1986), poi sfuma la sua posizione (Sesiano, 1989). In seguito, Allard (Allard, 1997) ha proposto di identificare questo maestro con il Magister A di LY II: confortato dalle scoperte di Burnett (Burnett, 1994a), afferma che potrebbe trattarsi di tale Johannes de Toledo (Hispanus), membro del capitolo di Toledo e collaboratore di Avendauth, contemporaneo o di poco posteriore a Gundissalinus; in seguito Johannes sarebbe diventato arcidiacono di Cuéllar e, nel 1212-1213, vescovo

rum... partes uero motus recti sunt sex, scilicet dextra et sinistra, anterior et posterior, superior et inferior...

di Albarracín-Ségorbe, poco prima della morte, nel 1215 (Gonzálvez Ruiz, 1981). Il confronto tra la data di elaborazione del trattato (1143) e la data di morte di Johannes Hispanus (1215) suscita però qualche perplessità sull'identificazione, nonostante si possa attribuire a longevità la distanza fra la stesura dell'opera e la morte ².

Quanto all'ipotesi su un possibile legame di LY II con le tecniche di calcolo digitale, la formula presentata, anche se espressa in termini differenti, si ritrova in un seguito di LA, importante non solo per l'aritmetica latina tradizionale, ma anche per quella araba e per l'algebra. In questo stesso seguito del calcolo indiano, ritenuto da alcuni una prima rielaborazione dell'*Algebra* (Allard, 1997), si trovano problemi di aritmetica pratica nei quali degli aurei sono convertiti in *morabotini* (o, più correttamente, *marabitini*), nome attribuito al dinaro d'oro degli Almoravidi in Spagna (XI-XII secolo). Questa moneta nel XII secolo fu imitata nelle regioni limitrofe (in Portogallo, sotto il regno di Alfonso II, nel León sotto Ferdinando II, a Barcellona e in Castiglia) con svariati nomi.

Infine, il *Liber Pulueris* (LP) coincide per lunghi brani con LA, ma presenta anche parti originali. In passato era ritenuto un rimaneggiamento di LA, ma si è poi compreso che doveva trattarsi di una versione più sintetica e forse più antica, derivata dalla stessa fonte latina. La prova consiste, secondo Allard, nel fatto

che, come DA e LY I, LP presenta l'esempio della moltiplicazione di $\left(3 + \frac{1}{2}\right) \frac{83}{11}$, mentre LA utilizza $\frac{83}{11} \left(3 + \frac{1}{2}\right)$.

Persino le cifre indo-arabiche di LP differiscono nettamente da quelle presenti in LA.

7.1.4. Osservazioni conclusive

Riepilogando:

- LY II è una versione accresciuta che fa riferimento alla traduzione adelardiana degli *Elementi* di Euclide e all'aritmetica latina tradizionale estranea al calcolo indiano mediato dagli Arabi (di ascendenza boeziana). Di questo testo si hanno una sola versione ed un solo manoscritto attribuito ad un **Magister A**, ma quello che si potrebbe definire uno pseudo-quadrivio, presente in LY I, non può essere attribuito definitivamente né ad Adelardo di Bath né a Petrus Alfonsi, nonostante l'indubbia influenza esercitata dall'opera di quest'ultimo

² Va segnalato che su questi personaggi storici esistono contrastanti ricostruzioni biografiche: si arriva persino all'identificazione di Johannes Hispanus con Avendauth e Johannes Hiscalensis (Thorndike, 1959), (Lemay, 1987).

nei capitoli sulla geometria e sull'astronomia.

- LY I mostra un sicuro interesse per il mondo giudaico ed ebraico.
- I libri di aritmetica di LY I possono essere datati al 1143 (o poco dopo) sulla base del compendio, che si pone in sicura relazione con essi.
- Il manoscritto di Monaco 18027 (LY III) presenta la netta distinzione fra numerali detti *Toletane figure* da altre forme più simili alle cifre arabe e denominate *Indice figure*.
- Il manoscritto 15461 di Parigi, in cui è presente LA, ha avuto come modello, oggi perduto, un manoscritto toledano databile tra il 1143 e il 1159.
- L'autore di LA è un Magister Johannes la cui identificazione con Johannes Hispalensis è fortemente dubbia.
- Alcuni elementi estranei al calcolo indiano di al-Khawarizmi accomunano LY II e la seconda parte di LA.
- L'autore di LA conosceva una moneta caratteristica della Spagna negli anni che seguirono la *Reconquista* e il regno degli Almoravidi.

Le rare attribuzioni sicure dei manoscritti orientano l'interesse verso Toledo, città intimamente legata alla cultura ebraica, dove operarono un **Magister A** e un **Magister Johannes**, che secondo Allard potrebbero essere la stessa persona (Allard, 1997). Scartata l'attribuzione a traduttori famosi come **Adelardo di Bath**, **Petrus Alfonsi** e **Johannes Hispalensis**, resta la possibilità che ci abbiano lavorato altri traduttori, come **Avendauth** e un suo collaboratore, firmatosi «Magister Johannes», forse proprio il Johannes Hispanus membro del Capitolo di Toledo indicato da Allard. L'identità di Avendauth, noto come «israelita philosophus» in alcuni manoscritti latini, non è del tutto certa, ma lo è la sua localizzazione a Toledo; si tratterebbe forse del filosofo ebraico **Abraham ibn Daud** che visse a Toledo appunto tra il 1140 e il 1180. Anche l'introduzione di LY I, decisamente estranea al calcolo indiano secondo gli Arabi potrebbe avere come fondo l'opera di al-Kindi; la descrizione di sei casi di moto non circolare ricorda da vicino il *Commentario alla Bibbia* del filosofo ebreo contemporaneo di Cristo, **Filone di Alessandria**. Sempre nella stessa introduzione, una singolare suddivisione dell'ora si discosta da tutta la tradizione latina, risalente a Marziano Capella, secondo la quale il tempo è costituito di istanti indivisibili. Questo appare un tentativo di conciliare il calendario giuliano e il mese lunare con il calendario ebraico lunare-solare.

7.2. I MANOSCRITTI E LA LORO CLASSIFICAZIONE SECONDO ALLARD

Allard, nel realizzare l'edizione critica dei quattro trattati ha utilizzato i seguenti manoscritti:

DA:

C: Cambridge, University Library Ii. 6. 5, ff. 102r-109v, XIII sec.

LY:

d: Admont, Stiftsbibliothek, Fragm. 4, XII secolo

G: Genova, Biblioteca Universitaria, ms. E. III. 28, XV secolo

A: Milano, Biblioteca Ambrosiana, A 3 Sup., ff. 1r-20v, XII secolo

M: München, Bayerische Staatsbibliothek, lat. 13021, ff. 27r-31v, XII-XIII secolo

O: München, Bayerische Staatsbibliothek, lat. 18927, ff. 31r-45r, XIII secolo

I: Oxford, Bodleian Library, Lyell 52, ff. 21r-34v, XIV secolo

P: Paris, Bibliothèque Nationale, lat. 16208, ff. 67r-70v, XII secolo

V: Wien, Österreichische Nationalbibliothek, 275, ff. 26v-45v, XII secolo

LA:

D: Dresden, Sächsische Landesbibliothek, C 80, ff. 129r-134r, XII secolo

A: Erfurt, Wissenschaftliche Bibliothek, Ampl. Quart. 355, ff. 85r-115r, XIII-XIV secolo

E: Oxford, Bodleian Library, Selden Supra 26, ff. 96r-100v, XIII secolo

M: Paris, Bibliothèque Mazarine, 3642, ff. 105v-117v, XIII secolo

N: Paris, Bibliothèque Nationale, lat. 7359, ff. 85r-111v, XIV secolo

P: Paris, Bibliothèque Nationale, lat. 15461, ff. 1r-14v, XIII secolo

U: Paris, Bibliothèque Nationale, lat. 16202, ff. 50r-79r, XIII secolo

S: Salamanca, Biblioteca de la Universidad, Ms. 2338, ff. 1r-49r, XIV secolo

L: Vaticano, Biblioteca Apostolica, Pal. Lat. 1393, XIII secolo

c: Firenze, Biblioteca Nazionale Centrale, Convent. soppr. J. V. 18, ff. 53v-70r, XIV secolo

LP:

B: Milano, Biblioteca Ambrosiana, M 28 Sup., 98v-104r, XIV secolo

I: Oxford, Bodleian Library, Lyell 52, ff. 1r-20v, XIV secolo

T: Vaticano, Biblioteca Apostolica, Reg. Lat. 1285, XIV secolo

7.2.1. Stemma di LY

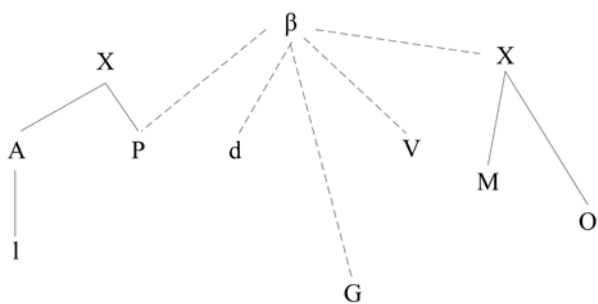


Fig. 7.1. – Stemma di Liber Ysagogarum.

7.2.2. Stemma di LA e LP

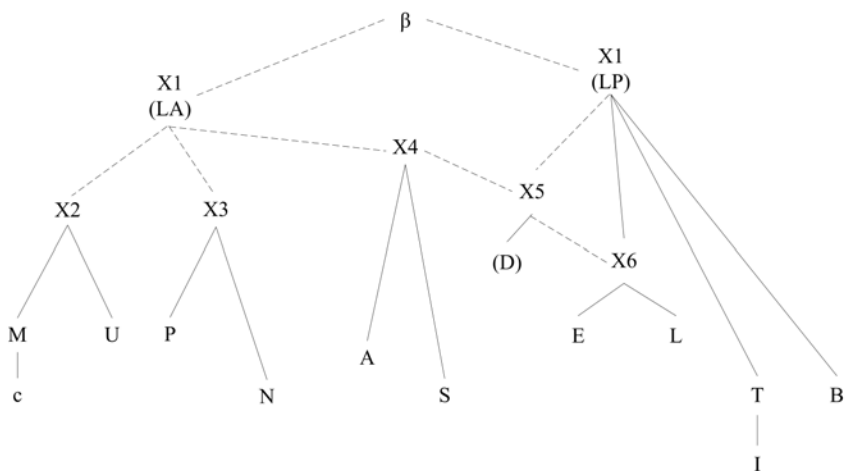


Fig. 7.2. – Stemma di Liber Alchorismi e Liber Pulueris.

7.3. IL CONTENUTO DEI MANOSCRITTI

Come si è visto, tre sarebbero le possibili fonti del DA, di cui una è forse proprio quest'opera aritmetica di al-Khawarizmi. Il censimento dei 60 esempi contenuti (Allard, 1992) è sintetizzato in *tab. 7.2.*:

Tab. 7.2. – Confronto numero esempi numerici contenuti in DA, LA/LP, LY.

NUMERI INTERI		FRAZIONI SESSAGESIMALI	
Opera	Esempi	Opera	Esempi
DA + LA/LP	1	DA + LY I + LA/LP	2
LA/LP	4	DA + LY I	1
DA	4	DA + LY II	1
LY	4	DA + LYIII	2
LY III	3	LYIII + LA	2
LA	8	LA/LP	2
		LY	4
		LY III	1
FRAZIONI		RADICI QUADRATE	
Opera	Esempi	Opera	Esempi
DA +LY I +LA/LP	2	LY I + LA/LP	2
DA + LY I	1	LY III + LA/LP	2
LY I + LA/LP	1	LY I	2
LY	1	LA	4
LA	6		

Questa analisi rileva alcune evidenze:

- Gli esempi di operazioni con i numeri interi sono sostanzialmente diversi, ossia presenti in testimoni isolati; c'è solo un caso di coincidenza. Sembra possibile che mancassero anche nel testo di al-Khawarizmi, escluso il caso particolare di divisioni che comportano il ricorso allo zero. Allard (Allard, 1992) ipotizza che la varietà dipenda dal fatto che i traduttori si siano sentiti liberi di prendere l'iniziativa su questo aspetto.

- È più alta l'occorrenza di esempi comuni tra le frazioni sessagesimali: spesso ne figurano due. Si potrebbe forse supporre che il testo di al-Khawarizmi ne contenesse al più due, se non ci fossero coincidenze non fortuite anche al di fuori di questi due esempi. Forse, suggerisce Allard, la pratica con le frazioni sessagesimali è più antica della tradizione araba e gli autori hanno attinto al patrimonio di esercizi ed esempi a loro noto o ne hanno inventati per l'occasione. In ogni caso sembra che la tecnica indiana non influenzi l'Occidente per questo tipo di calcolo.
- Le gravi lacune di DA lasciano intravedere solo due esempi di frazioni comuni

a tutti i trattati; Allard pensa che si possa aggiungere anche $\left(20 + \frac{2}{13}\right) : \left(3 + \frac{1}{3}\right)$,

esempio presente in tutte le versioni di LY e al gruppo LA/LP: probabilmente compariva nella parte perduta di DA. Allard indica l'esistenza di un solo esempio comune a DA e LY I ($\frac{15}{3} : \frac{6}{3}$) e afferma come la sua forma particolare e il

suo inspiegabile inserimento nel capitolo delle frazioni sessagesimali indichino una fonte diversa sia da quella degli esempi comuni a tutti i trattati sia a quella di DA per i numeri interi. È possibile che questa sia una traccia di una prima traduzione latina perduta dell'originale arabo, seguita più o meno fedelmente da DA e dalle versioni successive del LY o almeno dal modello comune a queste ultime. Fu invece abbandonata dagli altri testi, che sono più elaborati ed originali su questo punto.

- Negli esempi sulle estrazioni di radici quadrate, solo due sono comuni a tutti i trattati; la versione LY III è accomunata a LA/LP (radice di 10000 e di 2 con il metodo degli zeri), in modo simile a quanto osservato per le frazioni sessagesimali. Si potrebbero ipotizzare per LY III e LA, ma anche per il modello di LA/LP, fonti differenti da quelle rappresentate in DA e nelle altre versioni di LY.

Le relazioni reciproche sono state riassunte da Allard (Allard, 1997) nello schema alla pagina seguente (*fig. 7.3.*).

Allard difende strenuamente l'idea che prima dei trattati da lui studiati esistesse una più antica versione latina composita ed oggi perduta. La totale assenza di analogie testuali fra i trattati (se non, ancora una volta, fra le tre versioni del LY e i testi LA/LP) potrebbe suggerire anche l'ipotesi dell'esistenza di un rimaneggiamento arabo dell'opera aritmetica di al-Khawarizmi. Scartata l'ipotesi che l'opera potesse contenere non solo nozioni ricavate dalla matematica indiana, ma anche altre di ascendenza boeziana, si deve ammettere, dice Allard, che la fonte principale cui si sono ispirati gli autori occidentali del XII secolo, desiderosi di trasmettere la scienza indiana ripresa dagli Arabi, tentava comunque di conciliare due tradizioni estranee una all'altra e non poteva essere composta che in un paese di lingua latina sensibile all'influenza araba; essa è sopravvissuta in alcune espressioni di DA, ma è scomparsa dagli altri testi. Va notato comunque che i trattati sottolineano unanimemente, così come i testi arabi, l'origine indiana del-

l'aritmetica basata su nove cifre e lo zero, pur ribadendo il ruolo di al-Khawarizmi e della cultura araba nel passaggio verso l'Occidente.

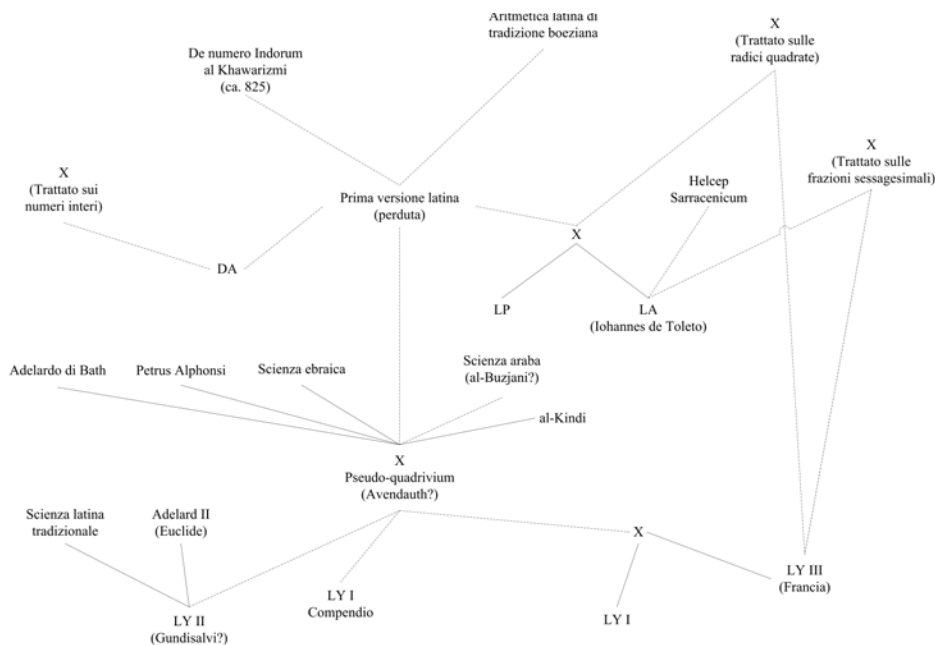


Fig. 7.3. – La tradizione degli Algorismi collocata nel panorama della letteratura aritmetica medievale (da Allard, 1997).

7.4. LE CIFRE ARABICHE ORIENTALI E OCCIDENTALI NEI MANOSCRITTI

Lo studio delle cifre nei manoscritti è altrettanto significativo, dal momento che permette una migliore conoscenza dei primi utilizzi e della diffusione dei numerali indo-arabici in Occidente, dove si incominciava gradualmente ad abbandonare la tecnica di calcolo gerbertiana, basata sull'abaco e sugli apici.

Questo porta Allard (Allard, 1992, 1997) a rifiutare la teoria della differente origine (formulata più volte, v. 4.1.) delle cifre arabe orientali e delle altre chiamate *ghubar* (polvere) o *toledane*, accentuando in tal modo la portata del ruolo di Toledo nell'introduzione in Europa di una serie di numerali ³.

³ Uno studio accurato della questione è in Burnett (Burnett, 2002a).

Dal confronto tra le cifre dei manoscritti si evidenziano quattro aspetti:

1. Le differenze tra le cifre nelle quattro opere dipendono dall'evoluzione del *ductus* dei copisti latini, che sarebbe secondo Allard legata a una scrittura da sinistra a destra influenzata dalla scrittura visigotica.
2. Compaiono sia in DA (*Est quoque diuersitas inter homines in figuris earum*) sia in LA (*Est autem in aliquibus figurarum istarum apud multos diuersitas*) le prove dell'esistenza di una molteplicità di grafie di molte cifre, all'epoca in cui le opere furono composte: è poco verosimile che questa possa essere attribuita ad al-Khawarizmi.
3. Numerali più simili a quelli arabi tradizionali si ritrovano anche in una versione ibrida di LA e LP contenuta nei manoscritti Oxford Bodleian Library, Selden Sup. 26 e Vaticano, Palat. Lat. 1393, in cui sono visibili le difficoltà incontrate nel passaggio alla scrittura latina da sinistra a destra, soprattutto per la cifra 3.
4. Il manoscritto 18927 di Monaco (LY III) parla esplicitamente di *forme toletane* distinte dalle *forme indiane*.

Lo studio della formazione del lessico aritmetico latino medievale, sempre di Allard⁴, evidenzia che parole dalla semantica già consolidata fin dall'Alto Medioevo, sono utilizzate con lo stesso significato nei trattati studiati. Viceversa, la maggior parte delle parole appaiono come neologismi sia resi necessari dall'argomento trattato, sia del tutto gratuiti. In misura differente i primi trattati latini di calcolo indiano, soprattutto LA e LP, hanno dato un contributo alla migliore diffusione di un lessico tecnico la cui influenza si nota nell'*Algorismus vulgaris* di Sacrobosco (v. 9.2.) nel XIII secolo, il più famoso algorismo del Medioevo, e nel suo contemporaneo il *Carmen de algorismo* di Alexandre de Villedieu, altrettanto celebre (v. 9.1.). Furono introdotte parole come *aggregatio* (addizione), *circulus* (zero), *consumere* (uguagliare), *demere* (sottrarre), *ducere in* (moltiplicare), *exire* (risultare da un'operazione), *iungere* (sommare), *ordo* (fila di cifre), *retrahere* (sostituire una cifra). Altri vocaboli, presenti soprattutto in DA e LY I, non riscosero alcun successo, come *augmentio* (addizione), *dispertio* (sottrazione), *erigere* (riportare), *mansio* o *statio* (posizione). Il principale contributo degli algorismi latini resta tuttavia l'introduzione delle nove cifre e dello zero, in concorrenza con i sistemi tradizionali basati sull'abaco e sul calcolo digitale. Le differenti operazioni, infine, sono esposte nei vari trattati con caratteristiche diverse.

A titolo di esempio, l'ordine con cui sono illustrate le operazioni sugli interi è presentato in *tab. 7.3*.

Le differenze tra DA e LA/LP sono minime: l'ordine delle operazioni di raddoppiamento e di dimezzamento è inverso; inversione che si constata anche nell'*Algorismus vulgaris* di Sacrobosco e nel *Carmen de algorismo* di Villedieu,

⁴ Più recentemente anche North (North, 1994).

mentre entrambe le operazioni scompaiono dal *Liber Abaci* di Fibonacci. In LY I la moltiplicazione è divisa in tre capitoli, corrispondenti alla distinzione fra *digiti* (unità), *articuli* (decine) e *numeri compositi* (formati di unità e decine) secondo una classificazione tipica del calcolo digitale e risalente almeno all'epoca di Gerberto d'Aurillac (v. 4.1.). È inoltre abituale per gli abacisti, che attribuiscono alla moltiplicazione un ruolo chiave, trattare innanzitutto questa operazione, come avviene in LY I e nel *Liber Abaci*.

Tab. 7.3. – Ordine di presentazione delle operazioni in DA, LA/LP e LY.

DA	LA/LP	LY I
numerazione	numerazione	numerazione
addizione	addizione	moltiplicazione
sottrazione	sottrazione	addizione
dimezzamento	raddoppiamento	sottrazione
raddoppiamento	dimezzamento	dimezzamento
moltiplicazione	moltiplicazione	raddoppiamento
divisione	divisione	divisione
<lacuna>	estrazione di radice quadrata	estrazione di radice quadrata

7.5. LA SCOPERTA DI HC 397/726

La scoperta di un'ulteriore copia di DA a New York (Hispanic Society of America HC 397/726, ff. 17r-24v), scritta in Spagna forse nel XIII secolo, ha permesso a Folkerts (Folkerts, 1997) di ampliare gli studi sull'argomento e di pervenire a risultati interessanti.

Dal confronto fra C e quest'ultimo manoscritto (da Folkerts denominato N, ma qui NY, per evitare confusioni), emergono alcune importanti differenze:

- il lessico è più accurato in NY che in C;
- C presenta alcuni errori che non figurano in NY;
- in NY compaiono intestazioni di capitolo, diagrammi ed esempi del tutto assenti in C.

Nonostante le difformità, Folkerts ritiene che i due manoscritti appartengano a due momenti distinti di rielaborazione di DA e che l'origine di entrambi i manoscritti (spagnola per NY, inglese per C) incida considerevolmente sul loro rapporto con la traduzione originale. NY consente quindi di provvedere al ripristino della parte mancante in C (divisione ed estrazione di radice), al-

l'espunzione di parti di ascendenza boeziana (come la discussione sull'unità) e di conseguenza alla ricostruzione del testo originale di al-Khawarizmi.

Per ciò che riguarda l'identità del traduttore, sostiene Folkerts, ci sono pochissimi indizi: i nomi di Adelardo di Bath, Roberto di Chester, Hermann di Carinzia e Gerardo da Cremona, proposti dagli storici, non sono esenti da valide obiezioni, che ne impediscono un'attribuzione definitiva.

Folkerts ritiene che, nonostante tutti questi limiti, il manoscritto possa contribuire almeno alla ricostruzione del contenuto del trattato di al-Khawarizmi.

1. Come scrivere i numeri nel sistema di notazione posizionale in base 10
 - 1.1. Ringraziamento a Dio
 - 1.2. Presentazione del contenuto: l'aritmetica indiana
 - 1.3. Numerali (molto simili a quelli presenti nel Codex Vigilanus – v. 4.1.)
 - 1.4. Struttura decimale degli interi
 - 1.5. Sistema di notazione posizionale: le decine
 - 1.6. Sistema di notazione posizionale: le centinaia
 - 1.7. Il riporto
 - 1.8. Lettura dei numeri (comune in testi arabi)
2. Addizione e sottrazione di interi
 - 2.1. Algoritmo generale per l'addizione
 - 2.2. Algoritmo generale per la sottrazione
 - 2.3. Passaggi specifici della sottrazione
 - 2.4. Sottrazione con sottraendo molto più grande del minuendo
3. Raddoppiamento e dimezzamento
4. Moltiplicazione di interi
 - 4.1. Autocitazione dall'*Algebra*
 - 4.2. Descrizione dettagliata dei vari passaggi della moltiplicazione
 - 4.3. Moltiplicazione per 0
5. Prova del nove
6. Divisione di interi: algoritmo generale
7. Divisione di interi: esempi
8. Moltiplicazione di frazioni decimali
9. Moltiplicazione di frazioni sessagesimali
10. Divisione generale di frazioni
11. Come scrivere i numeri costituiti di interi e frazioni sessagesimali
12. Moltiplicazione e divisione di frazioni comuni
13. Radici
14. Procedure generali per estrarre le radici
15. Questioni teoriche sull'estrazione di radici quadrate
16. Esempi
17. Calcolo di radici di frazioni
18. Estrazione di radici secondo il metodo indiano
19. Estrazione di radici di numeri interi o misti

7.6. IL XII SECOLO

I più antichi algoritmi, anche se non i più noti, risalgono già al XII secolo; oltre al già citato LA (v. 7.1.3.), esistono almeno altre due opere di contenuto analogo, databili al XII secolo:

1. Un manoscritto conservato a Monaco di Baviera (München, Bayerische Staatsbibliothek, CLM 13021), studiato da Nagl e Curtze (Nagl, 1890; Curtze, 1898), copiato ad opera di un certo frate **Sigisboto** dell'abbazia di Prüfening, vicino a Regensburg, all'epoca dell'abate Eberhard (1163-1168) e datato, molto controversamente, attorno al 1115. Il nome dell'autore riportato sul manoscritto è ancora **magister A**, identificato da alcuni (Tannery, 1922; Haskins, 1927; Cao et al., 1992) in Adelardo di Bath; Levey (Levey, 1954) esclude la paternità di Savasorda, dato che la competenza dell'autore ebraico nel trattare le operazioni con frazioni è senz'altro superiore a quanto dimostrato dal magister A. Tra l'altro, la forma dei numerali utilizzati è piuttosto inconsueta: non sono né figure indiane né toledane, dal momento che sono caratterizzate dalla presenza di code verticali (Burnett, 2002a). L'ordine delle operazioni presentate nel testo è inconsueto: moltiplicazione, addizione, sottrazione, dimezzamento, raddoppiamento, divisione.

2. Una parte dell'*Encyclopedia* (*Yesode ha-tebunah u-migdal ha-emunah*) di Savasorda, contenuta nel manoscritto München, Cod. Heb, 36, ff. 203v-209r, studiata da Levey (Levey, 1954), che la data al primo quarto del XII secolo. L'opera contiene numerazione, operazioni fondamentali, aritmetica commerciale, definizioni geometriche, ottica e musica. L'ordine delle operazioni presentate nel testo non è quello consueto: moltiplicazione, divisione, sottrazione, frazioni (inclusa la denominazione), trasformazione di frazioni con il metodo di completamento (adottato anche da al-Khawarizmi nell'*Algebra*), proporzione. Un aspetto originale è inoltre costituito dal fatto che l'autore costruisce un sistema logico, basato su una struttura comune (il comun denominatore) per operare sulle frazioni; perciò l'operazione base, anche per gli interi, è la moltiplicazione. Stante il suo ruolo in campo aritmetico e geometrico (v. 4.3.), Savasorda ha certamente contribuito alla rinascita delle arti del calcolo in Europa: per citare Levey, Savasorda «*was the true pioneer of mathematical science in Europe*».

All'inizio del XII secolo coincisero, di fatto, la fine dell'età d'oro della scienza islamica e la ripresa dell'interesse scientifico in Occidente. Infatti, nei primissimi anni del secolo, l'Europa conobbe un periodo di crisi e di ripensamento della cultura e della scienza antica e altomedievale, cui diedero un apporto anche Savasorda e in genere la cultura ebraica, come intermediari non passivi tra il mondo islamico e quello cristiano: rilevanti in questo contributo sono la familiarità con la matematica pratica araba e, contemporaneamente, l'assenza di debiti verso quella greca.

7.7. ABACISTI E ALGORISTI

Per secoli dalla sua introduzione in Europa, il sistema di numerazione posizionale in base 10 conobbe forti ostilità (Stone, 1972; Reynolds, 1993): i fautori di questo metodo si chiamarono algoristi o algoritmisti, mentre i tradizionalisti, estimatori dell'abaco, furono chiamati, appunto, abacisti.

La contesa esplose proprio a causa della grande facilità e rapidità con cui i primi erano in grado di eseguire calcoli: se era sufficiente aggiungere o togliere una cifra a destra per cambiare l'ordine di grandezza di un numero, le frodi diventavano molto più agevoli; se era tanto facile eseguire i calcoli, essi sarebbero stati meno accurati.

La controversia sarebbe culminata a Firenze (quasi cento anni dopo il *Liber Abaci* di Fibonacci) con l'emanazione dello Statuto dell'Arte del Cambio del 1299 con cui le autorità vietarono di utilizzare i numeri arabi per tenere la contabilità, imponendo che i numeri fossero scritti con i tradizionali numerali romani (Camerani Marri, 1955; Strujk, 1968). A queste preoccupazioni di tipo fiscale-amministrativo per i commercianti e i maestri d'abaco che li istruivano, si aggiungevano quelle di ordine morale (Nagl, 1890): il predicatore domenicano **Giordano da Rivalto** o **da Pisa** (1260-1310) andava ripetendo nelle sue omelie in Santa Maria Novella che i mercanti passavano il proprio tempo dedicandosi esclusivamente al calcolo, trascurando così i propri doveri cristiani; nel XIII secolo conosce un certo successo la paronomasia satirica anonima *aritmetica/aerismetica* (scienza dei numeri/scienza del denaro). In Francia il predicatore domenicano **Guillaume Peyraut** (1200-1271) nella sua *Summa de Vitiis et Virtutibus* (1236-1250) paragona i gettoni degli abacisti a monete d'argento, per enfatizzare la finalità meramente lucrativa del calcolo (Murray, 1978).

Nel 1508 **Gregor Reisch** (1467-1525) pubblicò un testo in 12 libri illustrato con numerose incisioni, dal titolo *Margarita philosophica*, un'enciclopedia del sapere medievale, concepita come libro di testo per giovani studenti; essa contiene grammatica, dialettica, retorica, aritmetica, musica, geometria, astronomia, fisica, storia naturale, fisiologia, psicologia ed etica. La forma è quella del dialogo fra studente e docente. Prima del quarto capitolo, *De quadrivii rudimentis*, appare la presentazione dei metodi e dei problemi dell'aritmetica (*typus arithmeticae*) attraverso un'illustrazione allegorica: in primo piano figurano, a sinistra, l'algorista (!) Boezio, cui si attribuiva l'invenzione dei numerali indo-arabici, mentre indica le cifre (*ghubar*) relative ai calcoli che ha appena svolto con grande rapidità (ha già posato lo stilo sul tavolo) e facilità (sorride compiaciuto); sulla destra, l'abacista Pitagora (inventore dell'abaco, secondo una credenza medievale), che, con un'espressione molto meno rilassata, sta ancora muovendo i gettoni dell'abaco; sullo sfondo, infine, l'allegoria dell'Aritmetica, che regge un libro in ciascuna mano: i nomi degli autori/contabili (Boezio e Pitagora) sono indicati dai cartigli sottostanti. Sull'abito Aritmetica sfoggia un ricamo raffigurante due successioni: le prime potenze di due (1-2-4-8) e di tre (1-3-9-27), sempre in numerali *ghubar*.

8.

LEONARDO FIBONACCI DA PISA

8.1. IL MEDITERRANEO TRA XII E XIII SECOLO

8.1.1. La fine del XII secolo e la crisi dell'impero musulmano

Nel corso del XII secolo, il mar Mediterraneo era, anche se solo parzialmente, tornato al centro dell'economia e delle relazioni internazionali; per la sua posizione si trovava a collegare tre realtà culturalmente e linguisticamente dissimili: il mondo cristiano occidentale, di lingua latina, quello orientale, di espressione greca, e quello islamico, arabofono (Tangheroni, 2002).

Dopo quasi due secoli di lotte, crociate e guerre e lo stravolgimento dell'assetto politico, a dominare il *mare nostrum* erano **Pisa** e **Genova**, che avevano partecipato alla riconquista della zona occidentale del Mediterraneo, insediando alcune postazioni commerciali nei porti e nei mercati del Nord Africa (Naldini, 1939); le due città marinare erano ormai troppo impegnate nella rivalità reciproca (militare e commerciale, a suon di tentativi di monopolio su alcuni mercati) e nel contenimento della pirateria, per poter impiegare risorse in guerre esterne (Abulafia, 1996).

Il Sud della **Francia**, soprattutto la **Linguadoca** e la **Provenza**, e le coste francesi erano in piena crescita economica e culturale; anche la **Catalogna** e l'**Aragona** si avviavano ad un'espansione commerciale. I Musulmani tentavano di resistere alla *Reconquista* spagnola, ma riuscì loro di organizzarsi meglio nell'ambito del Maghreb, cui diedero unità sotto la dinastia degli Almohadi (secc. XII-XIII).

La **Sicilia** normanna, pur conservando un ruolo chiave per la sua posizione strategica nel Mediterraneo, andò incontro ad un periodo di disordini, che ne depresso l'economia.

In Oriente, **Bisanzio** aveva perso il dominio sull'Asia minore, su cui conservava tuttavia, soprattutto intorno alla capitale, contatti mercantili e marittimi,

amministrati quasi monopolisticamente dai Veneziani. Per limitare questa egemonia ed ottenere preziose alleanze antinormanne, gli imperatori d'Oriente concessero anche a Pisa e Genova di fissare insediamenti e tessere reti commerciali. Questo non fu sufficiente a mitigare l'ostilità che l'opinione pubblica nutrivava nei confronti dei *Latini*, contro i quali scoppiarono numerosi tumulti e rivolte.

Il regno crociato di **Gerusalemme** e gli altri stati franchi sul litorale siriano-palestinese erano oggetto di una duplice stretta: sia da parte dei Turchi selgiuchidi sia da parte dell'Egitto fatimita. L'Egitto, con la grande città di Alessandria e con la prosperosa capitale, era una tappa fondamentale delle grandi vie commerciali.

La riconquista di Gerusalemme da parte del **Saladino** (1187) ebbe un'eco formidabile in Occidente, che scatenò una vera e propria corsa alla crociata, coinvolgendo i tre più importanti sovrani: l'imperatore di Germania **Federico I Barbarossa**, il re d'Inghilterra **Riccardo Cuor di Leone** e il re di Francia **Filippo Augusto**. Nonostante le risorse impiegate e la vastità dell'arruolamento, gli esiti non furono conformi alle aspettative: come è noto, Barbarossa morì prima di giungere in Terrasanta e la terra riconquistata si limitò ad Acri e ad una sottile striscia costiera. Ad avvantaggiarsi furono invece le città marinare, che, svolgendo un ruolo logistico determinante, si assicuravano in queste zone privilegi ancor più cospicui. La **quarta crociata** ebbe uno svolgimento ed un esito pesantemente condizionati dalle mire espansionistiche di Venezia, che la deviò dall'obiettivo di conquistare Gerusalemme e il Santo Sepolcro e la indirizzò verso altre mete, come Zara, espugnata nel 1202, e Costantinopoli (1204), dove fu creato un impero favorevole alla Serenissima, durato fino al 1261. Fallirono anche la **sesta crociata** (1217-1221), la **settima** (1248-1254) e l'**ottava** (1270), le ultime due tentate dal re di Francia Luigi IX. Alla fine del XIII secolo, la caduta di Acri avrebbe segnato la definitiva scomparsa di regni cristiani in Terrasanta.

Se l'impero islamico riusciva a contrastare efficacemente i deboli e distratti attacchi occidentali in Terrasanta, non avveniva lo stesso né sul fronte orientale, per l'incalzare dei Mongoli, né in Europa, dove la *Reconquista* spagnola stava segnando importanti successi.

8.1.2. Pisa e Genova nel Mediterraneo

Il ruolo delle città marinare fu dunque centrale nella storia del Mediterraneo di quei secoli. Esse tenevano vivo il legame tra il mondo cristiano, di lingua latina, da un lato, e quello islamico, di idioma arabo, dall'altro (Lévy, 2000).

Pisa era l'interlocutore favorito per il mondo arabo. Lo studio degli archivi documentali pisani (Tangheroni, 2002) ha permesso di ricostruire la fitta rete di trattati o anche solo di scambi epistolari (parte in latino e parte in arabo) intercorsi fra autorità pisane e arabe: accordi commerciali, trattative per il rilascio

di prigionieri anche illustri o di beni, in seguito ad atti di pirateria reciproca. La presenza pisana nel Nord Africa, specialmente a Tunisi e a Béjaia, ma anche in Marocco, ad Alessandria ed al Cairo, rimase cospicua per tutto il XIII secolo, nonostante la sconfitta alla Meloria (1284) ad opera dei Genovesi; su quelle piazze, avveniva persino che i mercanti fiorentini si dichiarassero pisani per godere dello stesso trattamento favorevole. In Terrasanta, i privilegi già ottenuti a Giaffa, Tiro e Acri nel 1118, crebbero dopo la caduta di Acri: dimostrazione ne è l'ampliamento del quartiere pisano della città dopo la guerra combattuta vittoriosamente contro i Genovesi. Importante doveva essere anche il quartiere pisano a Costantinopoli (Otten-Froux, 1987).

La complementarità del ruolo di **Genova** sullo scacchiere mediterraneo nella stessa epoca è ben tratteggiata dalla Montesano (Montesano, 2003): la studiosa ricorda come le due città siano state «concorrenti, simili per le prospettive di espansione verso cui la vocazione marinara e la posizione geografica le spingeva, diverse non solo negli esiti politici della concorrenza (favorevole a Genova), ma anche negli esiti culturali». La Superba riallacciò i rapporti con l'Oriente dal 1261 e nel decennio successivo aprì la rotta verso le Fiandre, ma, proprio come Pisa, rimase attiva nel Mediterraneo occidentale, con attività commerciali che la legavano alla Sicilia, alla Spagna ed al Maghreb.

8.1.3. *Béjaia, XII secolo*

La più antica descrizione della città di **Béjaia** (Bugia) ci è fornita da un geografo di corte di Ruggero II di Sicilia, **al-Idrisi** (1099-1165), che la ritrae come un animato centro commerciale, crocevia di scambi fra Oriente ed Occidente del Maghreb, oltre che col Sahara¹.

La città (Aissani, 1993; Aissani e Valerian, 2002) fu fondata nel Maghreb centrale nel 1067 in una posizione strategica, collegata all'entroterra da una valle lungo la quale passavano le carovane transahariane. All'arrivo della corte hammadita (fine XI-inizio XII secolo), furono apportati profondi cambiamenti: il porto venne potenziato e dotato di nuove infrastrutture, che resero la città uno dei punti focali della regione sotto il profilo politico, economico, culturale e religioso; nemmeno la perdita dell'indipendenza politica dal 1152 ne ridusse l'influenza: divenuta sede di un governatorato ammohade e di una cospicua comunità andalusia, venne inserita nella realtà politica che andava dall'Anda-

¹ *Ai nostri giorni, Béjaia appartiene al Maghreb centrale. È la capitale dei Bar Ham-mad. Le navi vi attraccano, le carovane vi si incontrano, le merci vi arrivano per terra e per mare [...]. I mercanti della città sono in contatto con quelli del Maghreb occidentale ed anche con quelli del Sahara e d'Oriente* (Bresc e Nef, 1999).

lusia all'**Ifriqiya** (corrispondente all'attuale Tunisia), lungo il principale asse commerciale e viario dell'impero, e divenne un polo di scienza e di studi, soprattutto matematici.

Il quartiere del porto ospitava viaggiatori in larga misura di origine italiana: i trattati commerciali documentano la presenza di mercanti non solo provenienti da Pisa, Genova e Venezia, ma forse anche dalla Sicilia e dall'Italia meridionale, attratti dalle favorevoli condizioni doganali (Middleton, 2005). Nella seconda metà del XII secolo si assistette ad un vero e proprio *boom* dei traffici con il Nord del Mediterraneo, che continuò con successo fino ai primi decenni del secolo successivo, grazie alla stabilità politica interna e alla crescita economica europea: gli scambi riguardavano prodotti tessili (lino, cotone e lana), pellami, candele.

Il controllo doganale sulle attività mercantili era molto scrupoloso, soprattutto a fini fiscali; le operazioni di compravendita esigevano grande esperienza e competenza nelle conversioni fra i vari sistemi di pesi, misure, valute, tecniche commerciali, che spesso richiedevano più passaggi, codificati in seguito in manuali, come il *Libro di divisamenti di paesi e di misuri di mercatanzie e daltre cose bisognevoli di sapere a mercatanti*, meglio noto col titolo di *Pratica della Mercatura* di **Francesco di Balduccio Pegolotti** (Evans, 1936; Saporì, 1972), scritto intorno al 1340.

Béjaia, grazie agli stimoli intellettuali ed economici, avrebbe poi raggiunto un elevato livello culturale e scientifico (Djebbar, 1996), soprattutto nell'ambito matematico, godendo anche della presenza di un valido studioso e docente come **al-Qurashi** (1204-1282), che semplificò e sintetizzò l'opera algebrica di **Abu Kamil** (v. 3.7.), appresa alle scuole di Siviglia.

8.2. LA VITA E GLI SCRITTI

Leonardo Fibonacci nacque a Pisa nel 1170 circa, nel pieno della vitalità commerciale e culturale che caratterizzò la città nel Basso Medioevo. Ancora bambino, accompagnò il padre, **Guglielmo dei Bonacci**, proprio a Béjaia, dove l'agiato mercante ricopriva l'incarico di *publicus scriba pro Pisanis mercatoribus*: l'intento di Guglielmo era indubbiamente quello di completare l'istruzione e l'educazione del ragazzo, dal momento che proprio nella città algerina il giovanissimo Leonardo avrebbe potuto avere i primissimi contatti con una realtà mercantile e con tecniche di calcolo ancora ignorate in Occidente. Verosimilmente Fibonacci, come i suoi coetanei, aveva già frequentato una scuola d'abaco nella natia Pisa (Pirenne, 1929; Lieber, 1968; Airal di, 1997; Saporì, 1997).

Nel *Liber Abaci*, l'autore stesso sintetizza così i suoi primi anni di studio (Boncompagni, 1857a; Grimm, 1973): «Quando mio padre, nominato segretario

pubblico, sovrintendeva presso la dogana di Bugia agli affari dei mercanti pisani che vi passavano, mi fece venire presso di sé, mentre ero ancora bambino, poiché ne aveva visti l'utile ed il vantaggio futuri, e là volle che io frequentassi per un po' di tempo la scuola d'abaco e fossi istruito. Quando, introdotto a quella tecnica per mezzo delle nove figure degli Indiani grazie ad un insegnamento straordinario, apprezzai la conoscenza di quell'arte tanto più del resto e imparai da tutti coloro che la studiavano nei suoi vari metodi in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza (tutti mercati che poi visitai), appresi con molta passione anche dalle dispute. Ma pensai che tutto questo, sia il calcolo sia gli archi di Pitagora [=l'abaco], fosse quasi un errore se confrontato con le tecniche indiane. Perciò adottando più rigorosamente il modo [di calcolare] degli Indiani, e dedicandomi più attentamente ad esso, aggiungendo qualcosa di mia ispirazione, e apponendovi anche alcune delle acute tecniche dell'arte geometrica di Euclide, ho lavorato a comporre la summa presentata in questo libro quanto più chiaramente ho potuto, distinta in 15 capitoli, dimostrando con prove certe quasi tutto quanto ho inserito, per istruire coloro che desiderano apprendere meglio questa scienza, nel modo più completo possibile, e perché la gente latina tra gli altri non ne sia trovata sprovvista, come è stato finora.»²

A Béjaia dunque Fibonacci apprese l'uso della notazione posizionale, l'origine indiana di tale sistema e le regole aritmetiche di calcolo e ne concluse la superiorità rispetto a quanto appreso in precedenza. Per approfondire ed estendere ulteriormente le sue conoscenze, Fibonacci viaggiò in altri paesi del Mediterraneo, dove poté non solo frequentare altre scuole, ma anche discutere con maestri locali egiziani, siriani, bizantini, siciliani e provenzali: intorno al 1200, la sua presenza è attestata a Bisanzio, dove svolgeva la mansione di interprete per l'avamposto commerciale pisano e dove avrebbe potuto conoscere i matematici locali. Al termine dei suoi viaggi, Fibonacci, rielaborando la tradizione indo-arabica con le conoscenze personali e gli insegnamenti di Euclide, scrisse i

² *Cum genitor meus a patria publicus scribe in duana Bugee pro pisanis mercatoribus ad eam confluentibus constitutus preesset, me in pueritia mea ad se venire faciens, inspecta utilitate et commoditate futura, ibi me studio abbaci per aliquot dies stare voluit et doceri. Ubi ex mirabili magisterio in arte per novem figuras Indorum introductus, scientia artis in tantum mihi pre ceteris placuit, et intellexi ad illam, quod quicquid studebatur ex ea apud Egyptum, Syriam, Greciam, Siciliam et Provinciam cum suis variis modis, ad que loca negotiationis tam postea peragravi per multum studium et disputationis didici conflictum. Sed hoc totum etiam et algorismum atque arcus Pictagore quasi errorem computavi respectu modi Indorum. Quare amplectens strictius ipsum modum Indorum, et attentius studens in eo, ex proprio sensu quedam addens, et quedam etiam ex subtilitatibus Euclidis geometrice artis apponens, summam huius libri, quam intelligibilius potui, in XV capitulis distinctam componere laboravi, fere omnia que inserui, certa probatione ostendens, ut extra, perfectio pre ceteris modo, hanc scientiam appetentes instruantur, et gens latina de cetero, sicut hactenus, absque illa minime inveniatur.*

15 capitoli del *Liber Abaci*, il cui scopo era di istruire i desiderosi di apprendere questa disciplina e fare in modo che la *gens Latina* non ne restasse più all'oscuro. L'opera fu pubblicata la prima volta nel 1202 e la seconda nel 1228. La fama da lui ottenuta gli valse anche l'accesso alla corte imperiale di Federico II e la sua abilità gli fece elargire dall'imperatore una rendita vitalizia, perché potesse dedicarsi liberamente agli studi.

A lui si devono con sicurezza ³, oltre al *Liber Abaci*, la *Practica geometriae* (dedicata a Domenico Ispano), il *Liber quadratorum* (dedicato a Federico II), l'*Epistula ad magistrum Theodorum* (l'astrologo di corte di Federico II, ormai unanimemente considerata la dedica del *Liber Abaci* nell'edizione del 1228), il *Flos super solutionibus quarundam questionum ad numerum vel ad geometriam vel ad utrumque pertinentium* (dopo il 1226 – dedicato al cardinale **Ranieri Capocci**), che contiene la sintesi delle questioni postegli dal matematico della corte federiciana Giovanni da Palermo, durante una visita a Pisa. Nel 1241 anche il Comune di Pisa si fa suo mecenate, deliberando ⁴ di assegnargli un onorario annuale di venti lire per la sua attività di consulenza agli ufficiali comunali (Franci, 2002). Null'altro si sa dell'ultima parte dell'esistenza di Fibonacci fino alla morte, intorno al 1250 (Gies e Gies, 1969).

8.2.1. Il *Liber Abaci* (1202 – 1228)

L'opera è interessante fin dal titolo: come si vede, la parola abaco ha perso gradualmente, ma inesorabilmente il suo significato di strumento di calcolo per assumere quello di «aritmetica basata sull'uso delle figure indiane» ⁵. Va precisato tuttavia che Fibonacci si riferisce a questo testo parlando di *Liber numerorum*, *Liber de numero*, *Liber maior de numero* e mai *Abaci*. È significativo notare che, anche se i numerali indiani sono in realtà già presenti in Occidente da almeno

³ La Franci (Franci, 2002) riferisce che in un manoscritto del XV secolo (Firenze, Biblioteca Nazionale, Palatino 573, 433v) sono citati altri due trattati attribuiti a Leonardo: *Libro di merbaanti detto di minor guisa*, forse una versione ridotta del *Liber Abaci*, e il *Libro sopra il 10° di Euclide*, probabilmente confluito nella redazione definitiva del *Liber Abaci*.

⁴ *Considerantes nostre civitatis et civium honorem atque profectum, qui eis, tam per doctrinam quam per sedula obsequia discreti et sapientis viri magistri Leonardi Bigolli, in abbacandis estimationibus et rationibus civitatis eiusque officialium et aliis quoties expedit, conferunt; ut eidem Leonardo, merito dilectionis et gratie, atque scientie sue prerogativa, in recompensationem laboris sui quem substinet in audiendis et consolidandis estimationibus et rationibus supradictis, a Comuni et camerariis publicis, de Comuni et pro Comuni, mercede sive salario suo, annis singulis, libre xx denariorum et amisceria consueta dari debeant (ipseque pisano Comuni et eius officialibus in abbacatione de cetero more solito serviat), presenti constitutione firmamus.* (Bonaini, 1857).

⁵ Secondo la Franci (Franci, 2002), quando Boyer (Boyer, 1968) afferma che si tratta di un titolo errato, dimostra di non conoscere questa più ampia accezione del vocabolo.

due secoli, grazie all'opera di Gerberto d'Aurillac e più recentemente grazie alle traduzioni dell'*al-hindi* di al-Khawarizmi (rimaste però patrimonio di pochi), le potenzialità del loro impiego non sono ancora state esplorate a fondo: il *Liber Abaci* svolgerà questo compito, suscitando l'interesse di un più vasto pubblico, nonostante l'uso del latino. Fibonacci infatti con la sua opera risponde ad un'esigenza sentita e diffusa del mondo mercantile italiano ed europeo, il che determina il successo del *Liber* nelle scuole d'abaco italiane, dove gli studenti apprendono e trasmettono la teoria algebrica, accanto alle soluzioni pratiche di problemi professionali quotidiani (Franci, 2002).

Fibonacci continua a ritoccare l'opera anche dopo il 1202, data della prima pubblicazione, fino al 1228, quando ne dà una seconda edizione con rimaneggiamenti, pubblicata per la prima volta da Boncompagni (Boncompagni, 1857a); il *Liber* viene tradotto in inglese da Siegler (Sigler, 2002) e confrontato nelle sue due edizioni da Allard (Allard, 2002).

Il piano dell'opera ⁶ è il seguente:

1. Presentazione delle nove figure indiane e di come con esse si possa scrivere ogni numero; quali numeri e come si debbano tenere [a memoria] sulle mani e introduzione all'abaco.
2. Moltiplicazione di interi.
3. Addizione reciproca di interi.
4. Sottrazione con minuendo maggiore del sottraendo.
5. Divisione di interi.

6

1. *De cognitione novem figurarum yndorum, et qualiter cum eis omnis numerus scribatur; et qui numeri, et qualiter retineri debeant in manibus, et de introductionibus abbaci.*
2. *De multiplicatione integrorum numerorum.*
3. *De additione ipsorum ad invicem.*
4. *De extractione minorum numerorum ex maioribus.*
5. *De divisione integrarum numerorum per integros.*
6. *De multiplicatione integrarum numerorum cum ruptis atque ruptorum sine sanis.*
7. *De additione ac extractione et divisione numerorum integrarum cum ruptis atque partium numerorum in singulis partibus reductione.*
8. *De emptione et venditione rerum venalium et similium.*
9. *De baractis rerum venalium et de emptione bolsonalie, et quibusdam regulis similibus.*
10. *De societatibus factis inter consocios.*
11. *De consolamine monetarum atque eorum regulis, que ad consolamen pertinent.*
12. *De solutionibus multarum positarum questionum quas erraticas appellamus.*
13. *De regula elcataym qualiter per ipsam fere omnes erratice questiones solvantur.*
14. *De reperiendis radicibus quadratis et cubitis ex multiplicatione et divisione seu extractione earum in se, et de tractatu binomiorum et recisorum et eorum radicum.*
15. *De regulis proportionibus geometrie pertinentibus: de questionibus aliebre et almuchabale.*

6. Moltiplicazione di interi e frazioni e di frazioni.
7. Addizione, sottrazione e divisione di interi con frazioni e riduzione di parti di numeri in singole parti.
8. Compravendita di oggetti.
9. Baratti e vendite di monete e simili.
10. Accordi fra consoci.
11. Leghe di monete (*consolamen* ⁷) e loro regole sulle percentuali di metalli.
12. Soluzioni di molti problemi, che definiamo miscellanei.
13. Regola della doppia falsa posizione: come si risolvano grazie ad essa quasi tutti i problemi miscellanei.
14. Calcolo di radici quadrate e cubiche da moltiplicazioni e divisioni o estrazioni delle stesse; trattato dei binomi e dei recisi e delle loro radici.
15. Regole attinenti alle proporzioni geometriche: questioni di algebra e almuca-bala.

Il primo capitolo è dedicato alla presentazione dei numerali: «*Le nove figure degli Indiani sono queste: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Dunque con queste nove figure, e con il simbolo 0, che in arabo si chiama zefiro, si scrive qualsiasi numero* ⁸»; alla descrizione della notazione posizionale ed al confronto con quella latina, con cui Fibonacci dimostra i vantaggi della prima sulla seconda (Burnett, 2003).

Consapevole delle difficoltà dei suoi lettori, Fibonacci insegna anche come si leggono i numeri così rappresentati ed introduce l'uso di apici e pedici per favorire il riconoscimento dell'ordine di grandezza nel caso di numeri molto lunghi.

Suggerisce anzi una regola di lettura (a suo dire) molto semplice attraverso un esempio: «*Prendiamo un numero di 15 cifre 678935784105296, tralasciate le prime tre* ⁹, *ossia 296, sopra qualsiasi altre tre, disegna una virgola a mo' di arco, [...] le tre figure prima omesse si leggono come sono. Così leggerai seicento-settantotto migliaia di migliaia di migliaia di migliaia (ci sono quattro virgole) e novecentotrentacinque migliaia di migliaia di migliaia (ci sono tre virgole) e settecentottantaquattro migliaia di migliaia [...] e centocinquemila e duecento-novantasei*».

Segue un ripasso delle regole di calcolo digitale e la presentazione della tecnica di memorizzazione dei calcoli sulle dita.

I capitoli successivi, da 2 a 5, sono destinati alla trattazione delle operazioni aritmetiche fondamentali con gli interi positivi (moltiplicazione, addizione,

⁷ Lega di metalli.

⁸ *Novem figure indorum be sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Cum bis itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirim appellatur, scribitur quilibet numerus.*

⁹ Le prime tre procedendo da destra, secondo l'uso arabo; anche le frazioni improprie non apparenti sono indicate come interi preceduti dalla frazione.

sottrazione, divisione ¹⁰), con verifica dei risultati attraverso le prove del 9, del 7 e dell'11; ai criteri di divisibilità per i numeri primi da 2 a 13; alle tavole di resti delle divisioni per gli stessi divisori con minuziosissimi esempi tratti da casi pratici e riferiti a cambi valutari con le monete all'epoca più diffuse (lire, soldi e denari). I capitoli 6 e 7 trattano delle frazioni, eccezion fatta per la *Tabula disgregationis*, che contiene frazioni a denominatore 6, 8, 12, 20, 24 e 100 scomposte in somme di frazioni unitarie, secondo l'abitudine egizia, che Fibonacci scrive nella forma denominata in seguito pratica italiana (*fractiones in gradibus*). Ad esempio,

$$\frac{6}{12} + \frac{5}{96} + \frac{1}{288} = \frac{6 + \frac{5 + \frac{1}{3}}{8}}{12}$$

I capitoli da 8 a 11 sono dedicati all'aritmetica mercantile ed a questioni di alligazione; nel 12, il più esteso di tutta l'opera, si risolvono *questiones erraticae*, ossia problemi di progressione, di proporzione (tra i quali ci sono il famoso problema della torre con due serpenti, risolto per falsa posizione, e vari problemi di ritrovamento di borse ¹¹), problemi di analisi indeterminata sul numero minimo di acquirenti con vincoli di *budget* (*secundum datam proportionem*), ossia di scomposizione in parti costituenti una progressione geometrica, oppure in parti proporzionali a numeri dati, tutti problemi denominati da Vogel (Vogel, 1940) dell'*uno solo può comprare*; calcolo dei numeri perfetti, calcolo del *de duplicatione scacherii* (un vero e proprio pezzo di bravura sul numero di chicchi di grano richiesto dall'inventore della scacchiera: Fibonacci si ferma a 340282366920938463374607431768211456, aggiungendo *et sic multiplicando possumus procedere in infinitum*). Qui è inoltre risolto il famoso problema dei conigli, a partire dal quale viene presentata la serie oggi detta di Fibonacci (Bagni, 2001a) e compaiono alcuni esempi di matematica divertente, come indovinare un numero pensato da altri o il punteggio ottenuto con un lancio di dadi.

Nel capitolo 13, Fibonacci si occupa della doppia falsa posizione (*elkatayn*) o doppio errore, uno dei procedimenti più efficaci dell'aritmetica araba e medievale, corredando la spiegazione di una batteria di problemi sulle paghe di operai, divenuti in seguito classici, dai quali Fibonacci mostra di saper affrontare la risoluzione

¹⁰ Trattata con particolare attenzione, dal momento che è l'operazione più difficile da eseguire, anche con l'abaco: l'argomento è tra l'altro del tutto nuovo per i suoi lettori. Si noti inoltre l'assenza delle operazioni di dimezzamento e raddoppiamento, diversamente dagli *Algorismi*.

¹¹ Un esempio di questa tipologia di problemi è già in Alcuino, Propositio XLVI (*De sacculo ab homine invento*).

dei problemi più difficili, che esigono l'applicazione iterativa della tecnica, limitando però le soluzioni a $\mathbb{Z}$ e scegliendo, nel caso di più soluzioni, quella minima.

Il capitolo 14, ricavato dal II libro degli *Elementi* di Euclide, riguarda le radici quadrate e cubiche, ma contiene già riferimenti all'algebra, dal momento che sottolinea come le questioni di questa disciplina siano riconducibili alle proposizioni 5 e 6 degli *Elementi*.

Il capitolo 15 infine, trascritto da Libri (Libri, 1838), è diviso in tre parti:

1. Proporzioni di tre o quattro quantità, alle quali si riconducono le soluzioni di molti problemi attinenti alla geometria (*de proportionem trium et quatuor quantitatum, ad quas multe questionum geometrie pertinentium solutiones reddiguntur*): Fibonacci si limita al campo dei numeri interi.
2. Soluzione di alcuni problemi geometrici (*de solutione quarundam questionum geometricalium*); è la parte meno ricca, dal momento che tratta solo alcuni problemi particolari, tra i quali la progressione geometrica che coinvolge però anche i problemi di interessi, fondamentali per i mercanti.
3. Soluzione di alcuni problemi di algebra (*de solutione quarundam questionum super modum algebre et almuchabale*), dedicato alla risoluzione di problemi per via algebrica.

Seguendo la tassonomia delle equazioni e la nomenclatura (*census, res o radix, numerus simplex*, cui egli aggiungerà *cubus, census census, census census census o cubus cubi e census census census*) di al-Khawarizmi nella versione latina di Gerardo da Cremona (Miura, 1981), Fibonacci presenta prima, in un'introduzione teorica (*scientia*), l'arte dell'algebra come tecnica (*ars*) risolutiva di equazioni di primo e di secondo grado e la esemplifica poi, nella seconda parte, attraverso l'applicazione a una batteria di quasi 100 problemi ¹².

Sempre secondo il modello, Fibonacci presenta verbalmente gli algoritmi risolutivi per i tre casi composti ¹³, dal momento che quelli semplici sono di immediata soluzione: i passaggi sono gli stessi indicati dall'algebrista arabo. Anche Fibonacci evidenzia sia la condizione di esistenza di radici reali dell'equazione del quinto caso, sia il fatto che l'equazione ha due radici positive. Di ciascuna soluzione fornisce la dimostrazione geometrica, ricavandola dagli *Elementi* di Euclide.

¹² I metodi algebrici sono presentati in diversi punti dell'opera, senza tuttavia una discussione sistematica, fino a questo punto; questo modo di procedere irregolare e apparentemente privo di progettualità è stato indicato da Gamba (Gamba, 2006) come *manca di autoconsistenza*: esso sarebbe dipeso, secondo l'autore, dal fatto che la letteratura d'abaco in genere non sarebbe stata prodotta per una fruizione indipendente dalla formazione in presenza e questo aspetto sarebbe una prova del prevalere della componente orale dell'insegnamento.

¹³ Viene invertito l'ordine dei casi 5 e 6, rispetto all'originale arabo (Rosen, 1831), (Rashed, 2007).

Dopo la parte introduttiva, nel capitolo 15 vengono presentati ben 96 problemi (sintetizzati nell'appendice 4), nella tradizione di al-Khawarizmi (alcuni anche identici) o di altri matematici arabi suoi seguaci, come **Abu Kamīl** (v. 3.7.) o **al-Karajī** (953-1029); si hanno problemi del 10 (v. 3.4.6.) e problemi di algebra geometrica, come sarà anche nell'opera di Giordano Nemorario (v. 9.3.). Il ricorso alla geometria diventa una vera e propria necessità nel caso di coefficienti irrazionali: Fibonacci conosce il calcolo radicale, ma gli preme introdurre gradualmente il neofita a questo tipo di operazioni ed evita così di ricondurre le equazioni a coefficienti irrazionali ai casi canonici, discutendole invece attraverso una soluzione geometrica. Diversamente dal suo predecessore arabo, Fibonacci ricorre anche a variabili ausiliarie, per le quali ammette come soluzione anche 0, fatto del tutto inusuale (Giusti, 2002; Sigler, 2002) e comunque circoscritto.

È curioso notare inoltre come nel *Liber Abaci* siano presenti due esempi di problema dei resti risolti con una tecnica che era stata scoperta in Cina verso il III secolo¹⁴ e sarebbe stata consolidata nel 1247 dal matematico **Ch'in Chiu-Shao** con il nome di regola *Ta-yen*. I quesiti, formulati con simbologia moderna, sono i seguenti:

- trovare N tale che $N \equiv 2 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{7}$
- trovare N tale che $N \equiv 1 \pmod{2} \equiv 1 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{4} \equiv 1 \pmod{5} \equiv 0 \pmod{7}$.

Il secondo problema è entrato nella tradizione di aritmetica mercantile, dal momento che, in versione arricchita di dettagli di contesto, è presente anche nel *Tripartitum* di **Chuquet** (v. 10.2.2.).

8.2.2. Le fonti del *Liber Abaci*

La trattazione di questo tema sembra fortemente scontata, dichiarata, com'è, dall'autore stesso la dipendenza dalle fonti arabe (Rashed, 1996, 2003). Tuttavia mette conto di aggiungere alcune osservazioni anche alla luce di studi recenti, rifioriti in occasione del ottavo centenario dell'opera.

Alcuni studiosi (Hughes, 1996; Giusti, 2002) sono dell'avviso che l'opera di Fibonacci ignori deliberatamente tutta l'evoluzione dell'algebra e dell'aritmetica arabe dei secoli più recenti (come **Omar Kayyam** o **al-Karajī**¹⁵) e si riallacci

¹⁴ Nello **Sunzi Suan Jing** è presentato il seguente problema: *Abbiamo un numero imprecisato di oggetti, ma sappiamo che, se lo dividiamo per 3, ne avanzano 2; per 5, ne avanzano 3; per 7, ne avanzano 2. Quanti sono?* (Martzloff, 1987). Saïdan (Saïdan, 1997), a questo proposito, fa notare che un problema analogo è già presente nell'*Aritmetica* di Nicomaco di Gerasa (I sec.) e compare anche nel *Brahmasphutasiddhanta* di Brahmagupta (VII sec.) e nell'*al-Hikmal* di al-Maitham (X-XI sec.).

¹⁵ La Hunger Parshall (Hunger Parshall, 1988) è di diversa opinione e ritiene che Leonardo conoscesse l'opera di al-Karajī; La Franci (Franci, 2002) fa notare che, dei 96 problemi risolti nel *Liber Abaci*, alcuni sono certamente derivati dall'opera di al-Karajī; Maracchia evidenzia che Leonardo non conosce l'opera al-Kayyam (Maracchia, 2005).

immediatamente ad una tradizione più antica, quella del IX e del X secolo, ossia di al-Khawarizmi ed Abu Kamil. Egli, del resto, trascura anche tutta la matematica quadriviale (Høyrup, 1996), mentre, va ricordato, esistono sottili ma evidenti legami con la precedente tradizione di matematica divertente (v. 1.5.): il problema dell'acquisto di x oggetti (in genere, animali) di 3 o 4 tipologie e prezzo con x denari, già presente in più versioni e varianti nelle *Propositiones* di Alcuino (V, XXXII, XXXIII, XXXIV, XXXVIII, XXXVIII, XLVII, LIII) e nell'opera di Abu Kamil (6 esempi), ritorna frequentemente sia nei problemi di alligazione, con soluzioni non intere, sia alla fine del cap. 11 in più versioni legate a variazioni di prezzo dei singoli animali o al numero di specie acquistabili (3 specie: pernici, passeri e piccioni; oppure 4: anche le tortore oltre ai precedenti ¹⁶), sempre con il vincolo dell'identità fra l'ammontare del *budget* e il numero di esemplari acquistati.

Altri storici (Cuomo, 2004) evidenziano innanzitutto le suggestioni del mondo mercantile internazionale del XIII secolo, che permeano tutta l'opera; leggere il *Liber Abaci* di Fibonacci è un po' come addentrarsi in un mercato medievale: si parla del commercio di pepe, stoffe, pellami, formaggi di differenti qualità, zafferano, noce moscata, zucchero, maiali, conigli, uccelli, allume, cannella, falso argento (lega di argento e stagno), cambi tra varie valute (marabotini/massamutini, bisanti, lire ¹⁷) e conversioni metrologiche fra unità tipiche di Pisa, Provenza, Palermo, Messina, Cipro, Siria, Alessandria, Genova, Torino, Firenze, Barcellona, Padova, Bologna, Venezia, Taranto e della terra dei Berberi, senza dimenticare di passare dalla dogana, con i suoi dazi sulle transazioni, né dalla banca, dove si conteggiano gli interessi. I lavoratori salariati con le loro trattenute per malattia, i soldati che attendono il giorno di paga fissato dal re ed una venditrice di frutta completano il quadro mercantile. Oltre a questo c'è il mondo della corte; la Cuomo fa notare che alcuni problemi hanno un'ambientazione suggestiva: giochi di società (indovinare un numero o trovare chi ha nascosto un anello), quiz inseriti in situazioni da favola (calcolare il numero di giorni necessario perché un leone esca da una buca o un cane raggiunga una volpe ¹⁸ o due serpenti si incontrino sulla scala di una torre) o storie esotiche di mercanti che trasportano pietre preziose a Costantinopoli e di *borti conclusi* in un'atmosfera da *Le mille e una notte*.

¹⁶ La Caianiello (Caianiello, 2005) ha studiato la storia e le tecniche risolutive di questo problema, che risale almeno al V secolo d.C., dal momento che compare in Cina nell'opera di **Zhang Qiuqian**, riappare in India nel VII secolo (*manoscritto di Bakhsbali*) e nel secolo VIII (*Compendio dell'essenza della matematica* di **Mahavira**), per poi ripresentarsi in Egitto verso il 900 nell'opera di Abu Kamil ed in Europa in quella di Alcuino e Fibonacci.

¹⁷ Per maggiori dettagli v. Travaini (Travaini, 2003).

¹⁸ Un problema analogo è in Alcuino, Propositio XXVI (*De cursu canis ac fuga leporis*).

Quasi a confermare la perfetta simbiosi fra l'opera matematica di Fibonacci e il mondo mercantile, Høyrup (Høyrup, 2004) propone un rovesciamento di prospettiva: in generale, si ritiene che i libri d'abaco scritti dopo il *Liber Abaci* non siano altro che opere divulgative, che riprendono il modello magari in lingua volgare; analizzando attentamente il contenuto del più antico *libro d'abaco* (Firenze, Biblioteca Riccardiana, MS 2404, ff. 1r-136v)¹⁹, Høyrup nota che, se è vero che molto si deve all'opera di Fibonacci, buona parte del trattato invece (i capitoli 1-9 e 13-15 su 31 in totale) diverge dal *Liber Abaci*: gli argomenti presentati sono i fondamenti dell'arte del calcolo (regola del tre, semplici formule di conversione), utili in particolare a studenti totalmente digiuni dell'argomento. Lo studioso ritiene che la presenza di parti innovative o comunque differenti dall'opera di Fibonacci possa bastare a formulare la tesi inversa: «*could Fibonacci instead have taken an already emerging abaco tradition at his starting point?*». Lo storico danese corrobora le sue supposizioni con un argomento *ex silentio*, tratto proprio dall'introduzione al *Liber Abaci*: Fibonacci parla solo di studi sulle nove figure degli Indi a Béjaia e non nomina, per esempio, né la *regula recta* né l'*elkatayn*, che, nota Høyrup, sono trattate proprio nei capitoli 1-15 nel MS 2404. Fibonacci non sarebbe stato, secondo questa chiave di lettura, l'iniziatore della cultura dell'abaco, ma solo un cospicuo esponente: la celebrazione da parte di Cardano, nel XVI secolo, ne avrebbe sancito la fortuna, relegando in secondo piano l'altra letteratura d'abaco.

8.2.3. *La Practica geometriae*

Lo stesso spirito pratico del *Liber Abaci* permea anche quest'opera del 1220-21, senza che sia trascurato il rigore dimostrativo nella parte teorica. Essa inizia con una lettera di dedica al **maestro** (della corte imperiale) **Domenico** (Ispano), che avrebbe chiesto a Fibonacci di scrivere per lui un testo di geometria. Il manoscritto (Vaticano, Urb. Lat. 292) fu pubblicato da Boncompagni (Boncompagni, 1857-1862). In quest'opera, Fibonacci riprende la pratica dell'uso del segmento come unità di misura, riutilizzata poi da altri (Regiomontanus²⁰, Cartesio), compenetrando anche in questo modo i procedimenti della geometria greca (v. Libro VII degli *Elementi*, in cui Euclide li presenta come segmenti di retta) con gli strumenti di calcolo di origine araba.

Oltre alla parte di fondamenti tipicamente greca (definizioni, calcolo di radici quadrate e cubiche, formula di Erone), ve ne sono altre dedicate a problemi di geometria pratica (misure lineari, di superfici e di volumi, calcoli su

¹⁹ Scoperto (Arrighi, 1986) e trascritto da Arrighi (Arrighi, 1989).

²⁰ Cfr. Figura 6.1.

figure regolari bi- e tridimensionali), ricavate dall'opera di Erone, ma anche dalla pratica agrimensoria di tradizione romana (Scriba e Schreiber, 2000). Fibonacci giunge spesso alla risoluzione di problemi attraverso l'applicazione delle tecniche algebriche (*tunc operabimus per algebram*) usate per le equazioni di secondo grado, che talvolta fanno riferimento alle opere di Savasorda (Curtze, 1902; Arrighi, 1964b; Baldelli, 1965; Maracchia, 2005) o di Abu Kamil (Sesiano, 1993). La *Practica geometriae* appare feconda di spunti per gli studi successivi (Simi, 2004).

8.2.4. Il Liber quadratorum

Il *Liber quadratorum*, ossia il «libro dei [numer]i quadrati», dedicato a Federico II, pubblicato da Boncompagni (Boncompagni, 1857-1862) e commentato da più autori (McClenon, 1919; Picutti, 1979), contiene la risoluzione di altri due problemi proposti a Fibonacci da Giovanni da Palermo e Teodoro di Antiochia (Horodam, 1991) a Pisa. Il testo riveste interesse per gli storici della matematica, dal momento che evidenzia l'approccio di Fibonacci finalizzato a risolvere i problemi, inserendoli tuttavia in classi di problemi standard.

Il libro è composto da venti proposizioni su argomenti di analisi indeterminata di secondo grado, che hanno la funzione di lemmi ausiliari (Malisani, 1996) per la soluzione delle due questioni poste a Fibonacci. Pertanto, il *Liber quadratorum* non è una rassegna generale sulle proprietà dei quadrati, ma solo di quelle utili alla soluzione delle due questioni particolari. Ver Eecke (Ver Eecke, 1952) sostiene che si tratta di una ripresa di un tema di Nicomaco di Gerasa, che tuttavia ne aveva fornito solo una verifica numerica.

Le due questioni proposte a Fibonacci consistono nel trovare:

1. un numero quadrato che, aumentato o diminuito di cinque, sia sempre un numero quadrato;
2. tre numeri tali che la loro somma aggiunta al quadrato del primo sia un numero quadrato, questo numero aumentato del quadrato del secondo sia un quadrato ed anche quest'altro numero, sommato al quadrato del terzo, dia anch'esso un quadrato (equazioni pitagoriche).

La prima questione posta da Giovanni da Palermo a Fibonacci, enunciata nella Proposizione XIV, riproduce altre questioni simili (ad esempio, $x^2 + 6 = a^2$ e $x^2 - 6 = b^2$), la cui soluzione era già nota all'interrogante. Il limite di Giovanni, abacista, consiste nella ricerca di una soluzione a singole questioni, senza individuazione del procedimento risolutivo. Fibonacci, al contrario, muovendo dal problema proposto ne formula proprio una generalizzazione, indicando i casi di soluzioni intere per la classe di problemi della forma $x^2 + m = a^2$ e $x^2 - m = b^2$. La distinzione fra i due procedimenti rappresenta bene anche la differenza procedurale fra abacisti e algoristi (Spagnolo, 1995).

Per risolvere la questione, Fibonacci esclude subito la possibilità di una soluzione intera, dimostrando la sua affermazione con il ricorso ai numeri *congrui*²¹, e scrive un sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 5 = a^2 \\ x^2 + 5 = b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - a^2 = 5 \\ x^2 - b^2 = -5 \end{cases}$$

Poi tabula tutti i casi possibili per la prima equazione, come riportato in *tab. 8.1*.

Tab. 8.1. – Soluzioni al problema di Giovanni da Palermo.

x	a	$x^2 - a^2$
2	1	3
3	1	8
4	1	15
5	1	24
3	2	5
4	2	12
4	3	5
...	...	...

Ne risulta che le coppie (3, 2) e (4, 3) sono possibili soluzioni della prima equazione (si noti che le soluzioni sono cercate sempre in $\mathbb{N}$), ma non è detto che lo siano della seconda, che infatti non ha radici in $\mathbb{N}$: per vederlo, basta notare che $x^2 - b^2 = -5$. La soluzione offerta da Fibonacci, ossia $x = \frac{41}{12}$, è in $\mathbb{Q}$, ma l'autore non mostra il procedimento seguito per arrivare a determinare il numero, il che può far ragionevolmente supporre che sia ricorso alle tabelle di numeri congrui, all'epoca tanto diffuse da non richiedere nemmeno di essere riportate nel *Liber*. L'autore si limita ad affermare che 720 è la ragione della progressione aritmetica tra i numeri da lui usati come esempio (31, 41, 49) e mostra che, posto $x = \frac{41}{12}$; $a = \frac{49}{12}$: si ha

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \frac{1681}{144} + 5 \frac{144}{144} = \left(\frac{49}{12}\right)^2,$$

²¹ Un numero C , intero o razionale, si dice *congruo* se esiste un numero quadrato, intero o razionale, tale che aggiuntogli e sottrattogli C si ottiene ancora un quadrato (Spagnolo, 1995).

$$\text{ossia } 41^2 + 5 \cdot 12^2 = 49 \rightarrow 1681 + 720 = 2401;$$

e che, posto invece $x = \frac{41}{12}; b = \frac{31}{12}$, si ha

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \frac{1681}{144} - 5 \frac{144}{144} = \left(\frac{31}{12}\right)^2,$$

$$\text{ossia } 41^2 + 5 \cdot 12^2 = 31^2 \rightarrow 1681 - 720 = 961.$$

Nella proposizione XIII, l'autore indica la generalizzazione della risoluzione del problema, ponendolo come istanza di una classe di problemi: il numero congruo richiesto deve essere necessariamente della forma $5k^2$; nella proposizione XII aveva già indicato un'altra proprietà dei quadrati: il prodotto di un congruo per un quadrato è ancora un congruo.

La parte più interessante, mostra Spagnolo (Spagnolo, 1995), non è tanto la risposta al problema (tra l'altro già trovata in forma analoga), ma il procedimento, che non solo riesce a sciogliere il quesito proposto, ma fornisce anche «una soluzione che apparentemente sembrava non essere sufficientemente argomentata».

Per la seconda questione, quella sulle equazioni pitagoriche, l'autore presenta innanzitutto il calcolo dei quadrati come somme della successione di numeri dispari: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Grazie a questa formula, Fibonacci può utilizzare una serie di proprietà relative ai quadrati ed anche due metodi per risolvere le equazioni pitagoriche richieste. La soluzione, secondo uno di questi metodi, trascritta in linguaggio simbolico, è la seguente: dato a dispari, si considerino le somme $1 + 3 + \dots + (a^2 - 2)$ e $1 + 3 + \dots + (a^2 - 2) + a^2$, denominate rispettivamente b^2 e c^2 , dal momento che si tratta di quadrati; ponendo $c^2 = b^2 + a^2$, si completa la terna pitagorica e il problema è risolto.

Il *Liber quadratorum* mostra anche una certa affinità con l'opera di Diofanto, senz'altro nota all'autore indirettamente attraverso gli Arabi: entrambi, infatti, pur utilizzando il linguaggio naturale, rivelano a tratti la tentazione di ricorrere a notazioni simboliche (soprattutto nell'uso dell'incognita e delle potenze). I due si differenziano invece nell'utilizzo della geometria, che, assente in Diofanto, permette invece a Fibonacci di rendere più agili le dimostrazioni grazie alla numerazione di posizione e al metodo euclideo di rappresentazione lineare dei numeri ²²: Ver Eecke chiama «algebra geometrica» quella di Fibonacci proprio per questa ragione (Ver Eecke, 1952).

Nonostante la straordinaria potenza dei risultati conseguiti in quest'opera, i contenuti del *Liber quadratorum* non ebbero discepoli nell'immediato: sarebbero stati ripresi solo in pieno Rinascimento nell'opera del frate **Francesco Maurolico** (1494-1575) nel 1520.

²² Lo stesso metodo basato su segmenti, utilizzato anche da Regiomontanus (v. 6.1.).

8.2.5. *Flos*

Uno degli eventi più significativi della vita di Fibonacci fu indubbiamente l'incontro con l'imperatore Federico II, avvenuto nel luglio del 1226 a Pisa (Arrighi, 1969); il ricordo di questo momento deve essere stato estremamente gratificante, dal momento che egli lo cita spesso e, in particolare, nell'opera intitolata *Flos super solutionibus quarundam questionum vel ad numerum vel ad geometriam vel ad utrumque pertinentium* (raccolta di soluzioni di alcune questioni pertinenti all'aritmetica o alla geometria o ad entrambe), che tuttavia è dedicato al cardinale di Viterbo **Ranieri Capocci**, tra l'altro, fiero avversario di Federico II. Il cardinale stesso, si legge nell'introduzione, aveva chiesto a Fibonacci una copia delle sue opere. Arrighi (Arrighi, 1969) nota comunque che nell'opera sono presenti una *Epistola a maestro Teodoro* (Horodam, 1991), la lettera dedicatoria al Capocci, alcune parti indirizzate all'imperatore ed altre ancora al cardinale e ne conclude che l'opera potrebbe essere una «miscellanea di varie scritture composte per vari personaggi» poi integrate in un solo testo, senza revisione delle «dediche», il che potrebbe anche far nascere il dubbio che non sia stato il matematico pisano a predisporre la raccolta. In ogni caso, la cerchia di personaggi che attornia Fibonacci e offre un «sensibile contributo agli studi matematici», nota ancora Arrighi, è di altissimo rango sociale.

Il *Flos*, di cui esiste un unico manoscritto presso la Biblioteca Ambrosiana a Milano (E 75 Sup.) pubblicato da Boncompagni nel 1854 e commentato da Picutti (Boncompagni, 1854; Picutti, 1983), include 15 problemi di analisi determinata e indeterminata: uno di essi fu posto a Fibonacci a Pisa da **Giovanni da Palermo**, matematico della corte imperiale.

Espresso in notazione simbolica, il problema chiede la risoluzione dell'equazione: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ (equazione presente anche nell'opera di **Omar Kayyam**). La risposta di Fibonacci mostra che l'unica radice non può che appartenere agli irrazionali studiati nel X libro di Euclide, anticipando la necessità di un ampliamento del campo numerico. Fibonacci indica la radice

($x = 1.22.7.42.33.4.40$, in base 60; 1.3688081075 in base 10) esprimendola in frazioni sessagesimali approssimate a $\frac{1}{60^6}$ (*studui solutionem ad propiquitatem reducere*), ma non spiega il procedimento, applicando forse un algoritmo ai suoi tempi di pubblico dominio, «probabilmente lo stesso metodo applicato da **al-Tusi** (1201-1274) per risolvere equazioni di terzo grado», suggerisce la Malisani

(Malisani, 1996), ossia, in forma generalizzata ²³, $\sqrt[k]{a^k + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^k - a^k}$, sotto la doppia condizione $r \in \mathbb{R}^+$; $r < (a+1)^k - a^k$.

²³ Regiomontanus nell'appendice di problemi presente nel Plimpton 188 riporta il caso particolare per $k = 2$.

8.3. LA FORTUNA

Un dato, oltre alla genialità del loro contenuto, accomuna le opere di Fibonacci qui brevemente sintetizzate: la loro tardiva pubblicazione a stampa, che è avvenuta ad oltre seicento anni dalla loro stesura, nonostante la celebrazione dell'opera di Fibonacci fatta da Cardano. Persino il nome della successione fu attribuito soltanto nel XIX secolo da Edouard Lucas. Questo contrasta con l'enorme diffusione dei contenuti dell'opera leonardiana all'interno delle scuole d'abaco in Italia ed in Europa in genere.

Il motivo di questo scarso interesse per la pubblicazione dell'opera di Fibonacci va certamente ricercato nel grande sviluppo che l'algebra, la geometria ed in genere le discipline matematiche ebbero a partire dall'epoca umanistica proprio in quegli ambienti colti, che in precedenza si erano sempre formati su testi classici o tardo classici (Boezio) ed ora potevano contare sui testi di Euclide e Diofanto, cui fu attribuito ben presto il soprannome di «padre dell'algebra», anche ad opera di Regiomontanus.

9. GLI ALGORISMI

È importante estendere l'attenzione anche alle opere denominate *algorismi*, i trattati (composti in latino e in seguito anche nelle lingue volgari) che contribuirono alla graduale sostituzione dei metodi basati sull'abaco e sul calcolo digitale con quello basato sulle dieci cifre (Allard, 1991). Il termine, come si è detto, deriva dal nome di al-Khawarizmi, ma ad esso viene attribuita unanimemente da questi autori la consueta falsa etimologia: *Algus* (nome dell'autore, indicato come re o filosofo) e *rithmus* o *rismus* (numero).

I principali e più famosi autori, a partire dal XIII secolo, furono **Alexandre de Villedieu (Alexander de Villa Dei)**, **John of Halifax** (noto con il nome latinizzato di **Sacrobosco**), **Jordanus Nemorarius**, **Johannes de Lineriis** e via via molti altri.

La diffusione della nuova aritmetica fu lenta e faticosa: ci vollero infatti dei secoli prima che fosse accettata ed utilizzata. La spiegazione di questo fenomeno apparentemente incomprensibile va ricercata, secondo Folkerts (Folkerts, 2003b) ed anche secondo alcuni neurofisiologi (Dehaene et al., 2004) e semiologi (Rotman, 1987), nell'astrattezza del sistema posizionale e nella difficoltà logica e concettuale di accettare il fatto che lo zero, che in sé rappresenta il nulla, possa decuplicare il valore di una cifra o di un numero.

Come sottolinea Beaujouan (Beaujouan, 1999), il numero occupava un posto marginale nella vita quotidiana prima del Mille, ma, con l'affermazione delle cosiddette figure degli Indi, si aprì la strada alla possibilità di fornire dati numerici in abbondanza e con grande precisione anche in contesti estranei al calcolo: Beaujouan cita, a titolo di esempio, opere storiche come il *De magnalibus urbis Mediolani* di **Bonvesin de la Riva** (1240-1315), risalente al 1288, e la *Cronica* di **Giovanni Villani** (1280-1348).

Folkerts (Folkerts, 2003b) infine ricorda che molti trattati tardo-medievali (v. 10.1.1., ad esempio, quello di Jacopo da Firenze del 1307) riportano tabelle di corrispondenza, spesso errate, fra le varie cifre e il loro valore a seconda della posizione ed inoltre suggerimenti mnemonici in lingua volgare per ricordare il significato dei numerali: questo significa che solo molto più tardi fu compresa

la semplicità di calcolo che il nuovo sistema offriva e si avvertì l'esigenza di renderne più agevole l'apprendimento. Di qui la massiccia diffusione degli algoritmi soprattutto nel XV e XVI secolo.

9.1. ALEXANDRE DE VILLEDIEU

Le note biografiche sono estremamente esigue. Nato in Normandia a Villedieu intorno al 1175 ed entrato nell'ordine francescano, insegnò a Parigi, forse collega di Sacrobosco, ed in Bretagna. Morì verso il 1240. Scrisse in esametri leonini una grammatica latina denominata *Doctrinale puerorum*, basata sull'opera di Donato e Prisciano. Il *Carmen de algarismo* (Halliwell, 1841), composto intorno al 1202, ha come destinatari ideali gli stessi di Beda: ecclesiastici interessati ad uno strumento di calcolo per le feste mobili, come la Pasqua. La scelta della forma poetica si spiega perfettamente con la maggior facilità di apprendimento e si ritrova spesso in algoritmi in volgare, che ricorrono anche all'uso della rima come ulteriore ausilio per la memorizzazione.

Il testo, costituito di 290 esametri leonini, presenta una descrizione delle figure degli Indi (vv. 1-3), del loro significato numerico (vv. 4-7) e della notazione posizionale (vv. 8-25); segue l'elenco delle sette operazioni (vv. 26-32) dettagliatamente esposte nei versi successivi: addizione (vv. 33-47), sottrazione (vv. 48-65), raddoppiamento e dimezzamento (vv. 66-77; vv. 78-86), moltiplicazione (vv. 87- 132, compresa la prova), divisione (vv. 133-170), estrazione di radice (171-290); come si vede, l'ordine in cui sono presentate le operazioni è lo stesso di LA/LP (v. 7.1.3.).

La trattazione è in forma retorica, ma semplice e sintetica, al punto che il testo potrebbe essere considerato più una sorta di *memorandum* composto da uno studente già istruito che un vero e dettagliato manuale, anche per il fatto che le operazioni descritte coinvolgono solo numeri interi. La terminologia tecnica è quella consueta degli algoritmi, senza citazioni di lessico derivato dalla pratica dell'abaco: lo zero è chiamato *cifra* (traslitterazione latina del termine arabo). Rimangono anche le espressioni *digitum* per indicare le unità e *articuli* per le decine, termini tipici del calcolo digitale, presente anche nel *Liber Abaci*.

Il grande numero di copie del manoscritto sparse in moltissime biblioteche europee (v. 9.5.) è la dimostrazione che era molto conosciuto e diffuso, anche se mantiene una posizione subordinata rispetto ad altre opere ancor più note e studiate, come quella di seguito presentata.

9.2. JOHN OF HALIFAX (SACROBOSCO)

Anche nel caso di questo autore la biografia documentata è piuttosto scarna, dal momento che la maggior parte delle informazioni deriva dalle speculazioni di storici del XVI e XVII secolo ed è di dubbia fondatezza. Un suo biografo quasi coevo, Robertus Anglicus, nel 1271 gli attribuisce un'origine inglese, indirettamente confermata dai nomi che gli vengono spesso attribuiti: John of Holywood, John of Halifax (Karpinski, 1910). È certo che egli giunse a Parigi negli anni venti del XIII secolo e, forse dopo aver completato gli studi nella stessa università, come *magister artium*, stipulò un contratto da docente di matematica ed astronomia. La morte è collocata intorno alla metà del secolo.

Compose alcune opere importanti, che divennero libri di testo nelle università:

- *Algorismus vulgaris*;
- *De sphaera*, sulla geometria sferica basata sull'opera di Tolomeo e dei commentatori arabi (Thorndike, 1949);
- *Compotus* o *De anni ratione*;
- *Tractatus de quadrante*, sulla costruzione del *quadrans vetus* (quadrante orario con cursore mobile).

L'*Algorismus*, scritto intorno al 1240 per un pubblico di specialisti (gli studenti universitari del curriculum di *artes liberales*), ha un approccio decisamente più teorico rispetto al *Carmen* di Villedieu per la presenza di contenuti ricavati ¹ dall'*Arithmetica* di Boezio; si presenta inoltre più innovativa per il ripensamento dell'ordine di presentazione delle operazioni ed infine offre un apparato didattico più completo, grazie a descrizioni più ricche e ad esempi. Essa diventò, accresciuta dal commento ² (Curtze, 1897) del 1291 del danese Pietro di Dacia, un classico testo universitario fino all'epoca rinascimentale; è stata pubblicata nel 1841 da Halliwell (Halliwell, 1841) con il titolo *Tractatus de arte numerandi* e ne esiste un'edizione critica di Curtze (Curtze, 1897).

L'opera è agile, infatti consta solo di circa 4000 parole, e tratta le operazioni fondamentali con gli interi. Originale è la denominazione dello zero, presentata nel primo paragrafo, dedicato alla numerazione: *decima figura*.

Nell'edizione di Halliwell, dopo una breve introduzione sul numero e la presentazione di quello che oggi chiameremmo il piano dell'opera o TOC, la trattazione appare suddivisa in paragrafi sui vari argomenti, che corrispondono ad LA:

¹ Come, ad esempio, dimostra un confronto tra gli *incipit* dell'*Arithmetica* boeziana e dell'*Algorismus vulgaris*: *Omnia quaecunque a primaeva rerum natura constructa sunt, numerorum videntur ratione formata* e *Omnia que a primeva rerum origine processerunt ratione numerorum formata sunt*.

² Il commento, di circa 18000 parole, all'algoritmo di Sacrobosco presenta non solo glosse accurate e dotte, ma anche numerosi esempi e parti aggiuntive su successioni e serie.

1. Numeratio
2. Additio
3. Subtractio
4. Mediatio
5. Duplatio
6. Multiplicatio
7. Divisio
8. Progressio
9. Perambulum ad radicum extractionem
10. Extractio radicum in quadratis
11. Extractio radicum in cubicis

Il testo si colloca, come è stato notato (Burnett, 2002b), in una tradizione inglese e gallese dell'inizio del XIII secolo, già consolidata ed indipendente sia dagli algoritmi sia dall'opera di Fibonacci. La prova, secondo Burnett, viene dal manoscritto (Cashel, GPA Bolton Library Medieval MS 1) di un monaco dell'abbazia di Tewkesbury (Gloucestershire) o di un'altra strettamente collegata ad essa; l'opera è una raccolta di testi e note, accomunati dall'argomento: i numeri. Burnett mostra come i procedimenti di calcolo ed il lessico (ad esempio, il termine latinizzato *cifra* per indicare lo zero) adottati nel manoscritto siano poi integrati nell'*Algorismus vulgaris* di Sacrobosco, che rappresenta quindi un momento più avanzato nello sviluppo delle arti del calcolo. Le affinità non devono, secondo Burnett, far pensare ad una relazione diretta fra i due testi, ma solo alla compresenza in un panorama culturale matematico comune. Un elemento interessante della raccolta è anche il cosiddetto *Helcep Sarracenicum* (*helcep* è la traslitterazione dell'arabo del termine *al-hisab*, che significa appunto calcolo), ossia un algoritmo del XII secolo, scritto da un certo **Johannes Ocreatus**, identificato da Burnett (Burnett, 1993) e studiato anche da Allard (Allard, 1997), che l'ha messo in relazione con le prime traduzioni latine dell'*Hisab al-hindi* di al-Khawarizmi (v. 7.3.), in particolare con il *Liber Ysagogarum*, e ipotizza un'origine vicina ad Adelardo.

Le caratteristiche peculiari dell'*helcep* consistono nell'uso dei numerali romani per rappresentare i numeri da 1 a 9 (lo zero servirebbe, a dire dell'autore, a segnare un posto vuoto) e nel ricorso ad una terminologia tradizionale (compresi i superparzienti etc.), ossia di ascendenza boeziana e gerbertiana.

9.3. JORDANUS NEMORARIUS

Anche nel caso della biografia di Giordano Nemorario (Karpinski, 1910; Høyrup, 1988) non si sa praticamente nulla: che sia vissuto nella prima metà del XIII secolo, forse addirittura alla fine del XII è testimoniato dalla presenza delle sue opere nel catalogo (*Biblionomia*) della biblioteca di **Richard de Fournival**,

realizzato tra il 1246 e il 1260 (Clagett, 1959). In totale vengono attribuiti a Giordano 12 trattati ed il suo nome viene citato per ben quattro volte nella forma «Jordanus de Nemore», lo stesso appellativo che compare in un gran numero di manoscritti del XIII secolo. Non è dato sapere né l'origine né il significato di quel *de Nemore* o *Nemorarius* che accompagna il suo nome ³, al punto che qualche studioso (Klein, 1964) ha persino ipotizzato che si tratti di una corruzione dell'espressione «*de numeris*» o «*de numero*» tratta dai manoscritti; Duhem (Duhem, 1906) lo ritiene italiano (Giordano di Nemi); altri (Curtze, 1887) hanno preferito identificarlo con **Giordano di Sassonia**, generale dei Domenicani fra il 1222 e il 1237, sulla base di un'affermazione del cronista **Nicholas Trivet** (1257-1334) che descriveva il frate come un eminente scienziato, autore anche di trattati di fisica e geometria, ma non esistono prove sicure di questa identificazione; anzi, la notizia, riportata dallo stesso studioso, dell'attività di Giordano come lettore all'Università di Tolosa (collocabile solo a partire dal 1229) risulta del tutto incompatibile con la tesi di Curtze.

Nei dieci libri dell'*Arithmetica* (Busard, 1991), Giordano incluse oltre 400 proposizioni che divennero per tutto il Medioevo la fonte principale di contenuti teorici in campo aritmetico, in quanto, procedendo per definizioni, assiomi (*communes animi conceptiones*) e postulati (*petitiones*), la sua *Arithmetica* era modellata sugli *Elementi* di Euclide, ma non trascurava quella boeziana, più diffusa, anche se priva dello stesso rigore formale. Si tratta verosimilmente dell'unico tentativo di approccio assiomatico all'aritmetica precedente quello del XIX secolo, dovuto soprattutto a Peano.

Il sistema numerico decimale, presentato da Giordano nel suo *Algorismus demonstratus* o *Demonstratio Jordani de algorismo*, ha lo stesso approccio formale: l'autore procede da 21 definizioni, fortemente strutturate, e proposizioni, differenziandosi in tal modo profondamente dall'opera degli altri algoristi. La descrizione delle operazioni (addizione, raddoppiamento, dimezzamento, moltiplicazione, divisione, estrazione di radice) è integrata tra le definizioni generali, come quelle di numeri semplici, numeri composti, unità, decine.

A Giordano sono attribuiti anche trattati

- sulle **frazioni** (*Demonstratio de minutiis*): esso descrive le operazioni aritmetiche tra frazioni e tra interi e frazioni;
- sulla **trigonometria** (*Liber phylotegni de triangulis*) e sulle **proiezioni dei solidi** (*Demonstratio de plana sphaera*) a scopi astronomici;

³ L'ipotesi che si tratti di una latinizzazione dell'aggettivo indicante origine geografica legato a Nemours non è stata finora avanzata: la cittadina francese, pur esistendo già dall'Alto Medioevo, come dipendenza di Château-Landon, capoluogo del Gâtinais, formatasi attorno alla chiesa di san Pietro, iniziò propriamente la sua storia soltanto nel XII secolo grazie alla presenza di una famiglia vicina ai sovrani. Nel 1120 infatti Orson, vassallo di Luigi VI, costruì un castello in posizione strategica, sulla riva sinistra del fiume Loing. La nascita di Jordanus si collocerebbe a distanza di qualche decennio.

- sulla **numerazione** (*De elementis arismetice artis*), pubblicato in edizione critica da Busard (Busard, 1991).

Altra opera di Giordano significativa per il suo contributo alla diffusione delle arti del calcolo, è il *De numeris datis*, un trattato di algebra in quattro libri che fu probabilmente usato come testo universitario (un suo lettore fu certamente Regiomontanus, nella cui biblioteca è presente una copia): esso si discosta fortemente dai trattati algebrici per la sua decisa ascendenza euclidea. L'edizione critica è quella di Hughes (Hughes, 1981), nella quale l'editore fissa al 1225 la data più probabile di stesura dell'opera.

Scritto in latino interamente in forma retorica (nonostante nelle proposizioni l'autore utilizzi lettere dell'alfabeto per rappresentare i numeri, sia dati sia incognite), il *De numeris datis* comincia *ex abrupto* con tre definizioni, cui seguono 115 proposizioni suddivise in quattro libri: sono assenti del tutto commenti e introduzioni che illustrino la finalità del trattato oppure ne descrivano l'organizzazione complessiva e la ripartizione della materia. Mancano inoltre introduzioni alle singole proposizioni o testo di transizione tra una proposizione e l'altra, fatta eccezione per una breve frase conclusiva. Le 29 proposizioni del primo libro trattano di equazioni simultanee o quadratiche; le 28 del secondo libro di proporzioni, le 23 del III libro, di proporzioni continue e proporzioni in generale. Nell'ultimo libro (35 proposizioni) gli argomenti vengono integrati: proporzioni ed equazioni simultanee o quadratiche.

Lo schema generale seguito nella presentazione delle proposizioni è:

1. **Enunciazione formale del problema** che asserisce che, se alcuni numeri (o proporzioni) sono dati, insieme con alcune relazioni reciproche, allora anche altri numeri (o proporzioni) sono dati.
2. Una serie di **trasformazioni** dei numeri (o proporzioni) e delle relazioni che o mostrano che i numeri sono effettivamente dati oppure li trasformano in numeri e relazioni nell'ipotesi di proposizioni precedentemente trattate.
3. **Calcolo di un esempio numerico**, che è la parte meno euclidea del trattato e verosimilmente più legata alla tradizione algebrica di derivazione araba.

Le proposizioni non sono veri teoremi (ossia non hanno la pretesa di spiegare come è un dato ente matematico), ma piuttosto si presentano come «teoremi sulla possibilità di soluzione di classi di problemi» (Puig, 1994), corredati di un esempio rappresentativo della classe di problemi in questione, risolto algoritmicamente. Lo stesso Puig ha utilizzato il procedimento di Giordano a scopi didattici (Puig, 1996b). Hughes (Hughes, 1981) ritiene che in quest'opera Giordano abbia anticipato alcuni aspetti (per esempio, nell'applicazione dell'analisi all'algebra, ma anche nella triplice articolazione delle proposizioni) dell'opera del francese **François Viète** (1540-1603); non è dello stesso parere Grant (Grant, 1983), che ritiene del tutto casuale la somiglianza.

Nel presentare il testo, Hughes ipotizza che la ragione per cui Giordano non scrisse mai un'algebra sia stata proprio la (relativa) diffusione dal 1145 del-

l'*Algebra* di al-Khawarizmi nella traduzione di Roberto di Chester, ma soprattutto del *Liber Abaci* di Fibonacci dal 1202.

Le proposizioni 8, 9 e 10 del libro IV coincidono con le tre forme composte dell'*Algebra* di al-Khawarizmi. La corrispondenza, studiata da Puig (Puig, 1994), non è solo di contenuto, ma anche lessicale dal momento che Giordano, invece di ricorrere esclusivamente al termine «numero» o di sue parti e proporzioni, parla anche di radici e quadrati.

Infatti la proposizione IV-8, che corrisponde al quarto caso secondo al-Khawarizmi, suona: *Si quadratus cum additione radice suae per datum numerum multiplicatae datum numerum fecerit, ipse etiam datus erit.* (Se un quadrato con la somma della [ossia: sommato alla] sua radice moltiplicata per un numero dato avrà prodotto [come risultato] un numero dato, esso stesso sarà dato).

La dimostrazione è la seguente: «Sia a un quadrato; la sua radice b sia moltiplicata per cd in modo tale che sia c sia d siano la sua [di cd] metà e da b per cd venga e ed ae sia dato. Poiché dunque bcd moltiplicato per b fa ae , aggiunto un quadrato d ad ae , fa aef . E sarà aef che viene da bc [moltiplicato] per se stesso. Ed essendo aef dato, anche bc sarà dato. Sottratto dunque c , resterà b , dato, e così a sarà dato» ⁴.

I passaggi seguenti sono questi:

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1. Dato un numero a (quadrato), | $a = b^2$ |
| 2. la sua radice b , | b |
| 3. moltiplicata per cd , | $b(c + d)$ |
| 4. c e d sono ciascuno la metà di cd , | $c = d = \frac{c + d}{2}$ |
| 5. b per cd fa e | $b(c + d) = e$ |
| 6. ae sia noto. | $(a + e)$ |
| 7. Poiché bcd per b fa ae , | $b(c + d) \cdot b = a + e$ |
| 8. il quadrato di d aggiunto ad ae , fa aef | $d^2 + (a + e) = a + e + f$ |
| 9. aef sarà il quadrato di bc . | $a + e + f = (b + c)^2$ |
| 10. Poiché aef è dato, bc sarà dato. | $\sqrt{a + e + f} = b + c$ |
| 11. Sottratto c , resterà b , che è dato | $b = \sqrt{a + e + f} - c$ |
| 12. così a sarà dato. | $a = b^2$ |

Giordano non giustifica l'uso, a partire dal terzo passaggio, di due lettere giustapposte, invece di una, per indicare il numero dato (cd) ⁵ che moltiplica la

⁴ *Sit quadratus a, radix eius b multiplicata per cd, ut et c et d sit eius medietas, atque ex b in cd fiat e, sitque ae datus. Quia igitur bcd secundum b multiplicatus facit ae, quadrato d adiuncto ad ae fiant aef. Eritque aef, quod fit ex bc in se. Cumque sit aef datus, erit et bc datus. Subtracto igitur c, remanebit b datus, et sic a datus erit.*

⁵ NB: $cd = c + d$, come si evince facilmente dalla dimostrazione geometrica.

radice b , e non spiega nemmeno perché nel passaggio successivo ponga la condizione $c = d = \frac{cd}{2}$; inoltre non presenta la dimostrazione del fatto che aef , di cui completa la costruzione nell'ottavo passaggio, assume un diverso significato, divenendo il nucleo della dimostrazione. È facile notare come la soluzione coincida con quella proposta da al-Khawarizmi, *mutatis mutandis*, ossia ponendo $b = x; c = \frac{c}{2}; (a + e + f) = \frac{b^2}{2} + c$.

Puig (Puig, 1994) mostra come il tutto faccia riferimento ad una dimostrazione geometrica, riconducibile tra l'altro alla proposizione II-6 degli *Elementi* di Euclide. Infatti, se si divide un segmento (cd) in due parti uguali ($c = d$) e lo si prolunga con un segmento (b), la somma del rettangolo compreso tra il primo segmento e quello aggiunto (e), di quello sotto il segmento aggiunto (a) e del quadrato della metà del segmento intero (f), è uguale al quadrato formato dal segmento composto dalla somma della metà del primo segmento e del secondo $(b + c)^2$:

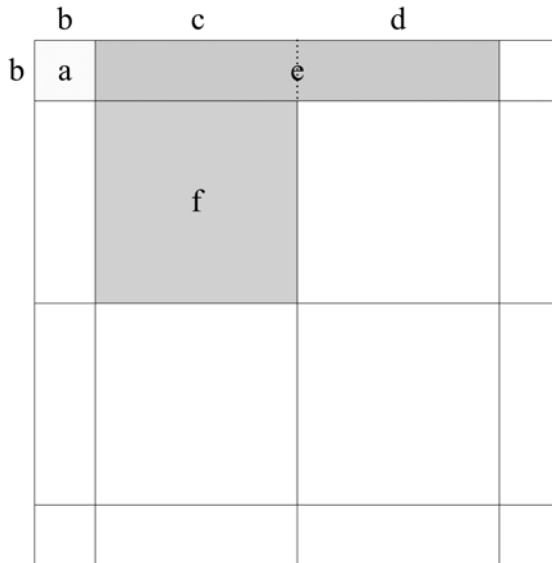


Fig. 9.1. – Dimostrazione di Giordano secondo Puig (1994).

Le proposizioni IV-9 e IV-10 trovano corrispondenza con i casi 5 e 6 dell'*Algebra* di al-Khawarizmi e sono enunciate con la stessa terminologia. Per quanto concerne la proposizione 9, di cui si riporta per intero la discussione, Giordano si trova, come al-Khawarizmi, nella necessità (per lui imbarazzante) di ammettere l'esistenza di una duplice soluzione (*contingit dupliciter assignari*). Tutta-

via, mentre al-Khawarizmi, per evitare soluzioni complesse, pone la condizione $\left(\frac{b}{2}\right)^2 \geq c$, contemplando così anche il caso delle due soluzioni coincidenti,

Giordano non ne parla.

La risoluzione della proposizione 9 è la seguente: «Sia infatti lo stesso quadrato a , la radice b , il numero dato aggiunto c ; e sia dato de , che moltiplicato per b fa ac , la cui metà sia d e il quadrato sia f e la differenza tra b e d sia g . Poiché dunque il doppio di b per d fa ac , si aggiungono a ed f sopra il quadrato g . Perciò tolto a da entrambi, f sopra c aggiunge il quadrato g . Sottratto dunque g da d , può restare b ; anche g aggiunto a d può fare b , poiché a sarà assegnato due volte»⁶.

I passaggi seguiti sono questi:

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1. Come prima, dato un numero a (quadrato), | $a = b^2$ |
| 2. data la sua radice b , | b |
| 3. dato c termine noto positivo | c |
| 4. de sia il numero dato che, moltiplicato per b , fa ac , | $(d + e) \cdot b = ac$ |
| 5. sia d la metà di de , | $d = \frac{(d + e)}{2}$ |
| 6. f sia il quadrato di d . | $f = d^2$ |
| 7. la differenza tra b e d sia g . | $g = (b - d)$ |
| 8. Quindi, dato che b per il doppio di d fa ac , | $b \cdot 2d = a + c$ |
| 9. la somma di a ed f supera ac del quadrato di g . | $a + f = (a + c) + g^2$ |
| 10. Allo stesso modo, sottratto a ad entrambi, | $a + f - a = (a + c) - a + g^2$ |
| 11. f supera c del quadrato di g . | $f = c + g^2$ |
| 12. Tolto g da d , si può ottenere b . | $(d - g) = b$ |
| 13. anche sommando g a d , si può avere b . | $(d + g) = b$ |

Con questo algoritmo, si otterrà a in due modi. Anche in questo caso, fatte le debite sostituzioni, si ottiene la formula di al-Khawarizmi.

Høyrup (Høyrup, 1988) rileva un'altra coincidenza con l'opera di al-Khawarizmi nella proposizione I.25, in cui si pone il problema seguente:

$$x + y = A, \frac{1}{N} \frac{Cx}{y} + Cx = D,$$

noti A , C , D ed N ; il che generalizza il problema 5 dell'appendice dell'*Algebra* di al-Khawarizmi (v. 3.4.6.).

⁶ *Sit enim idem quadratus a, radix b, numerus datus additus c, atque de datus in quem b ductus facit ac, cuius medietas d, et ipsius quadratum f, atque differentia b ad d sit g. Quia igitur b in d bis facit ac, addunt a et f super ac quadratum g. Itaque a utrobique dempto addit f super c quadratum g. Dempto ergo g de d potest remanere b, et addito g ad d potest fieri b, quare dupliciter assignabitur a.*

Scopo dell'opera, secondo Høyrup, era dare un soddisfacente fondamento teorico (*apodixis*), ricavato dalla geometria greca, a tutti i risultati empirici dell'algebra islamica (*experimenta*). Giordano infatti, utilizza persino gli esempi numerici tratti da al-Khawarizmi, Abu Kamil, al-Karaji e Fibonacci, ma evita accuratamente di citarli come fonti, dichiarando anzi di essere sulle orme degli antichi.

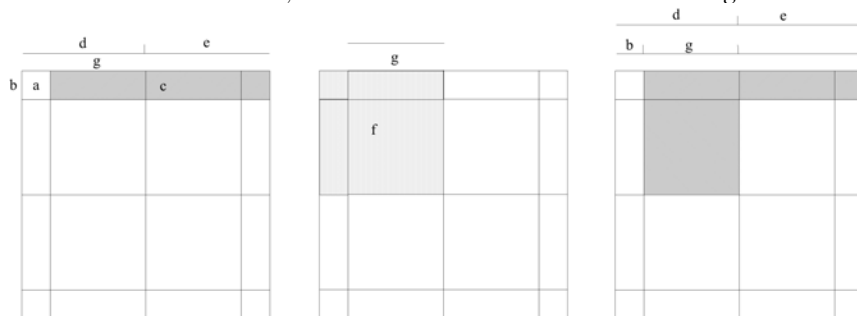


Fig. 9.2. – Dimostrazioni di Giordano – secondo Puig (1994).

9.4. JOHANNES DE LINERIIS

Soltanto alla fine del XV e XVI secolo, con il moltiplicarsi delle scuole mercantili, le tecniche di calcolo derivate dall'opera di al-Khawarizmi si trasformarono portando alle forme di computo scritto attuali, che presentano rispetto all'abaco l'innegabile vantaggio di conservare tutti i passaggi del calcolo, anche quelli intermedi, senza necessità di cancellarli, sebbene cresca la necessità di affidarsi al calcolo mentale. L'abaco tuttavia non offriva nessun supporto per lavorare con numeri frazionari e questo condizionò anche i primi algoristi, che, come si è visto, preferirono concentrarsi sul calcolo con interi, secondo la convenzione in uso presso gli abacisti, che appunto riducevano le frazioni ad interi.

L'introduzione del sistema di numerazione in base 60, su cui si basavano i calcoli astronomici greco-arabici, con la necessità di calcolo di minuti e secondi, indusse anche gli algoristi innanzitutto ad abbandonare definitivamente i numerali romani ed inoltre a pensare a come si potessero rappresentare efficacemente anche le frazioni, soprattutto nel caso in cui non esistesse un corrispondente decimale finito di una frazione sessagesimale. In questo quadro si colloca l'*Algorismus de minutiis* (circa 1340) di **Johannes de Lineriis**, (noto anche come Jean de Picard, Jean de Linières, Jean de Lignièrès, Jean de Lignères, Johannes Ambianensis, Johannes de Ligneris, Johannes de Liveris, Johannes Liverius), il quale ideò la notazione frazionaria come oggi è conosciuta, coniando anche i termini «*numeratore*» e «*denominatore*», introducendo l'uso di una lineetta (*virgula*) per indicare la separazione fra unità e frazioni ed elaborando procedure per il calcolo frazionario.

9.5. PER UNO STUDIO DELLA DIFFUSIONE DEGLI ALGORISMI

Da un'analisi anche approssimativa che potrebbe essere svolta sugli autori dei secoli XIII-XVI di opere il cui titolo ricorda o contiene la parola *algorismo* emerge che, con il passare del tempo, l'originale legame di questo termine con l'opera di al-Khawarizmi si affievolì fino a scomparire del tutto. Per molti di questi autori la semantica del termine si ridusse a «procedura di calcolo», anticipando quella attuale. Allo scopo di comprendere il fenomeno della diffusione degli algorismi ho effettuato una ricerca, grazie alla banca dati Jordanus (Università di Monaco di Baviera e Max Planck Institut di Berlino), a fonti cartacee (incipitari e cataloghi) ed elettroniche reperite anche via Internet, raccogliendo il maggior numero possibile di riferimenti a manoscritti con questo titolo e contenuto (v. allegato 2).

Il panorama dei maestri che si occuparono di questi temi è molto ricco e ben lontano dall'essere esplorato a fondo. Tuttavia, una ricerca in questo senso può produrre risultati degni di attenzione anche solo dal punto di vista quantitativo: prendendo in considerazione l'intervallo di tempo suddetto, il numero di trattati manoscritti presenti nelle biblioteche dell'Europa occidentale ⁷ e contenenti nel titolo la parola *algorismo* o espressioni da essa derivate, supera abbondantemente le 500 unità.

Innanzitutto, è interessante associare i manoscritti all'area in cui sono conservati; benché la coincidenza fra luogo di conservazione e di produzione sia rarissima, la presenza di un elevato o scarso numero di manoscritti è comunque un buon indice della vitalità e della capillarità dell'interesse per l'argomento nell'area geografica considerata (fig. 9.3.).

Come si vede, l'area mitteleuropea si distingue nettamente dalle altre sia considerando singolarmente il caso della Germania, sia, a maggior ragione, aggregandola con Austria e Svizzera. Spicca *e converso* l'esiguo numero di manoscritti iberici, forse comprensibile con la familiarità che in Spagna si aveva fin dall'Alto Medioevo con i numerali indo-arabici, che rendeva pressoché inutile la stesura di un testo che li illustrasse.

Per quanto riguarda la distribuzione temporale degli algorismi manoscritti, si nota che il picco nella loro diffusione si ha in corrispondenza del XV secolo, a partire dal quale si ha un declino dovuto verosimilmente all'invenzione ed alla diffusione della stampa a caratteri mobili ed alla loro effettiva adozione (fig. 9.4.).

⁷ Non è stata presa in considerazione l'area dei Balcani e dell'Est europeo (fatta eccezione per la Polonia e la Repubblica Ceca), per l'estrema difficoltà di raggiungerne i rispettivi cataloghi.

Un'ulteriore considerazione può essere fatta sulla ricorrenza degli autori: l'opera di Sacrobosco appare nettamente la più copiata ⁸ (302 esemplari) e la distribuzione delle sue copie interessa quasi tutti gli stati europei considerati, con punte in Germania (112), Inghilterra (47), Francia (39), Italia (32) e Austria (22). Con un grande distacco, si vedono poi sia l'opera di Villedieu, molto presente in Inghilterra (16), Germania (10), Italia (7) e Francia (5), sia quella di de Lineriis, copiata soprattutto in Germania (16), Francia (10) e Italia (4).

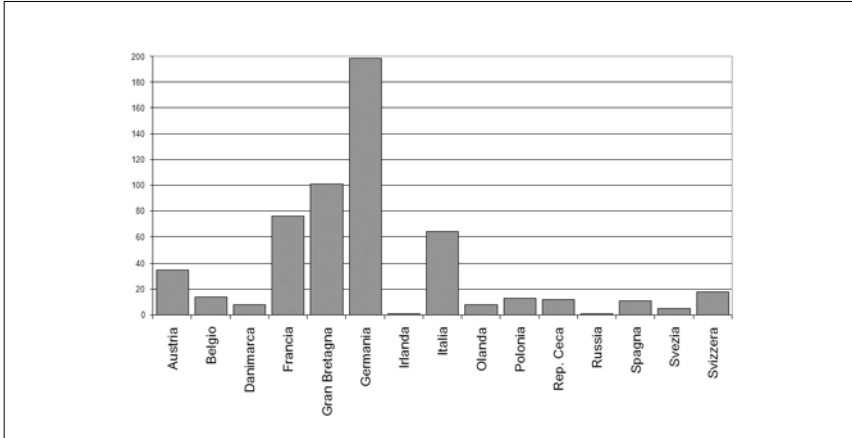


Fig. 9.3. – Grafico del numero di algoritmi per stato europeo.

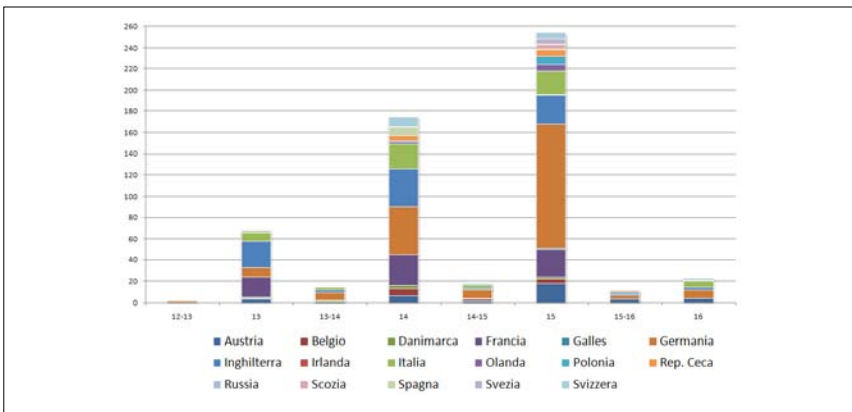


Fig. 9.4. – Grafico del numero di algoritmi per secolo e per stato.

⁸ Per rendere confrontabile l'opera degli altri autori, il numero di manoscritti di Sacrobosco viene escluso dal grafico, data la scala adottata.

Per quanto riguarda infine la lingua utilizzata, vale la pena di evidenziare il graduale presentarsi delle lingue nazionali; se non stupisce la precoce comparsa del volgare italiano, merita invece una considerazione particolare la presenza dell'islandese/antico norvegese, lingua che, dopo questa fugace apparizione, non lascerà traccia nella tradizione degli algorismi. Anche in questo caso il contesto storico aiuta a comprendere il dato statistico: la posizione della Scandinavia, strategica dal punto di vista delle comunicazioni e dei contatti commerciali (di qui l'interesse per le tematiche del calcolo), diventa sempre meno considerevole dopo che la scoperta dell'America ha spinto i navigatori europei sull'Atlantico e li ha stimolati a tracciare nuove redditizie rotte mercantili, soprattutto verso il Sud.

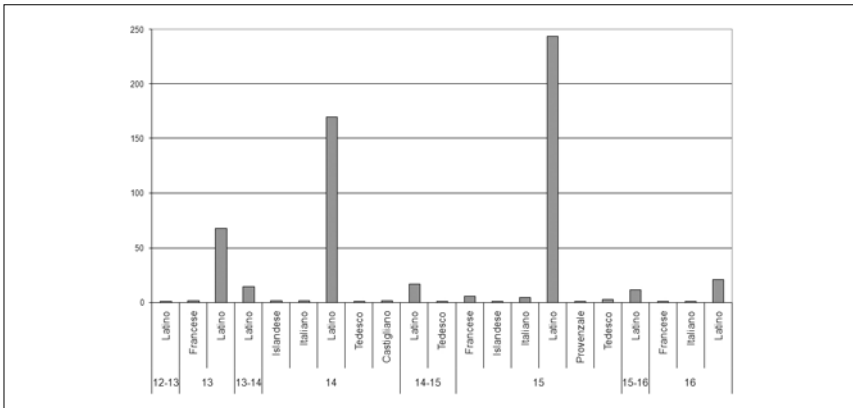


Fig. 9.5. – Lingua degli algorismi per secolo o intervallo di secoli.

10.

ALGEBRA E CALCOLO NELL'EUROPA TARDOMEDIEVALE

La rivoluzione innescata dal *Liber Abaci*, che portava a Pisa, nel cuore dell'Europa dei mercanti e dei banchieri, una tecnica altamente innovativa ed anzi alternativa, comportava di cambiare non solo i metodi di calcolo, ma persino il sistema di numerazione: questa è la principale ragione per cui stentò per lungo tempo a diffondersi ¹. Anche la classe mercantile, abituata ai numerali romani e priva di confidenza con i nuovi algoritmi di calcolo, temeva di non poterne verificare i risultati (Fibonacci, forse prevedendo questo, aveva contemplato le prove del sette, del nove e dell'undici) e quindi di essere ingannata da facili contraffazioni: a Firenze nello statuto del 1299 l'Arte del Cambio vietò ai propri iscritti di utilizzare i numeri arabi per tenere la contabilità (Camerani Marri, 1955; Strujk, 1968), imponendo che i numeri fossero scritti con i tradizionali numerali romani oppure in forma estesa, con la scrittura completa del nome; a Padova era richiesto ai librai che i numeri fossero scritti *non per cifras, sed per litteras claras* (Pellegrini, 1972) ². Con veti come questo, era dunque prevedibile che il boom del calcolo in *figure degli Indi* non seguisse all'istante la pubblicazione del *Liber Abaci* ed al contrario dovesse trascorrere quasi un secolo, prima che la validità e l'efficienza dei nuovi metodi si affermassero davvero tra i mercanti; i loro affari in quell'epoca si avviavano a superare il limite della dimensione locale per espandersi globalmente al mondo conosciuto, comportando l'uso di tecniche computazionali più efficienti di quelle tradizionali: di qui la necessità

¹ Per un'interpretazione neurobiologica della questione vedi Dehaene et al. (Dehaene et al., 2004), per una lettura semiotica vedi Rotman (Rotman, 1987).

² I notai italiani, pur vincolati come i mercanti all'uso dei numerali romani, furono tra i primi in Italia e forse in Europa ad utilizzare i numerali indo-arabici, senza tuttavia farvi ricorso per eseguire calcoli. Il primato, per quanto è attualmente noto (Cherubini, 2004), va attribuito a **Giovanni Scriba**, genovese, che, nel XII secolo, a margine di un suo registro notarile, li utilizzò per annotare il compenso riscosso dai suoi clienti (Falco, 1960). Per ulteriori esempi nei secoli successivi, vedi Bartoli Langeli (Bartoli Langeli, 1996).

di apprendere le principali nozioni d'abaco e, di conseguenza, la nascita di scuole apposite (le *Scuole* o *Botteghe d'abaco*), in cui esse venivano insegnate. La parola «abaco» aveva gradualmente mutato il proprio significato grazie alla diffusione delle *figure degli Indi* ed alle più snelle e precise procedure di calcolo che si basavano sul loro utilizzo: perso il riferimento allo strumento di calcolo, ora indicava genericamente l'aritmetica commerciale.

Fino dal loro primo emergere, le scuole d'abaco si delinearono comunemente, insieme con le scuole di grammatica, come un livello di studi medio, successivo ad un ciclo scolastico di base, in cui gli studenti venivano alfabetizzati in latino e in volgare (Grendler, 1989; Gattei, 2005). Mentre la scuola di grammatica era votata a raffinare le competenze grammaticali in lingua latina ed allo studio letterario, retorico e logico, la scuola d'abaco era dedicata agli studi matematici. Essa rappresentava il punto più alto della formazione professionale nei settori bancario, amministrativo o commerciale; ed era anche frequentata da nobili e da futuri artisti: pittori, scultori o architetti che fossero (Franci, 1988).

I maestri d'abaco offrivano un vero e proprio piano di studi, costituito da corsi. Radford (Radford, 1995) illustra come, nella scuola di **Maestro Francesco Ghaligai**³ (nella Firenze di inizio XVI secolo), esistessero ben 7 corsi consecutivi: il primo sulle operazioni aritmetiche fondamentali di addizione, sottrazione e moltiplicazione; seguivano tre corsi sulla divisione con divisore a una, due e tre cifre; poi corsi sulle frazioni, sulla regola del tre ed anche sul sistema monetario della città.

Nel piano formativo di base delle scuole d'abaco si nota l'assenza dell'algebra (Franci e Toti Rigatelli, 1988; Franci, 1991), riservata all'insegnamento più avanzato, destinato agli studenti più promettenti con particolare attitudine alla disciplina o con l'aspirazione a diventare a loro volta maestri d'abaco. Radford ricorda inoltre come l'algebra apparisse a quest'epoca come uno strumento utile alla risoluzione di problemi di ordine non pratico, nonostante sia stata poi ampiamente utilizzata anche in ambito mercantile, grazie alla diffusione del *Liber Abaci* ed al contributo di Maestro Biagio (XIV secolo) nell'applicazione a problemi commerciali, come il calcolo degli interessi composti.

Grazie al proprio prestigio sociale, i maestri d'abaco furono determinanti anche per quanto riguarda la storia dell'algebra, dal momento che ne furono i veri promotori in questi secoli del Basso Medioevo, ed è grazie alle loro opere che oggi si ha documentazione sugli studi di algebra medievale, celata in testi dai nomi come *Trattato d'abaco* o *Trattato d'arismetica pratica* e simili. Anche la struttura ed il contenuto di queste opere variano molto: si va dalla semplice raccolta di problemi risolti a testi più elaborati, strutturati spesso in modo ana-

³ L'affermazione viene fatta citando un contratto fra il maestro e Giuliano di Buonguida della Valle, assistente del maestro; detto contratto è pubblicato in Goldthwaite (Goldthwaite, 1972).

logo a quello di al-Khawarizmi (sezione sul diritto ereditario esclusa) o di Fibonacci: presentazione dei casi di numero algebrico (*radice* o *cosa*, *censo* o *tesoro*, ossia il quadrato della cosa, ed i *denarii* o *numerus simplex*), la combinazione di questi numeri e la classificazione delle equazioni nei sei casi canonici, secondo al-Khawarizmi e Fibonacci.

Il successo dell'opera di Fibonacci alla lunga apparve notevole: grazie ai mercanti pisani, che diffusero le nuove tecniche di calcolo sulle rive del Mediterraneo anche tra commercianti di provenienza nordica, la nuova matematica giunse, per esempio, in Germania, dove fu fatta propria dai *Cossisti* (dalla parola *cosa*, usata per indicare l'incognita), in Francia, in Catalogna, nelle Fiandre, in Scandinavia, in Inghilterra, in Grecia. Pur essendo scritto ancora in latino, anzi proprio per questo, il *Liber Abaci* diventò lo spunto per studi di matematica pratica e commerciale e per l'insegnamento anche nelle lingue nazionali, incoraggiando la stesura di testi di aritmetica e di algebra di livello specialistico distinti da quelli utilizzati nelle università, come quello di Sacrobosco e simili, del tutto inefficaci ed anzi fuorvianti per un approccio pratico. All'inizio di questo processo la distanza fra maestri d'abaco e docenti universitari era incolmabile.

Van Egmond (Van Egmond, 1980a) ha elaborato una sintesi dei contenuti *standard* potenzialmente presenti nei libri d'abaco:

1. Matematica preliminare
 - a. Introduzione (invocazione religiosa o parenetico-didattica)
 - b. Numerazione (descrizione delle 9 cifre)
 - c. Le quattro operazioni applicate a interi e frazioni
 - d. Tavole di moltiplicazione (*librettine*), di quadrati e liste di unità monetarie
2. Problemi commerciali
 - a. Prezzi dei prodotti
 - b. Cambio
 - c. Misurazione
 - d. Baratto (semplice e composto)
 - e. Compagnie
 - f. Interesse e sconto
 - g. *Saldare* o *recare a termine*
 - h. *Legare* e *consolare* monete
3. Aritmetica ricreativa
 - a. Trovare un numero
 - b. Dividere un numero
 - c. Somme di monete
 - d. Risposte indirette (la domanda è posta da un terzo)
 - e. Trovare la quantità
 - f. Consegnare
 - g. Trovare un intero dalle parti
 - h. Trovare il primo dall'ultimo

- i. «se mi dai»
- j. Lavoro condiviso
- k. Serie e progressioni
- l. Gemelli
- 4. Geometria
 - a. Introduzione ad enti e a figure geometriche
 - b. Problemi geometrici
 - c. Problemi di misura
- 5. Sezione metodologica
 - a. Regola del tre
 - b. Falsa posizione semplice
 - c. Doppia falsa posizione (*elkatayn*)
 - d. Regola della cosa (algebra)
- 6. Miscellanea
 - a. Teoria dei numeri (di matrice boeziana)
 - b. Tariffe
 - c. Astronomia e astrologia
 - d. Calendario
 - e. Medicina
 - f. Letteratura

Van Egmond ribadisce che si tratta di un indice ipotetico da lui astrattamente ricostruito: non appartiene a nessun libro d'abaco effettivamente scritto, dal momento che ciascuno degli autori, più versato in un aspetto piuttosto che in un altro, ha presentato solo alcuni dei contenuti sopra indicati.

Il panorama dei maestri che si occuparono di questi temi è molto ricco e ben lontano dall'essere esplorato a fondo. Si accenna qui brevemente ad alcuni dei nomi più significativi ed al contenuto delle loro opere, ripartendoli per nazione di origine.

10.1. L'ITALIA

L'Italia conosce più degli altri stati europei il fenomeno delle scuole d'abaco e questo si manifesta soprattutto nelle zone di massima attività mercantile. Il più antico nome di un maestro d'abaco a noi noto (**Pietro da Bologna**) risale al 1265 e compare come testimone di un atto di vendita a uno scolaro guascone; anche suo figlio Giovanni fu maestro d'abaco, ma entrambi esercitarono privatamente (Zaccagnini, 1924). Il primo maestro d'abaco a noi noto assunto da un comune fu **Lotto da Firenze**, che operava a Verona ⁴; dal 1316 a Firenze i mae-

⁴ Per un ampio catalogo sui maestri d'abaco v. anche Ulivi (Ulivi, 2002b).

stri si costituirono in una gilda per poter avere rappresentanza politica, come era previsto dagli *Ordinamenti di Giustizia* di Giano della Bella del 15 gennaio del 1293; nel 1343 erano in funzione a Firenze sei scuole d'abaco per un totale di oltre 1000 ⁵ studenti di età compresa fra i 10 ed 12 anni, per lo più figli di artigiani e commercianti.

Con una popolazione così numerosa di docenti e studenti, è facile immaginare che fiorisse anche la trattatistica d'abaco, destinata non solo ai corsisti, ma a tutti coloro che nutrivano interesse per questi argomenti di matematica pratica con spunti teorici. Alten et al. (Alten, et al., 2000) stimano in oltre 200 i testi in volgare italiano concernenti il calcolo composti fra il 1290 e il 1500, per lo più scritti in grafia mercantile: il più antico ⁶, denominato *Livro del abbecho* risale circa al 1290, ma la maggior parte di questi testi data XIV-XV secolo, come si è visto anche per gli algorismi, e sarà proprio grazie alla loro fioritura che l'algebra trarrà nuovo impulso nell'Europa occidentale ⁷.

Oltre ad un paio di traduzioni in volgare della versione latina rispettivamente di Gerardo da Cremona e di Guglielmo de Lunis dell'*Algebra* al-Khawarizmi (Firenze, Biblioteca Nazionale, Cod. Fond. prin. II.III 198, ff. 86r-105v, databile al 1390 circa ed intitolato *Liber de algebrā e almucabala*; Biblioteca Apostolica Vaticana 291, 34r-41v, databile al 1313, scritto da **Pietro de Peni**, con il titolo *Libro di algebrā e almucabala* ⁸), nel XV secolo le traduzioni dell'*Algebra* aumentano di numero, ma diminuiscono in estensione: i traduttori si limitano alla trattazione dei sei casi di equazioni semplici e composte.

Significativo il caso di **Benedetto da Firenze** (1429-1479): Franci e Toti Rigatelli ed anche Ulivi (Franci e Toti Rigatelli, 1983; Ulivi, 2002a, 2006) fanno notare come, nel suo trattato *Practica d'arismetica* (Siena, Biblioteca Comunale, ms. L. IV. 21), egli offra una presentazione storica dell'algebra, distinguendo i differenti contributi dei vari autori presentati. Nel tredicesimo libro, dedicato alla parte generale, è contenuta l'esposizione dei sei casi generali, correttamente attribuiti non a Fibonacci, ma ad al-Khawarizmi, da lui conosciuto attraverso la traduzione di Guglielmo de Lunis. Alla stessa traduzione si riferì Raffaello Canacci, nei suoi *Ragionamenti di Algebra*; nell'adespota *Practica d'Aritmetica* (Firenze, Biblioteca Nazionale, Pal. 573 e Biblioteca Apostolica Vaticana, Ott. Lat. 3307) si cita invece al-Khawarizmi, ma non il suo traduttore. Franci e Toti Rigatelli sottolineano questo rinnovato interesse per il matematico arabo, dopo decenni di silenzio.

⁵ Nel 1348, prima della decimazione dovuta alla Peste nera, la popolazione complessiva della città era di 80.000 persone.

⁶ Vedi 8.2.2.

⁷ Un vasto catalogo di questi trattati è stato redatto da Van Egmond (Van Egmond, 1980a).

⁸ V. Franci (Franci, 2003a) e Hissette (Hissette, 2003).

10.1.1. I Toscani

Il più antico trattato, *Tractatus algorismi*, contenente una sezione sull'algebra in volgare fiorentino data 1307 e fu scritto a Montpellier ⁹ da **Jacopo da Firenze**; è documentato da tre manoscritti, studiati approfonditamente dalla Franci (Franci, 2003a) e in più riprese da Høyrup (Høyrup, 1999, 2000, 2006). La studiosa rileva alcuni aspetti (citazioni di monete di area italiana, lessico) che legano il testo alla trattatistica d'abaco precedente e non esclude un'influenza di Fibonacci «magari indiretta». Høyrup sostiene invece che si tratta di un testo privo di evidenti legami con la tradizione algebrica europea, ma anche lontano da quella araba: l'ipotesi più accreditata, a suo giudizio, è che Jacopo si sia formato in un ambiente romanzo, forse catalano, lontano comunque anche dal *Liber Abaci*.

Il contenuto dell'opera comprende la presentazione dei sei casi tradizionali di primo e secondo grado (in ordine differente rispetto a quelli di al-Khawarizmi, Abu Kamil e Fibonacci), più altri 14 omogenei o riconducibili a problemi di secondo grado. Altro aspetto degno di rilievo è la trattazione della normalizzazione del coefficiente del termine di secondo grado, passaggio dato invece per scontato nelle algebre suddette.

La successiva trattazione algebrica in volgare italiano (ultima parte del *Libro di ragioni* ¹⁰) risale al 1327/1328 e fu scritta dal fiorentino **Paolo Gerardi** sempre a Montpellier. L'autore (Van Egmond, 1978; Franci, 2003a) presenta direttamente 15 casi di equazioni, senza alcuna considerazione teorica preliminare, nemmeno sulla nomenclatura utilizzata; adottando regolarmente lo stesso schema, Paolo per ogni caso

1. espone la regola;
2. la applica a semplici problemi quasi mai connessi con argomenti commerciali.

Oltre alle 6 equazioni canoniche egli presenta le seguenti (riportate in *tab. 10.1.* per chiarezza in notazione simbolica, come le successive):

Tab. 10.1. – Casi aggiuntivi del Libro di ragioni di Paolo Gerardi.

7	$ax^3 = b$	10	$ax^3 = bx^2$	13	$ax^3 = bx^2 + c$
8	$ax^3 = Rb$	11	$ax^3 = bx^2 + cx$	14	$ax^3 = bx^2 + cx + d$
9	$ax = bx$	12	$ax^3 = bx + c$	15	$ax^3 + bx^2 = cx$

⁹ Il fatto che il testo, come il seguente, sia stato redatto a Montpellier dipende dal ruolo che la città rivestiva anche per i mercanti fiorentini, i quali avevano spesso succursali delle loro compagnie commerciali *in loco*.

¹⁰ Firenze, Biblioteca Nazionale, Codici Magliabechiani Classe XI, No. 87.

Al di là di errori ed inesattezze (ad esempio, la Franci ne nota nella risoluzione dei casi 12, 13, 14), il *Libro di ragioni* presenta innanzitutto la comparsa del lessico tecnico algebrico in volgare, ma evidenzia anche il tentativo dell'autore di cimentarsi con formule risolutive per equazioni di terzo grado non riconducibili a equazioni di secondo, e conosce un vasto successo, come dimostrano i molti testi successivi che vi fanno riferimento (Franci e Toti Rigatelli, 1985).

Un autore pressoché contemporaneo fu il fiorentino **Biagio “il vecchio”**, morto intorno al 1340, amico e insegnante di **Paolo dell'Abaco**. La notizia dell'esistenza di questo maestro viene da una citazione di Benedetto da Firenze, secondo il quale Biagio faceva un uso sistematico dell'algebra per la risoluzione di problemi commerciali.

I problemi proposti nel suo *Trattato di pratica d'arismetricha* (Karpinski, 1911; Pieraccini, 1983) sono più di quelli di Fibonacci: 114 in totale, dedicati a contenuti pratici (28) e teorici; gli spunti vengono dal commercio (calcolo di interessi, prezzi e quantità di merci) e da geometria, eredità, salari, cambi. Le equazioni risolventi proposte, oltre alle sei canoniche, sono riportate in *tab. 10.2.*:

Tab. 10.2. – Casi aggiuntivi nel Trattato di Biagio “il vecchio”.

7	$ax^3 = c$	10	$ax^3 = cx^2$	13	$ax^3 = c$
8	$ax^3 + bx^2 = cx$	11	$ax^3 = bx^2 + cx$	14	$ax^3 + cx = bx^2$
9	$ax^4 = cx^2$	12	$ax^4 + bx^2 = c$	15	$ax^4 = cx$

L'opera che conobbe la maggior popolarità fu però il *Trattato di tutta l'arte dell'abbaco* di **Paolo dell'Abaco** (1288 circa-1367) o **Paolo Dagomari**; leggendo l'indice dell'opera (Arrighi, 1964a; Piochi, 1984; Muccillo, 1987), si nota come essa riprenda fedelmente i primi 11 capitoli del *Liber Abaci*, arricchendoli con qualche ulteriore esempio di matematica divertente (Franci, 2003a); manca invece qualsiasi trattazione sistematica dell'algebra, che viene tuttavia utilizzata nella risoluzione di alcuni problemi di secondo grado: per spiegare questa assenza, la Franci ipotizza o l'esistenza di un altro trattato monografico perduto o un'infausta iniziativa dei copisti che ci hanno tramandato l'opera.

Interessante è la presenza nelle cosiddette *Regoluzze* (Arrighi, 1966b), procedimenti pratici per rispondere facilmente a semplici questioni di pratica mercantile, anche di quesiti di matematica divertente, come il problema su Roma e Costantinopoli, accompagnato da un disegno (che ne evidenzia l'intento didattico): le mura delle città, pur di forme diverse (un quadrato e un triangolo equilatero), sono isoperimetriche e misurano entrambe 18: qual è l'area di ciascuna città? ¹¹

¹¹ Un problema analogo sul calcolo dell'area di una città di forma regolare è in Alcuino (v. 1.5.).

Il primo trattato completamente dedicato all'algebra (*Aliabraa-Argibra*) scritto in volgare fu composto da **Maestro Dardi** da Pisa nel 1344 (Van Egmond, 1983; Hughes, 1987; Hunger Parshall, 1988; Franci, 2001): il titolo metà arabo metà toscano sembra suggerire che si tratti di una traduzione dall'arabo, ma, avverte la Franci, non ci sono prove in questo senso. Restano 4 copie integrali dell'opera nei manoscritti: Biblioteca Apostolica Vaticana, Chigi M. VIII.70 (in dialetto veneziano); Siena, Biblioteca Comunale I. VII. 17 (in toscano); Firenze, Biblioteca Mediceo-Laurenziana Ash. 1199 (in toscano); Parigi, Bibliothèque nationale, Ms. Heb. 1029 (traduzione in ebraico di Mordecai Finzi da Mantova); una quinta copia è conservata presso l'Università dell'Arizona.

L'opera si apre con una breve introduzione che ne spiega il titolo («è ditto *Aliabraa in rabesco, che in latino volgare vuol dire dichiarazione di quistione sottile*»); continua poi come di consueto con le nomenclature algebriche (*cosa, censo, cubo, censo di censo*). Il contenuto, come negli altri esempi, contempla parti sul calcolo (di radicali, prodotti e quozienti di monomi e di binomi), una batteria di 194 equazioni risolte con problema esemplificativo: per i contenuti geometrici, Dardi introduce una terminologia corrispondente a quella algebrica (*lunghezza lineale, ampiezza superficiale, grossezza chorporale*). Interessante

il procedimento utilizzato per le equazioni della forma $x^3 + (bx)^{\frac{3}{2}} = c$, che consiste nel porre $x^3 = y^2$ e nel trasformare così un'equazione cubica in una quadratica, risolvibile con il metodo di completamento del quadrato. Una volta trovati i valori delle radici, Dardi li eleva al quadrato prima di estrarne la radice cubica, complicando più che snellendo la procedura tradizionale. In altri casi, la formula indicata da Dardi ha validità limitata al caso in questione, come quella relativa all'equazione $x^3 + ax^2 + bx = c$, che è corretta solo a condizione che $a^2 = 3b$ (Scholz, 1990). Il trattato smentisce anche, fa notare la Hunger Parshall (Hunger Parshall, 1988), che la ricerca di soluzioni per equazioni di quarto grado sia iniziata solo più tardi, nel XVI secolo, ad opera di Ludovico Ferrari (1522-1565). Dardi mostra, sostiene ancora la Franci (Franci, 2001), un'ottima padronanza del mezzo algebrico e lascia un'eredità agli algebristi successivi, come è dimostrato dai trattati ¹² del XV secolo, derivati dal suo e conservati a Berlino, Roma, New York. Non si dimentichi, infine, la contaminazione con la traduzione dell'*Algebra* (v. 6.2.).

Dopo un trattato adespota (*Trattato d'algebra amuchabile*) conservato a Firenze presso la Biblioteca Riccardiana, cod. Ricc. 2263, pubblicato dalla Simi (Simi, 1994) e databile poco dopo l'opera di Dardi ¹³, ad emergere è l'opera, purtroppo mutila, di **Antonio de' Mazzinghi** (1353-1383), che, nato a Firenze da ricca famiglia originaria di Peretola, studiò alla bottega del celebre Paolo dell'Abaco, di cui fu discepolo carissimo al punto che il maestro gli lasciò in eredità

¹² Per un'analisi puntuale v. Simi (Simi, 1992).

¹³ Di diverso avviso è la Hunger Parshall (Hunger Parshall, 1988), che lo data al 1340.

la sua biblioteca di astronomia, e coltivò i suoi molteplici interessi scientifici nel campo dell'astronomia, dell'astrologia, dell'architettura e della prospettiva. Morì, a soli trent'anni, dopo essere diventato maestro a sua volta proprio nella bottega d'abaco di Paolo a santa Trinita (Ulivi, 1996; Ulivi, 2004).

Partendo dalla definizione di *termini d'algebra*, Antonio introduce le prime sei potenze dell'incognita: *cosa, censo, cubo, censo di censo, cubo relato o duplici cubo, cubo di cubo*; nota che si tratta di quantità in una proporzione continua e dedica ad esse un approfondito capitolo per mostrare le regole del calcolo algebrico (tra le altre, moltiplicazione e divisione di monomi e di polinomi), cosa che al-Khawarizmi aveva affrontato molto rapidamente e Fibonacci aveva completamente trascurato. Tra i 55 problemi a lui attribuiti, la maggioranza è di tipo astratto, lontano da tematiche commerciali: problemi del 10 (o del 12, 14, 16), *trovare due numeri tali che...*, *dividere un numero in due parti tali che...*, *trovare numeri in proporzione continua tale che...* Come si vede, la somiglianza con le batterie di problemi tradizionali è forte, anche se Antonio introduce alcune novità: innanzitutto, le condizioni poste sono originali; inoltre, egli utilizza una doppia incognita: alla *cosa* affianca la *quantità*; infine, affronta problemi di grande complessità, che risolve per intero retoricamente. Inoltre, ricorda Maracchia (Maracchia, 2005), Antonio riprende (l'aveva già fatto Fibonacci) l'uso delle radici *fictæ*, ossia negative, per problemi in cui si utilizza una variabile ausiliaria: in tal modo, accettando la soluzione negativa per la variabile ausiliaria, Antonio giunge ad una soluzione intera e positiva per quella principale.

Nel prosieguo del XIV secolo, gli sviluppi dell'algebra a Firenze furono caratterizzati essenzialmente dalla presenza di due correnti: una che, avviata da Leonardo Fibonacci, aveva trovato in Biagio e Antonio de' Mazzinghi i suoi maggiori esponenti; l'altra che si rifaceva all'opera di Gerardi, dedicandosi soprattutto alla risoluzione di equazioni cubiche. Alla fine del secolo si assistette ad una fusione delle due scuole, come attestano alcuni manoscritti adespota (Firenze, Biblioteca Nazionale, Fond. Prin.II.V.152; Conv. Soppr. G.7.1137), censiti da Franci e Toti Rigatelli (Franci e Toti Rigatelli, 1985).

La scuola fiorentina conosce un ulteriore progresso nel corso del XV secolo, come mostrano alcuni manoscritti: Siena, Biblioteca Comunale, L.IV.21; Firenze, Biblioteca Nazionale, Pal. 573; Biblioteca Apostolica Vaticana, Ott. Lat. 3307. Nel primo manoscritto è contenuto un trattato del 1463, denominato *Pratica d'arimetica* ed attribuito da Arrighi (Arrighi, 1965) a **Benedetto da Firenze** (1429-1479). In esso compaiono frequenti riferimenti non solo all'opera di Fibonacci, ma anche ad una traduzione latina di quella di al-Khawarizmi. Il secondo manoscritto, adespota e senza data, appartenne ad uno studente di Domenico d'Aghostino, che indica Leonardo Fibonacci tra i maestri più degni di fama. Il terzo, datato 1465, è diviso in due parti: *Libro di Pratica d'Arismetica* e *Trattato di Pratica di Geometria*. Il gruppo permette a Franci e Toti Rigatelli (Franci e Toti Rigatelli, 1985, 1988) di ricostruire l'attività di ben 3 algebristi:

Lucha di Matteo, un seguace di Antonio de' Mazzinghi; **Giovanni di Bartolo**, che collaborò con Brunelleschi nella costruzione della cupola di Santa Maria del Fiore, e **Domenico d'Aghostino**, un mercante con l'*hobby* dell'algebra¹⁴.

La Hunger Parshall (Hunger Parshall, 1988) ritiene che Benedetto sia un'importante figura per l'evoluzione dell'algebra: avrebbe introdotto nella tradizione algebrica, dunque alta, molte delle scoperte dei maestri d'abaco. Grazie ad esse, infatti, egli mise in dubbio la soluzione generale delle equazioni di terzo grado fino ad allora accettata; citò le abbreviazioni consuete per le varie potenze dell'incognita, contribuendo a segnalare l'imminente ed ineluttabile fine dell'algebra retorica alla al-Khawarizmi; infine, conclude la Hunger Parshall, l'opera di Benedetto, forte di due secoli di tradizione abacistica, segna il graduale abbandono delle dimostrazioni geometriche a favore di quelle algebriche.

Nel 1490, sempre a Firenze, **Raffaello di Giovanni Canacci** scrisse i *Ragionamenti d'Algebra*, un testo miscelaneo, costituito da due raccolte generali di regole d'algebra ed una di problemi svolti (Procissi, 1954): la prima parte ripropone in modo piuttosto fedele l'inizio della versione latina dell'*Algebra* di al-Khawarizmi fatta da Guglielmo de Lunis; la seconda parte si occupa di monomi e delle loro proprietà, studiando le prime 10 potenze dell'incognita; la terza parte è costituita da 94 problemi, soprattutto geometrici, risolti anche grazie alle (errate) formule di Gerardi. Nella seconda metà del secolo, due altri autori si occuparono di algebra: **Piero della Francesca** e **Luca Pacioli**; al loro lavoro è dedicato più ampio spazio (v. *Cap. 11*).

10.1.2. Roma

Roma sembra restare un ambiente poco attivo (Paravicini Bagliani, 1984), tranne che per quanto riguarda le copie di opere di contenuto accademico: dominano le copie di manoscritti di Sacrobosco (ben 21 su 30), poi quelle da Villedieu (3) e da de Lineriis (2), a seguire, testi più recenti come Giordano Nemorario, Nicola Oresme, Jacopo da Firenze. Attorno alla metà del XV secolo, tuttavia, si segnala la dinamica presenza di copisti ed intellettuali tedeschi, interessati a trascrivere le edizioni dei classici realizzate dagli Umanisti romani e fiorentini, come Lorenzo Valla (1405-1457) e Poggio Bracciolini (1380-1459); a incoraggiare questi contatti erano stati indubbiamente i Concili di Costanza (1414-1418) e Basilea (1431-1449), che avevano attratto ai confini della Mitteleuropa i dotti italiani al servizio della Curia (Bianca, 2001).

¹⁴ Va segnalato, per completezza, che nel manoscritto senese Benedetto cita altri maestri: *Mestro Giovanni che circha al 1440 morì. Furono molti altri maestri ne' tempi di questi, chome Maestro Michele padre di Maestro Mariano, Maestro Lucha, un altro maestro Biagio. E al presente [...] Maestro Chalandro, Maestro Bancho, Maestro Antonio de' Mancini, [...], Maestro Tadeo da Figbine, fratello di M° Antonio, [...], Maestro Lorenço da Champi, frate Mariotto de' Guiducci* (Cherubini, 2003).

10.1.3. L'Italia meridionale

Nella Biblioteca Vaticana (Ott. Lat. 1354, ff. 54v-55v) è conservato un brevissimo trattato di calcolo del secolo XI attribuito al monaco cassinese **Pandolfo di Capua**. L'autore propone l'interpretazione delle figure dei numerali indo-arabici attraverso il nome della cifra rappresentata (Gibson e Newton, 1995).

Esiste inoltre un *Algorismus* di **Pietro Paolo Muscarello** nolano redatto sempre in area campana, riccamente miniato e risalente al 1478 (Chiarini et al., 1972; Vecchione, 1999): oltre a contenuti di aritmetica mercantile, sono presentati alcuni quesiti di matematica divertente mutuati dalla tradizione e da Fibonacci (ad es. trovare chi fra i presenti nasconde un anello). L'opera, edita da Chiarini e conservata in una collezione privata, presenta, dopo un proemio di tono didattico-parenetico, le nove specie dell'algorismo (*numero*, *additio*, *substractio*, *mediatio*, *duplatio*, *multiplicatio*, *divisio*, *progrexio*, *radicum extractio*) e le quattro operazioni applicate esclusivamente alle frazioni (*ructi*), senza esempi con gli interi: vengono utilizzate senza alcuna presentazione la riduzione ai minimi termini delle frazioni (*partizione a schisare*) e la riduzione delle frazioni improprie non apparenti a somme di intero più frazione propria. Seguono la trattazione della regola del tre semplice e composta, con una serie di problemi (*ragioni*) di ambientazione rurale nolana; calcolo di equivalenze fra diversi sistemi metrici. Nasti (in Chiarini, et al., 1972) rileva che, nonostante la copiosa mole di errori (sia evidenti, perché dovuti all'imperizia matematica del copista, sia difficilmente emendabili, perché la dimostrazione stessa è erronea), l'*Algorismus* mostra un livello anche avanzato di interessi matematici: si dà ampio spazio al calcolo radicale; vengono presentati il calcolo della *radice pronica* $x^4 + x - n = 0$; $n \in \mathbb{N}$ ed un caso particolare di equazione di terzo grado: $x^3 = ax + b$. La Gengaro (in Chiarini, et al., 1972) realizza uno studio accurato della decorazione, sottolineandone lo stretto legame con il testo: le miniature infatti illustrano le situazioni descritte nei problemi e lo scritto fa talvolta anche riferimento alle immagini («come vedi disegnato»). Lo stile dell'artista (che la studiosa ritiene lo stesso autore delle decorazioni del ms. 1146 della Biblioteca Angelica di Roma, risalente al 1465-1472) è raffinato e certamente legato ad un ambiente cortigiano, in cui convivono, nota sempre la Gengaro, accenti meridionali e di tradizione classica ellenistico-romana con indicazioni settentrionali e lombarde, forse legate all'arte gotica internazionale¹⁵. La studiosa individua perciò nella corte napoletana il luogo di origine del manoscritto, più che la pur

¹⁵ Nell'area napoletana sono attivi artisti tardogotici lombardi, come, dopo il 1433, Leonardo da Besozzo (affreschi della cappella Caracciolo a san Giovanni a Carbonara a Napoli), che nel 1458 è nominato pittore di corte. Il legame del Regno di Napoli con la Lombardia si rafforza nel 1465 a seguito del matrimonio di Ippolita Sforza, figlia di Francesco, duca di Milano, con Alfonso II di Napoli.

vivace Nola, patria del copista, confutando anzi la proposta (peraltro forzata) avanzata da Chiarini e basata sulla presenza nel manoscritto di uno stemma araldico di una famiglia nolana.

Di origine e lingua calabrese è invece l'adespota *Tractatu di regula di quantitati* (Firenze, Biblioteca Medicea Laurenziana, Ash. 956) del 1485 circa, esemplato da ben 5 mani diverse: esso comprende tavole di moltiplicazione, teoria dei numeri, operazioni con interi e frazioni, progressioni, radici, regola del 3, «falsa oppositioni», «2 falsi oppositioni», geometria.

10.1.4. L'Emilia-Romagna

L'università di Bologna ha, soprattutto in età medievale, esercitato un ruolo di attrazione per studiosi di ogni provenienza. La presenza di algorismi in Emilia-Romagna non è massiccia, come nel caso della Toscana o di Roma; a Bologna sono presenti due copie dell'*Algorismus vulgaris* di Sacrobosco ed una del *Tractatus Algorismi* di Prosdocimo de' Beldomandi (v. 10.1.5.); a Cesena è conservato un codice in lingua francese, molto importante per la storia del calcolo d'Olttralpe (v. 10.2.): si noti come anche un centro oggi minore possa vantare nella sua storia passata contatti commerciali a largo raggio. Per quanto riguarda invece l'area modenese, la presenza di ben cinque codici di libri d'abaco ci dà la dimensione del fenomeno in quell'area (Barbieri e Fiori, 1993). Maestri di città neanche troppo vicine (Brescia, Firenze e Pisa) hanno lasciato traccia del proprio passaggio (Cattelani Degani e Mantovani, 2000); tre dei cinque libri riuniti nello stesso codice, benché redatti in tempi diversi (fra il 1420 e il 1457) costituiscono un vero e proprio trattato che affronta i vari argomenti del calcolo in una progressione di difficoltà che dipende da un'evidente ragione didattica. Gli altri due codici furono pubblicati il primo (*De' radice*) da Van Egmond (Van Egmond, 1986) e da Barbieri e Lancellotti (Barbieri e Lancellotti, 1986), il secondo (*Tratato d'arismeticha pratica*) ancora da Barbieri e Lancellotti (Barbieri e Lancellotti, 1987).

10.1.5. Il Veneto

Un'altra area geografica di forte dinamismo sul fronte commerciale era indubbiamente il Veneto: non stupisce quindi che proprio in questa zona si presentino trattati di matematica pratica.

Prosdocimo de' Beldomandi (Padova 1370-1428) si formò nelle prestigiose università di Padova, dove fu discepolo di **Biagio Pelacani** da Parma, e di Bologna; fu docente universitario (*magister artium* e *magister medicinae*), ma si occupò spesso anche di musicologia e di astronomia, di cui fu docente

ancora a Padova (Favaro, 1879). Scrisse un *Algorismi tractatus*, la cui diffusione si estende fino in Russia, a San Pietroburgo, grazie alla stampa.

Il secondo trattato è *Larte de labbacho*, pubblicato a stampa il 10 dicembre 1478 (Boncompagni, 1862-1863; Bagni, 2001b); lo stampatore dell'incunabolo sarebbe, per alcuni, il fiammingo Gerardo da Lisa (Rhodes, 1983; Bortolato e Contò, 1985), secondo altri Michele Manzolo, detto Manzolino (Federici, 1805; D'Acais e Porro, 1969; Romano, 1969; Picutti, 1977).

L'opera è un manuale in circa 60 pagine, destinato «a ciascheduno che vuole usare larte de la merchadantia chiamata vulgarmente larte de labbacho» e completato da un set di esercizi graduati per difficoltà.

Dopo una parte introduttiva dedicata alle definizioni di numero semplice, articolo e misto, l'opera tratta le operazioni, denominandole come appare in *tab. 10.3.*:

Tab. 10.3. – Nomenclatura delle operazioni ne «Larte de l'abbaco».

NOME DELL'OPERAZIONE NEL LESSICO DE «LARTE DE L'ABBACHO»	NOME CORRISPONDENTE NELLA TERMINOLOGIA ATTUALE	OPERATORE UTILIZZATO PER INDICARE L'OPERAZIONE
Iongere	Sommare	Et
Levare, cavare	Sottrarre	De
Moltiplicare	Moltiplicare	Fia
Partire	Dividere	In

Per ogni operazione, viene seguito rigidamente uno schema:

1. definizione (in linguaggio naturale);
2. numero di operandi necessari all'operatore (in genere, sono operazioni binarie);
3. eventuali condizioni da imporre a proposito di tali numeri;
4. algoritmo di esecuzione (compare, ad esempio, anche il metodo *a gelosia*).

L'importanza di quest'opera non consiste certo nell'originalità delle tecniche di calcolo, dal momento che essa mostra interamente la sua dipendenza dalla tradizione; il trattato rappresenta tuttavia pienamente l'importanza che ebbe l'introduzione della stampa a caratteri mobili, grazie alla quale fu possibile una capillare attività di divulgazione di questi contenuti. Dopo *Larte de labbacho*, uscirono in edizione a stampa nel 1483, a Bamberg un manuale di **Ulrich Wagner** (Schröder, 1996) e a Padova il già citato *Algorismi tractatus* di **Prosdocimo de' Beldomandi**; nel 1484 un manuale di **Pietro Borghi** (?-1491) a Venezia.

10.2. LA FRANCIA

Lo sviluppo della matematica in Francia negli stessi secoli non è altrettanto rigoglioso che in Italia: Van Egmond (Van Egmond, 1988) suggerisce, per comprendere la distanza fra i due paesi, di confrontare il rispettivo numero di manoscritti matematici di quel periodo da lui stesso catalogati (Van Egmond, 1980a); il rapporto è di 300 a 25: poco meno del 10%. Percentuali analoghe si riscontrano sia per i manoscritti di algebra sia per le traduzioni di al-Khawarizmi sia per il *Liber Abaci* di Fibonacci. Van Egmond ricerca le ragioni storiche che spiegano questo dato statistico: la principale di esse consiste nella diversa realtà socio-economica che caratterizzava la Francia tardo-medievale. Una fiorente tradizione culturale richiede la presenza costante di una classe di persone che si occupano di continuarla, di svilupparne idee e tecniche da condividere con contemporanei e posteri. In Francia non esisteva un gruppo con queste caratteristiche, paragonabile ai maestri d'abaco italiani ed ai loro seguaci in epoca successiva; coloro che avevano competenze matematiche, non avevano interessi nella sua applicazione pratica. Gli studiosi nelle università trascuravano verosimilmente anche lo studio dell'algebra (Beaujouan, 1954, 1999): l'unica eccezione è rappresentata da **Johannes de Muris** o **Jean de Murs** (1290-1350), docente alla Sorbona, la cui opera *Quadripartitum numerorum* [opus], scritta a Parigi nel 1343, contiene un breve trattato di algebra. L'opera, fortemente dipendente dall'*Algebra* di al-Khawarizmi, ma tratta, per la parte di problemi, dal *Liber Abaci* (L'Huillier-de Guibert, 1990), conobbe una certa fama e fu certamente utilizzata da **Rolando da Lisbona** (un altro studioso della Sorbona, canonico della Sainte-Chapelle e medico del duca di Bedford) per la composizione di un suo trattato coevo, dal titolo *Compendium artis arismetrice* (Smith, 1908; Charmasson, 1978), oltre che dall'autore anonimo di un manoscritto (Biblioteca Apostolica Vaticana, Vat. Lat. 3902, ff. 9r-53r) risalente al 1490, che presenta forti analogie con il *Quadripartitum*.

A dominare la scena, erano invece gli *Algorismi*, come quello di Sacrobosco o di Villedieu, massicciamente presenti, come si è visto, nelle biblioteche nobiliari e universitarie; per il resto, gli studiosi, anche quelli illustri, come Buridano e Oresme (Grant, 1965; Clagett, 1968), si dedicavano ad altre discipline scientifiche, per esempio all'astronomia o alla meccanica. La Spiesser (Spiesser, 2003) richiama tuttavia l'attenzione sulla presenza in Francia, all'Università di Montpellier proprio agli inizi del XIV secolo, dei citati maestri d'abaco fiorentini: Jacopo da Firenze e Paolo Gerardi.

Van Egmond cerca di individuare le cause dell'assenza di interesse per la matematica pratica e quindi di esperti: in Francia mancava una classe media, borghese, della stessa portata economica, sociale e politica di quella italiana e, per di più, l'effetto della guerra dei Cento Anni (1337-1453) fu quello di stremare l'economia francese. Soltanto dopo la conclusione delle ostilità, Lione, ad

esempio, sfidando Ginevra, conobbe il passaggio di commercianti stranieri grazie alle sue fiere che duravano varie settimane. Nel 1466 a Lione si contavano addirittura 15 succursali di mercanti e banchieri italiani.

Contro la tesi di Van Egmond sta la testimonianza di Francesco di Balduccio Pegolotti: nella sua *Pratica della Mercatura* del 1340 egli riferisce che i mercanti di Marsiglia intrattenevano regolari rapporti commerciali con Costantinopoli, Pera, Acri, Cipro, Firenze, Pisa, Genova e con l'Italia meridionale (per il grano); ed avevano costituito una ricca rete interna di distribuzione, i cui nodi principali erano Nîmes, Montpellier e Avignone, dove era forte la domanda di beni di lusso (Evans, 1936; Bresc, 2000).

Nello stesso senso, anche Vitale Brovarone (Vitale Brovarone, 1989) sottolinea il fatto che, nonostante il ritardo della comparsa della produzione abacistica, le prime traduzioni in francese (da Villedieu e da Sacrobosco) mostrano una certa indipendenza rispetto alla fonte, il che lascia supporre la diffusione di una pratica aritmetica volgare e l'esistenza di un lessico tecnico già sperimentato.

Distante da questo mondo di studi e di innovazioni più o meno consistenti, è la realtà dell'agrimensura, una disciplina che con il calcolo ha strettissima attinenza. **Bertrand Boysset**, un agrimensore della seconda metà del Trecento, ha lasciato due trattati ¹⁶ intitolati *Siensa de destrar* (Scienza della misurazione) e *Siensa d'atermenar* (Scienza della terminazione), nei quali illustra dettagliatamente l'uso dell'abaco a gettoni per le operazioni aritmetiche, ricollegandosi pienamente alla tradizione abacistica medievale (Portet, 1995).

10.2.1. La trattatistica d'abaco

Nel XV secolo giunse finalmente la fioritura di trattatistica d'abaco, ossia mercantile. Van Egmond (Van Egmond, 1988) indica 6 manoscritti in volgare francese tutti redatti in Francia fra il 1475 e il 1485:

- il *Traicte en arismetique* di **Jehan Adam**, del 1475 (Thorndike, 1926);
- la *raccolta di Lione* di **Mathieu Préhoude** del 1476;
- il manoscritto ¹⁷ di **Jean Fusoris**, scritto in Normandia nel 1477;
- il *Triparty* di **Nicolas Chuquet**, contenente anche una sezione sull'algebra;
- il *Traicte de algorithme* di **Jehan Certain**, scritto a Bilbao nel 1485;
- il *Cadran aux marchans*, derivato dal precedente.

Tutte queste opere rivelano tratti comuni che suggeriscono a Van Egmond l'appartenenza ad una stessa tradizione matematica di impronta francese. La Spiesser la individua in un gruppo di ben 15 trattati d'abaco (Spiesser, 1999b,

¹⁶ Carpentras, Bibliothèque Municipale, 327, ff. 33-64 v.

¹⁷ Lamassé lo data invece intorno al 1460 (Lamassé, 2005), (Lamassé, 2007).

2003). Essi non presentano caratteristiche in generale uniformi su tutto il territorio francese, anzi dipendono fortemente dal luogo d'origine. Come sotto-linea la studiosa, i manoscritti del Nord sono strettamente legati all'opera di Sacrobosco, che, come si è visto in 9.2., aveva insegnato a Parigi, e si trovano spesso accompagnati nello stesso codice da un trattato sull'astrolabio, attribuito a Jean Fusoris. Viceversa al Sud, i manoscritti condividono una stessa struttura, modellata sul primo testo di questo gruppo: il *Compendi del art del algorisme* di Pamiers (Parigi, Bibliothèque Nationale, Franç. Nouv. Acq. 4140). Per poter condurre proficuamente i suoi affari, il mercante doveva saper contare, calcolare e padroneggiare la regola del tre. I capitoli, pur con differenze nella difficoltà degli esercizi proposti, nota la Spiesser, offrono i seguenti contenuti:

1. **Sistema di numerazione** indo-arabico ed **operazioni con gli interi**.
2. **Operazioni con numeri frazionari**, nello stesso ordine di quelle sugli interi. seguono metodi di **semplificazione** e di **approssimazione** di radici quadrate e cubiche con un algoritmo utilizzato ancora fino all'Ottocento (v. 10.10.1.). Completano la trattazione le prove del nove e del sette.
3. **Regola del tre** con le sue applicazioni (per il cambio, gli interessi).
4. Regola di **falsa posizione**.
5. Regola di **doppia falsa posizione**.
6. Regola di **opposition e rémotion** (*oppositionis et restaurationis*, ma, nonostante il nome, non ci sono contenuti algebrici).

Come si vede, il tema della numerazione non viene minimamente affrontato ed anzi vengono contraddetti i principi dell'aritmetica astratta in questo ambito pratico. Un caso significativo in questo contesto è rappresentato dal frate domenicano **Barthélemy de Romans**, che si pone come tramite fra teoria e pratica. Dottore in teologia, docente di Sacre Scritture a Montpellier negli anni Trenta, esperto di algorismi, ma anche di aritmetica boeziana (non è il solo caso in quest'epoca), scrive nel 1450 il *Compendy de la pratique des nombres* (Spiesser, 2000, 2004), poi corretto e pubblicato qualche anno dopo dal chierico digionese **Mathieu Préhoude** a Lione e conservato a Cesena, Biblioteca Malatestiana, S.XXVI.6 (Muccioli, 1784; Zazzeri, 1887; Cassinet, 1993). Verosimilmente di Barthélemy sono anche alcuni trattati adespoti conservati nello stesso codice, che trattano il tema della proporzionalità, come gli era stato richiesto dai suoi allievi di Carcassonne (Spiesser, 1999a, 2003), interessati a questioni commerciali. Compose anche una *Speculativité des nombres*, per sostenere con un impianto teorico i suoi insegnamenti pratici (anch'essa è presente nel codice cesenate). Dal punto di vista del contenuto il *Compendy* non rivela grandi novità, né rispetto all'argomento trattato né ai metodi di calcolo impiegati, molto vicini, tra l'altro, al *Liber Abaci*. È la prospettiva di osservazione della disciplina che muta: il suo scopo, completamente diverso da quello di Leonardo Fibonacci, ad esempio, non è di insegnare procedure o risolvere problemi con precisione estrema, ma di riflettere sui problemi, in una sorta di «metamatemática»,

restando così lontano sia dalla proprie fonti (tutte di trattatisti d'abaco, Fibonacci compreso) sia da finalità pratiche, poiché, come dichiara l'autore stesso, egli vuole «*illuminer l'entendement de ceulx qui vouldroient veoir les subtilitez qui y sont contenues*».

10.2.2. Nicolas Chuquet

Nicolas Chuquet (1445-1488), della cui vita pochissimo è noto, a parte alcuni viaggi in Italia o forse solo stretti contatti con la cospicua comunità italiana di Lione, dove visse.

Il *Triparty en la science des nombres* o *Tripartitum numerorum* [opus], è universalmente considerata la prima algebra in lingua francese, benché il suo contenuto si estenda anche all'aritmetica. Fu pubblicata solo nel XIX secolo.

L'opera consta di tre parti, come si intuisce dal titolo, ossia: calcolo con numeri razionali; con irrazionali e teoria delle equazioni. Per la prima volta compaiono sia lo zero sia i numeri negativi (rappresentati come coefficienti di $\hat{m}$), utilizzati come coefficienti, esponenti e soluzioni, tranne che per le equazioni quadratiche (Spiesser, 2006).

Dal punto di vista lessicale, a Chuquet va attribuita l'introduzione del termine *premiers* per cosa e *champs* per censo, oltre che i nomi per le potenze di 10: *byllion* (10^{12}), *tryllion* (10^{18}) e *quadrillion* (10^{24}).

Van Egmond (Van Egmond, 1988) nell'affrontare il problema delle fonti per il *Triparty*, ne esclude la derivazione ebraica sia per la particolare vocazione astronomica degli studiosi francesi sia per la loro limitata conoscenza della lingua ebraica. Dal momento che Chuquet definisce l'algebra *rigle des premiers*, ossia regola della cosa, alcuni studiosi (Franci e Toti Rigatelli, 1985; Cattelani Degani e Mantovani, 2000; Spiesser, 2004) hanno pensato ad un legame con la tradizione coeva italiana. In particolare, ad un manoscritto in volgare italiano del Nord (Modena, Biblioteca Estense, Ital. 578) della seconda metà del XV secolo, quindi contemporaneo del *Triparty*. Il manoscritto modenese è diviso in tre parti, dedicate rispettivamente all'algebra, al calcolo di interessi, alla geometria pratica.

La parte sull'algebra è anch'essa articolata in tre parti: sulle regole di calcolo di radici, sui calcoli con radicali, sulle equazioni algebriche del tipo $x^{2n+m} + b^{xn+m} + cx^m = 0$ con $n > 0$, $m \geq 0$, declinate attraverso ben 16 casi, detti *capitoli*. Il testo, avvertono Franci e Toti Rigatelli, presenta affinità tanto sorprendenti con il trattato *al-Fakri* di **al-Karaji** (Woepke, 1853), da permettere di escluderne la casualità. Rispetto all'opera di Chuquet, invece, le differenze sono anche importanti: innanzitutto, nel manoscritto modenese non sono presenti esponenti negativi, poi i casi di equazioni sono più numerosi dei quattro di Chuquet, infine le batterie di problemi sono molto meno nutrite che nel testo francese.

In ogni caso, anche ammettendo che il manoscritto modenese non sia una dimostrazione sufficiente della dipendenza italiana del *Triparty*, va ricordato che la presenza di un problema dei resti di remota origine cinese del tutto identico ad uno presente (v.8.2.1.) nel *Liber Abaci* di Fibonacci, segna un ulteriore punto di contatto con la tradizione italiana. Chuquet aggiunge dettagli di contesto al problema di Fibonacci, dal momento che racconta la storia di una donna che porta N uova da vendere al mercato e si scontra con un uomo; questi rompe le uova e deve risarcirla: ovviamente la venditrice ignora il numero esatto di uova, ma conosce il resto della divisione per 2, 3, 4, 5 e 6 ossia 1; e per 7, ossia 0. Il risultato (uno dei possibili) trovato da Chuquet con un approccio di forza bruta (trovare il primo multiplo dispari di 7 divisibile per 3 e 5 con resto di 1) è 301; l'applicazione della regola (moltiplicare tra loro tutti i divisori con resto, aggiungere il resto al prodotto ed elevare al quadrato) porterebbe a una cifra spropositata, soprattutto se si pensa al contesto descritto da Chuquet: 519841 uova.

Chuquet ebbe un solo seguace, **Estienne de la Roche** (1470 – 1530), che scrisse una *Arismetique*, pubblicata in Francia tra il 1520 e il 1538.

10.3. IL BELGIO

Sono presenti almeno 14 algorismi nelle biblioteche di Bruxelles e di Brugge, prevalentemente. Il più diffuso è l'*Algorismus vulgaris* di Sacrobosco (otto copie); gli altri sono di Villedieu, Johannes de Lineriis e Nicolas de Oresme. È tuttavia conservato a Bruxelles presso la Bibliothèque Royale (10457), un *Algorismus*, datato 1445, in 496 versi in antico francese, attribuito al monaco benedettino dell'abbazia di Saint-Laurent a Liegi **Jean de Stavelot** (1388 circa-1449), miniatore ed autore di una cronaca della città di Liegi, di commenti alle Sacre Scritture e di una vita di san Benedetto (Waters, 1929).

Il testo comprende un prologo che spiega il significato e l'utilità dell'algorismo, poi vi è la consueta descrizione dei numerali (che sono tuttavia definiti *ebraici*), la presentazione di 8 operazioni (addizione, sottrazione, raddoppiamento, dimezzamento, moltiplicazione, divisione, progressione), un epilogo sul valore dello studio e sull'inesauribilità della conoscenza. Come si vede, il poemetto presenta forti somiglianze con l'opera di Sacrobosco, dimostrando una battuta d'arresto piuttosto che un progresso rispetto al passato. Il metro utilizzato è il distico di ottonari in rima baciata, realizzati (contro ogni aspettativa, vista la destinazione esclusivamente didattica dell'opera) in modo metricamente esemplare. La lingua risente di influenze locali: sono evidenti dalle rime le origini dell'autore, che si esprimeva certamente in dialetto di Liegi, nota Waters.

10.4. I PAESI DI AREA GERMANICA

10.4.1. Baviera, Austria e Svizzera

L'affermarsi del precapitalismo soprattutto nella zona della Baviera ed in genere della Germania meridionale, ma anche la solida tradizione culturale monastica e universitaria favorirono la comparsa di scuole d'abaco ¹⁸. Questo fenomeno è oggetto di studio da oltre due secoli, come Alten et al. sintetizzano (Alten, et al., 2000): Vogel (Vogel, 1954, 1973) e Kaunzner (Kaunzner, 1968; Kaunzner et al., 1992) si sono dedicati in particolare allo studio della vivace area meridionale (da Vienna a Regensburg, Augusta e Norimberga). Nel Sud della Germania, segnatamente in Svizzera, nel XV secolo operò anche **Jacobus Twinger** da Königshofen, che si limitò tuttavia a scrivere una sintesi dell'*Algorismus vulgaris* di Sacrobosco (v. 9.2.). Negli stessi anni oltre a dedicarsi agli studi delle *humanæ litterae*, gli Umanisti tedeschi recuperarono anche l'aritmetica tradizionale, di derivazione boeziana: è il caso dell'*Algorismus de minuciis* del benedettino **Johannes Keck** (1400-1450), esperto di arti liberali, prima docente all'Università di Vienna e poi rettore della facoltà delle arti (1429-31).

Nonostante queste tentazioni nostalgiche, già dal XIV- XV secolo si assistette ad un rapido sviluppo della matematica (Alten, et al., 2000), come testimoniano le copie di manoscritti provenienti da Spagna, Italia, Francia e persino dall'Inghilterra.

Già nel 1457 esistevano a Norimberga ben tre scuole d'abaco (*Rechenschule*) sostenute dai mercanti locali: Rebstock si interroga sui possibili testi in uso nelle scuole stesse e conclude che un contributo potrebbe essere giunto dall'Italia; egli pensa alla *Pratica della Mercatura* (Firenze, Biblioteca Riccardiana, Cod. 2441) ¹⁹ di **Francesco di Balduccio Pegolotti** e ad un trattato coevo, le *Rascioni de algorismo* (New York, Library of Columbia University, 17), di autore anonimo, ma di origine centroitaliana, probabilmente cortonese, fortemente ispirato dall'opera di Fibonacci, come riferisce Vogel (Vogel, 1977).

Johannes von Gmunden (1380-1442) e **Georg von Peurbach** (1423-1461), docenti dell'Università di Vienna, coniugarono gli studi matematici con quelli astronomici (Mundy, 1943; Binder, 1996). Peurbach scrisse anche un *Algorismus*, le cui copie manoscritte si trovano non solo in molte biblioteche tedesche ed austriache, ma anche polacche (v. allegato 2).

Peurbach studiò a Vienna e soggiornò a lungo in Italia. Ritornato in patria, ottenne la cattedra all'università di Vienna, dove intraprese lo studio dell'opera

¹⁸ Oltre ai già citati rapporti con Roma (v. 6.4).

¹⁹ Editto nel 1936 da Evans (Evans, 1936).

astronomica di Tolomeo. Il suo lavoro principale, le *Theoricae novae planetarum*, edite solo nel 1474, espone l'astronomia geocentrica dell'*Almagesto*, mediata dalla struttura cosmologica a sfere cristalline pensata da alcuni astronomi islamici del XIII e XIV secolo. Scrisse inoltre due algorismi sul calcolo con interi e frazioni (*De integris* e *De minutiis*). Morì prima di poter compiere un altro viaggio in Italia alla ricerca di manoscritti astronomici greci originali, lasciando al suo allievo **Regiomontanus** il compito di realizzare il progetto.

10.4.1.1. Johannes Müller von Königsberg (1436-1476)

Johannes Müller von Königsberg (latinizzato in Johannes Molitoris Regiomontanus) fu probabilmente il massimo astronomo del XV secolo (Zinner, 1990); originario della Franconia, studiò a Vienna e Lipsia ed entrò nella Facoltà di Arti proprio a Vienna nel 1457, dove incontrò il suo mentore, Georg von Peurbach, con cui si appassionò alle osservazioni celesti. A Vienna, Regiomontanus ebbe l'occasione di dedicarsi alla ricerca, alla copia ed alla lettura di manoscritti di matematica ed astronomia. Alla morte di Peurbach, ricevuto da quest'ultimo l'incarico di completare un'*Epitome* dell'*Almagesto* di Tolomeo²⁰, voluta dal cardinale **Giovanni Bessarione** (1402-1472), viaggiò per l'Italia e raggiunse anche Roma. Il legame mecenatesco con il cardinale (Mett, 1989; Monfasani, 1995) gli permise di avere accesso a molti altri testi, che spesso egli copiò e riportò poi con sé in Germania, perfezionando così la sua conoscenza del greco e della scienza antica; durante questo periodo, Regiomontanus costruì anche un astrolabio per il cardinale (King, 2006, 2007) e si dedicò alla trigonometria, che insegnò all'Università di Padova (Byrne, 2006); criticò in un *pamphlet* dal titolo *Disputatio contra Cremonensia in planetarum theoricam deliramenta* la *Theorica* o *Theoria Planetarum*, attribuita²¹ a Gerardo da Cremona, e scambiò un carteggio con l'astronomo italiano **Giovanni Bianchini** (1410-dopo il 1468), prezioso documento dell'evoluzione delle idee astronomiche, che a breve avrebbe portato alla teoria copernicana. Nel sesto decennio del secolo, Regiomontanus continuò a dedicarsi all'astronomia presso la corte ungherese di Mattia Corvino (1440-1490), compilando tavole astronomiche e trigonometriche. Dal 1471 si spostò a Norimberga, dove, proseguendo gli studi astronomici, voleva portare a termine anche le edizioni di molti testi classici greci, che, sostiene Folkerts, era intenzionato a ricostruire non tanto filologicamente, quanto semanticamente.

²⁰ L'opera fu conclusa nel 1463, data alle stampe nel 1496 e in seguito utilizzata anche da Copernico e Galileo.

²¹ L'autore non è noto, anche se l'opera viene attribuita a un astronomo del XIII secolo, Gerardo da Sabbioneta, da Boncompagni (Boncompagni, 1850-1851) e da Nallino (Nallino, 1932); per uno studio più completo della questione vedi Kren (Kren, 1977), che contiene anche l'analisi della *Disputatio*, e Pedersen (Pedersen, 1981).

Morì a Roma dove era stato convocato da papa Sisto IV per lavorare alla riforma del calendario giuliano, prima di poter incominciare l'opera.

Regiomontanus non compose scritti originali di contenuto algebrico, ma, come si è visto in 6.1., possedeva una copia datata 1456 (New York, Columbia University, Plimpton 188), forse trascritta di suo pugno (Folkerts, 1980; Hamann, 1980) della traduzione dell'*Algebra* di al-Khawarizmi, nella versione *Modus*; nello stesso manoscritto è presente anche una copia del *Quadripartitum* di Johannes de Muris (v. 10.2.). Gli esercizi che completano il testo, secondo Folkerts, potrebbero essere gli stessi presenti in appendice in un altro manoscritto contenente una copia dell'*Algebra* di al-Khawarizmi (Madrid, Biblioteca Nacional Cod. lat. 9119). Nella stessa appendice è applicato un procedimento analogo a quello cinese *ta-yen* ad un problema di resti (n. 60), che era noto anche a Fibonacci (v. 8.2.1.) ed a Chuquet (v. 10.2.2.); sarebbe poi stato ripreso anche da Fridericus Gerhart (v. 10.4.1.2.), con gli stessi dati numerici ²² di Regiomontanus, diversi da quelli usati dai primi due. È un aspetto interessante di questo poliedrico studioso: il suo ruolo di mediatore fra Italia e Mitteleuropa nella tradizione matematica. La competenza algebrica di Regiomontanus, maturata sui testi medievali, lo spingeva ad adottare delle procedure per semplificare calcoli ed operazioni: una di esse fu il ricorso alla simbologia (essenzialmente abbreviazioni dei nomi degli enti o degli operatori) per indicare l'incognita, il suo quadrato e l'uguaglianza, come è attestato ampiamente sia nel Plimpton 188 sia nel carteggio col Bianchini. Folkerts, per questa ragione, lo ritiene il vero iniziatore dell'algebra simbolica (Folkerts, 1996c), dal momento che la utilizzò ben prima di Widmann, Rudolff (v. 10.4.) e Viète.

10.4.1.2. Fridericus Gerhart o Amann?

Il primo libro d'abaco tedesco è denominato *Algorismus Ratisbonensis* e fu composto, secondo la alcuni (Vogel, 1954; Kaunzner, et al., 1992; Alten, et al., 2000), dal monaco **Fridericus Gerhart**, da identificarsi con **Fridericus Amann** (1400-1464 circa) del monastero benedettino di St. Emmeram vicino Regensburg; nella biblioteca lo studioso aveva a disposizione un notevole patrimonio manoscritto di testi matematici ed astronomici, ma intratteneva contatti anche con l'università di Vienna. L'opera, che contiene, oltre alla risoluzione dei sei casi di equazioni di secondo grado secondo al-Khawarizmi ²³, una cospicua raccolta di problemi (*Practica*) tratti dal campo del commercio, del cambio e simi-

²² Plimpton 188 f. 93r: «*Habeo numerum quem primo divisi per 3 et manserunt 2 residua, item divisi etiam per 5 et manserunt 4; divisi ipsum per 7 et mansit unum*», ossia $N \equiv 2 \pmod{3}$ $\equiv 4 \pmod{5}$ $\equiv 1 \pmod{7}$.

²³ L'incipit contiene anche il nome dell'autore arabo: «Maometto nel libro di algebra e almucabala ha detto queste parole: censo, radice, numero» [*Machmet in dem puech algebra vnd almalcobula bat gespruchet diese Worte: Census, radix, numerus*] (citazione in Kaunzner, 1992).

li, è testimoniata da sei manoscritti (parte in latino, parte in tedesco – München, Bayerische Staatsbibliothek, Lat. 14908-, parte in una lingua ibrida), databili a partire dal 1449-1450. Contiene anch'essa un esempio di problema dei resti di tradizione sino-italiana.

Di differente avviso è invece un solo studioso, Gerl (Gerl, 1999), secondo il quale Fridericus Amann non coinciderebbe con Fridericus Gerhart. Amann avrebbe studiato a Lipsia a partire dal 1427, dedicandosi alla stesura di opere di scienze naturali (München, Bayerische Staatsbibliothek, Lat.14111, 14504, 14583, 14622, 14783, 14908) e teologiche; si sarebbe poi trasferito al monastero di St. Emmeram vicino a Salisburgo, dove sarebbe rimasto fino alla morte, fatta eccezione per un breve soggiorno a Vienna. Fridericus Amann avrebbe scritto nel 1461, sempre secondo Gerl, il più antico trattato di algebra in lingua tedesca, legato alla tradizione delle scuole d'abaco italiane, nel quale veniva applicata una semplice notazione simbolica ²⁴. Secondo Gerl, l'*Algorismus Ratisbonensis* sarebbe stato invece un manuale adottato presso la scuola del monastero di St. Emmeram di Regensburg e lì conservato dal 1450. La tesi è suggestiva, sia per l'omonimia dei due monasteri sia per quanto emerge dal confronto degli *incipit* di alcuni dei manoscritti sopra citati, che coincidono per i codici di Monaco, mentre si differenziano per quello austriaco (St. Florian, Stiftsbibliothek, XI.619) e il ratisbonense (Regensburg, Bischöfliche Zentralbibliothek, Musikbibliothek Prose, TH 98). Contro questa tesi, si può tuttavia obiettare che:

1. non si possono escludere omissioni o aggiunte nelle varie copie del manoscritto, di cui non esistono né un'edizione critica né uno stemma della tradizione;
2. le citazioni negli incipitari non sono sempre consistenti fra loro, anche nel caso di manoscritti di autore accertato;
3. il titolo in alcuni manoscritti di Monaco è *Algorismus Ratisponentis* (sic);
4. Nel codice Lat. 14783, oltre all'*Algorismus Ratisbonensis*, c'è il trattato *De motibus planetarum et stellarum et de earum passionibus* su cui sono riportati il nome *Fridericus* e la data *Regensburg 1450*;
5. nel codice austriaco è contenuta anche una *Cronica* di Regensburg.

10.4.1.3. I fautori di Sacrobosco: Johannes de Werdea e Cuspianus

Hieronimus von Mondsee (1420-1475), più noto come **Johannes Fabri de Werdea** (oggi Donauwörth) o Johannes Faber, insegnò a Vienna le arti liberali con il nome d'arte di **Magister Johannes de Werdea** tra il 1445 e il 1451. Fu verosimilmente in questi anni che trascrisse l'*Algorismus vulgaris* di Sacrobosco, di cui è conservata una copia a Vienna (Österreichische Nationalbibliothek, 3816). Poi entrò in un convento benedettino a Mondsee in Austria e diventò priore, occupandosi, fino alla morte, di opere teologiche e liturgiche.

²⁴ Citato anche da Curtze (Curtze, 1895).

Anche **Johannes Cuspius** (1473-1529) scrisse un algorismo, derivato dall'opera di Sacrobosco, nel 1486, e corredato di tavole di corrispondenza tra numerali romani ed arabi (l'unica copia è nel manoscritto conservato a Wolfenbüttel, Herzog August Bibliothek, 16.1 Astronom. 4°).

10.4.2. Un breve trattato d'algebra del XV secolo

Vogel (Vogel, 1981) ha pubblicato un'algebra risalente al 1481 (inserita nel già ripetutamente citato manoscritto C80 di Dresda, ff. 368-378), che inizia con l'esaltazione dell'arte del calcolo «*Meysterliche kunst dasß ist meysterlich zcu wysßnn rechnung zcumachnn*» (Arte magistrale, cioè conoscere magistralmente il far di conto): l'autore, pur attribuendo l'origine dell'algebra agli Arabi (*dicit Arabs*), si dimostra poco informato su ogni altro aspetto; *al-jabr* sarebbe una deformazione del nome del luogo di nascita (*Jabrin*) erroneamente attribuito a Maometto, confuso, in ragione dell'omonimia, con il profeta.

L'opera comprende 9 sezioni:

1. Presentazione dei 6 casi canonici, più altri 18, denominati, in seguito, *adequaciones* e caratterizzati da coefficienti numerici unitari: in pratica, l'anonimo autore indica su questi casi, semplificati, la procedura risolutiva, che poi applica anche ad equazioni con coefficienti diversi da 1;
2. Prodotti di monomi (ad esempio, $4x \cdot 5x^3 = 20x^4$) e di polinomi;
3. Nomenclatura algebrica (*Dingke, Czensi, Chubi, Wurzell, Zahl*), con le relative abbreviazioni simboliche: ∂ , $c\partial$; *chub*, *W*, *N*;
4. Risoluzione con esempi numerici delle *equaciones* corrispondenti alle *adequaciones* della prima sezione: ad esempio, all'*adequacio* $x^4 : x^2 = x^2$ corrisponde l'*equacio* $4x^4 : x^2 = x^2$;
5. Analisi approfondita degli esempi risolti in precedenza;
6. Ripetizione della nomenclatura e della simbologia;
7. Precisazioni su passaggi delle soluzioni precedenti;
8. Esempi;
9. Problemi suddivisi per tipologia:
 - a. Cercare un numero
 - b. Dividere un numero in due parti
 - c. Viaggio d'affari o il giardino di frutta
 - d. Eredità di gemelli
 - e. Calcoli di interessi
 - f. Calcoli societari

10.4.3. Il ruolo di Lipsia

Dopo la vivace ripresa di studi scientifici nell'area meridionale, anche in zone più settentrionali della Germania, come Lipsia, si assistette ad un vero e proprio risveglio. Nel 1481, come si è visto in 1.4.2, fu composta proprio qui la prima vera *Algebra* in lingua tedesca, il più importante manoscritto²⁵ per la storia dell'algebra in Germania; nello stesso codice sono conservati gli appunti delle lezioni di algebra²⁶ tenute da **Johannes Widmann von Eger** (1460-1500 circa) di origine boema, ma attivo all'Università di Lipsia negli anni Ottanta. Egli compose il popolarissimo *Behend vnd hüpsch Rechnung uff allen Kauffmanschaften* (Calcolo facile e piacevole di tutta l'arte del commercio), stampato una prima volta nel 1489 poi ancora nel 1508 a Pforzheim, nel 1519 a Hagenau, nel 1526 ad Augusta; in esso, oltre alla presenza della tripartizione dei contenuti, tipica della trattatistica araba (teoria delle operazioni; esempi numerici con problemi tratti dal mondo mercantile; geometria), vengono utilizzati per la prima volta i simboli + e – per indicare l'eccedenza e la mancanza in problemi di ambito commerciale; oltre a questi, Widmann introdusse anche segni per rappresentare le potenze dell'incognita da 0 a 4. Gli effetti positivi di questa innovazione si presentarono rapidamente, ma sarebbero stati ancora più evidenti nei secoli successivi (Kaunzner, 1996). Anche **Adam Ries** (1492-1559) lesse il manoscritto C80 e, come Widmann, lo annotò; conosciuto come *Rechenmeister*, il corrispondente tedesco di maestro d'abaco, Ries compose nel 1524 un trattato (all'epoca rimasto manoscritto) dal titolo allusivamente algebrico *Die Coß* (la cosa), nel quale l'autore fa esplicito riferimento all'*Algebra* di al-Khawarizmi (Lehmann et al., 1992; Gebhardt, 1994; Luderer, 2004).

A Strasburgo, nel 1525, **Christoff Rudolff** (1499-1545) pubblicò il *Behend vnnnd Hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebra so gemeincklich die Coss genent* (Calcolo facile e piacevole attraverso le regole dell'arte dell'algebra, comunemente indicata come «la cosa»), prima opera algebrica stampata in tedesco a introdurre il termine *Coß*, per indicare l'incognita. Rudolff introdusse anche il simbolo moderno per indicare la radice quadrata (*vinculum*), ancora privo, tuttavia, del tratto orizzontale, che sarebbe stato aggiunto pochi anni dopo (1544) dal matematico e teologo luterano **Michael Stifel** (1487- 1567) nel suo *Arithmetica integra*.

I Cossisti²⁷ adattarono infatti i contenuti alle esigenze socio-economiche della Germania, snellendo le procedure di calcolo: tradussero le abbreviazioni

²⁵ Nel C80 sono contenute anche copie dell'*Aritmetica* di Jean de Murs, dell'*Aritmetica* di Boezio, dell'*Algorismus* di Johannes Hispalensis, del *de Minucius* di Giordano Nemorario, di vari algorismi anonimi, della traduzione di Roberto di Chester dell'*Algebra* di al-Khawarizmi.

²⁶ Ne esiste anche una copia a stampa conservata sempre a Lipsia, Universitätsbibliothek, Cod. 1470.

²⁷ Su Andreas Alexander, docente a Lipsia v. Folkerts (Folkerts, 1996a).

dei termini *cosa*, *census*, *cubus* in simboli, superando il simbolismo già introdotto da Giordano Nemorario, che mai aveva preso piede davvero. I simboli + e – furono usati per indicare le operazioni di somma e differenza solo a partire dal 1514, data di pubblicazione ad Anversa del manuale di **Gielis van den Hoeccke** *Een sonderlinge boeck in dye edel conste Arithmetica*, cui seguirono nel 1518 *Ayn new Kunstlich Buech* di **Henricus Grammateus** o Heinrich Schreyber (Weidauer, 1996) e *The Whetstone of Witte* di **Robert Recorde** nel 1557 in Inghilterra, in cui è presente anche il segno di uguaglianza (Cajori, 1928).

10.4.4. La difficile eclissi dell'abaco

Per completezza, si segnala un testo a stampa dal titolo *Algorismus linealis* del 1504; il suo autore, **Henricus Stromer** (1476-1542) o **Heinrich Auerbach**, fu studioso di medicina e matematica, rettore e decano all'Università di Lipsia, città dove sposò la figlia di un ricchissimo commerciante. Tra le altre cose, fu il fondatore del locale *Auerbach Keller*, frequentato negli anni 1765-1768 anche da Goethe, che qui ambientò una scena del Faust. Forse questi contatti con il mondo mercantile indussero Stromer a riproporre l'aritmetica d'abaco, a dispetto delle innovazioni proposte dai Cossisti. Copie del testo si trovano a Varsavia (Biblioteka Narodowa 3392) e a Lipsia (Universitätsbibliothek Cod. 1296). La notizia di numerose versioni a stampa in breve intervallo (Vienna, Singrenius, 1514; Cracovia, Vietor, 1524 e Scharffenberg 1526; infine Lipsia, Mart. Herbipol., senza anno) testimonia la diffusione dell'opera, favorita dal residuo scetticismo della classe mercantile nell'adottare le nuove procedure di calcolo. Si noti, tuttavia, che, paradossalmente, il testo si intitola *algorismus*, termine ormai definitivamente associato al significato di «procedura di calcolo».

10.5. LE FIANDRE

Esiguo il patrimonio aritmetico testimoniato sia da algorismi sia da trattati d'abaco, a fronte della vocazione prevalentemente commerciale della regione, almeno fino all'introduzione della stampa.

10.6. L'INGHILTERRA

10.6.1. *Thomas Bradwardine: il doctor profundus*

La vita di questo autore è poco conosciuta, data la scarsità di fonti al riguardo; si sa per certo che nel 1321 diventò *fellow* nel Merton College di Oxford e ottenne il suo baccellierato: perciò calcolando a ritroso, la data di nascita verosimile si colloca intorno al 1290, ma nulla di definitivo si sa del luogo di nascita, che forse fu Chichester, vicino Southampton. Rimase ad Oxford fin verso il 1335, continuando una prestigiosa carriera accademica e dedicandosi agli studi di logica, matematica e filosofia. Fu la carriera ecclesiastica a portarlo a Londra, dove arrivò intorno al 1337 prima come cancelliere della cattedrale di St. Paul, poi come cappellano di Edoardo III Plantageneto (1312-1377), il re che iniziò la guerra dei Cento Anni nel 1340. Bradwardine verosimilmente prese parte alle operazioni militari, iniziate sulla costa fiamminga e normanna. Sull'onda dei successi inglesi a Crécy ed a Neville's Cross del 1346, Bradwardine scrisse un *Sermo epinicius* in onore del re. Fu eletto arcivescovo di Canterbury nel 1348, ma l'elezione non fu ratificata dal re fino al 1349; egli tuttavia non poté mai esercitare la sua missione pastorale, perché, di ritorno da Avignone, dove era stato consacrato, in piena Peste Nera, si ammalò e morì.

Si occupò di dinamica (*De proportionibus velocitatum in motibus*), riprendendo il pensiero aristotelico, ma tentando di fornirne anche una giustificazione matematica (Biard e Rommevaux, 2005). Ad esse aggiunsero anche una *Aritmetica* ed una *Geometria*, di chiara derivazione boeziana, con influssi di Aristotele, Euclide e Campano da Novara.

10.6.2. *Gli algorismi inglesi*

Ripercorrere la storia dell'evoluzione della matematica tardomedievale in Inghilterra significa in larga misura seguire le vicende delle sue università (soprattutto Oxford e Cambridge), dal momento che i massimi esponenti di queste discipline gravitavano intorno all'ambiente accademico, come anche la collocazione attuale della maggior parte dei manoscritti di *Algorismi* attesta indirettamente (v. allegato 2).

I nomi degli autori ricorrenti sono quelli di Sacrobosco e Villedieu, ma molti sono anche i manoscritti adespoti o i gruppi di poche unità di autori meno ricorrenti, ma di verosimile origine inglese, come **Johannes Kyllingworth**, **Ricardus Anglicus**, **Ricardus Dove**, **Johannes Somur**.

10.6.3. Johannes Kyllingworth

Al nome di Johannes Kyllingworth o Killingworth rispondono ben due studiosi del Merton College di Oxford (Karpinski, 1914b) vissuti uno del XIV e l'altro nel XV secolo, anche se la stranezza di questa coincidenza ha fatto propendere Karpinski per l'ipotesi che si tratti della stessa persona cui sarebbero stati riferiti dati biografici confusi. Verosimilmente Johannes sarebbe entrato nel Merton College nel 1432; nel 1441 autorizzò la biblioteca ad accogliere la donazione di libri (tra questi un *Novum opus super Arithmetica*) dal duca di Gloucester, Humphrey. Morì, secondo quanto è scritto sulla lapide nella cappella del Merton, nel 1445.

L'unico manoscritto conservato del suo *Algorismus* si trova a Cambridge, nella University Library (Ee.iii.61), ma nel codice sono contenute anche tavole astronomiche. Aritmetico-astronomico è anche il restante contenuto del codice.

Il trattato è diviso in tre parti, come spiega lo stesso autore:

1. operazioni con gli interi (*integri*): *addicione, subtraccione, duplicacione, mediacione, multiplicacio, diuisio et radicum extraccio*;
2. operazioni con frazioni decimali (*minucia*) e sessagesimali (*fracciones physicae*): viene trattato con particolare cura il calcolo con frazioni attinenti ad argomenti di astronomia ed astrologia;
3. tavole di calcolo per numeri interi e frazionari (di entrambe le basi).

Nelle prime due parti viene insegnato l'uso di uno strumento di calcolo denominato *lapis calculatorius*, che sembra riprodurre le tecniche d'abaco gerbertiane.

L'importanza di questo trattato nel contesto inglese, ricorda Karpinski, è fondamentale: si tratta di uno dei più autorevoli studiosi della sua epoca, letto e ammirato anche nelle generazioni successive; tuttavia, nonostante venisse secoli dopo Adelardo di Bath, Roberto di Chester o Sacrobosco, l'autore scelse di riproporre uno strumento analogo all'abaco.

10.6.4. Magister Ricardus Anglicus

A questo autore ²⁸ sono attribuiti alcuni manoscritti in Germania ed in Inghilterra, conservati a Berlino (Staatsbibliothek, Ms. lat. qu. 587), a Erfurt (Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek, Ampl. Quart. 369) e a Londra (British Museum, Harley 3735 e Royal 12 C XVII), dal titolo *Algorismus minuciarum vulgarium* o *de minuciis*, dedicati dunque alle operazioni con le frazioni. Busard (Busard, 1998) ha pubblicato l'edizione critica di questo testo, basata sul primo dei due manoscritti

²⁸ Da non confondersi con altri due omonimi, uno, bolognese, canonista e l'altro, parigino, medico.

londinesi, collazionato con altri ²⁹, a suo dire tutti adespoti, che recano lo stesso *incipit*: «*Minutiarum vulgarium scribes superius numeratorem*». L'opera, riferisce Busard, risale al XIII secolo ed è posteriore all'*Algorismus demonstratus* di **Magister Gernandus**, le cui regole sono qui citate. Sempre secondo Busard, sarebbe anteriore al *De minutiis* di Johannes de Lineriis, molto più diffuso.

10.6.5. Altri autori

A un **Ricardus Dove** sono attribuiti ben due algorismi presenti nello stesso manoscritto londinese (British Museum Sloane 513), ma non esistono notizie significative sul suo conto. Anche a **Johannes Somur**, un frate minorita, è attribuito un trattato, intitolato *Algorithmus et calendarium* del 1380, di cui resta una sola copia a Londra presso il British Museum (Cotton Vespasianus E. VII). La prefazione al calendario è dedicata alla principessa di Galles Johanna, madre del futuro re Riccardo II Plantageneto (1377-1399).

10.6.6. *The Art of Nombrynge e The Craft of Nombrynge*

The Art of Nombrynge (Oxford, Bodleian Library, Ashmole ms. 396, ff. 48-56) è una traduzione inglese quattrocentesca dell'*Algorismus vulgaris* di Sacrobosco, di cui riproduce fedelmente il contenuto (Steele, 1922; Steele, 1924; Sleight, 1942; Swetz, 1994).

The Craft of Nombrynge (Londra, British Museum, Egerton ms. 2622, ff. 136-165; New York, The Library of George A. Plimpton, Columbia University, 259, 33r-53r; 57r-77) è invece la traduzione del *Carmen de algorismo* di Alexandre de Villedieu. Mantiene gli stessi contenuti dell'opera tradotta (di cui conserva i titoli degli argomenti in latino), senza addentrarsi nell'estrazione di radice. L'invenzione dell'algoritmo è attribuita al re indiano Algor, da cui il nome (Steele, 1922; Steele, 1924; Acker, 1993; Swetz, 1994).

10.6.7. *A Treatise on Arithmetic*

Questo manoscritto (ms. Cambridge Ul Ll 4 14), attualmente in fase di edizione da parte di Silvia Toniato dell'Université de Poitiers, è stato finora interpretato (Acker, 1993) come l'unione di versioni parziali del *Craft* e dell'*Art*.

²⁹ I manoscritti usati da Busard sono i due tedeschi sopra citati, il Royal (che risultano tuttavia ad oggi attribuiti a Ricardus Anglicus) ed un altro conservato ad Oxford, Bodleian Library, Tanner 192.

La studiosa ha invece evidenziato (Toniato, 2007) la differenza dell'aritmetica del manoscritto di Cambridge rispetto alle altre due, in particolare per la parte dedicata alle frazioni, argomento sul quale non sono segnalate altre aritmetiche in medio inglese. La trattazione presenta carattere di originalità anche per via della concezione delle frazioni come fattorizzazioni invece che come rapporti.

10.7. I PAESI SCANDINAVI

10.7.1. *Hauksbók*

Lo *Hauksbók* (Libro di Haukr) fu scritto dall'islandese *Haukr Erlendsson* (?-1334), non tutto di suo pugno, ma anche con l'aiuto di assistenti, dal momento che si tratta di una raccolta di molte antiche saghe islandesi (Bekken e Christoffersen, 1985). Una di queste sezioni (circa 6-7 pagine) è denominata *Algorismus* e rappresenta il più antico testo di contenuto matematico scritto in una lingua nordica; non si tratta però di un testo originale: è una traduzione dal latino in islandese di parti del *Carmen de algorismo* di Alexander de Villedieu, del *Liber Abaci* di Fibonacci e dell'*Algorismus vulgaris* di Sacrobosco. Gli studi più recenti affermano che la traduzione fu probabilmente realizzata nel monastero di Videy vicino a Reykjavik nel ventennio 1240-1260, datazione possibile grazie allo studio calligrafico (Bjarnadóttir, 2004). Per un'analisi delle risorse manoscritte in Islanda, v. Eggertsdóttir (Eggertsdóttir, 1998).

10.7.2. *Svezia e Danimarca*

Un piccolo numero di manoscritti è conservato nelle biblioteche (soprattutto universitarie) di questi due paesi, oltre all'*Hauksbók*. Si tratta anche in questo caso quasi esclusivamente di copie del trattato di Sacrobosco. Per un'analisi della consistenza del patrimonio manoscritto delle biblioteche svedesi, v. Nilsson Nylander (Nilsson Nylander, 1998).

10.8. LA PENISOLA IBERICA

Dopo essere stata per secoli un *melting pot* di tradizioni e culture differenti, la Spagna si avviava a diventare una solida monarchia nazionale, grazie all'unificazione dei regni di Castiglia e d'Aragona, regioni che sarebbero rimaste tuttavia distanti nella pratica linguistica non solo orale, ma anche scritta. Nel corso del XIV secolo comparvero in Castiglia i primi scritti di aritmetica mercantile in lingua volgare, che rappresentano, come si è visto, l'applicazione della nuova aritmetica alle attività commerciali (Swetz, 1987; Caunedo Del Potro, 2003). L'esistenza di tali testi conferma innanzitutto che anche questa regione centrale della penisola iberica era rimasta coinvolta nella ripresa economica e nel neourbanesimo; in secondo luogo, che in Castiglia si sentiva la necessità di intrattenere rapporti commerciali con altre zone europee affacciate sul Mediterraneo e sull'Atlantico; infine che si stavano affermando anche qui scuole di calcolo. Oltre ad un capitale e al possesso di rudimenti contabili, ai mercanti serviva anche abilità di calcolo in un mercato del tutto locale come era quello; perciò verosimilmente, gli Spagnoli cercarono in Italia gli strumenti culturali e tecnici da coniugare con la tradizione locale, segnatamente andalusa (almeno l'opera di Isidoro di Siviglia, Savasorda e Abraham ibn Ezra), per raggiungere lo scopo, sfruttando tutto il vantaggio di essere stati in passato un coacervo di culture avanzatissime: qui, grazie alla presenza araba, erano stati introdotti su larga scala il sistema di numerazione indo-arabico, l'uso dello zero, la notazione posizionale in base 10 e ne erano state fornite le linee guida per un'applicazione pratica. Non mancano, soprattutto nel XIV secolo, copie dell'opera di Sacrobosco e di Villedieu, a Toledo, Salamanca e Madrid.

Il primo testo di aritmetica commerciale (*al-Muawalat*) scritto sul suolo spagnolo (Caunedo Del Potro e Córdoba De La Llave, 2004) è di indubbia origine araba e risale al X secolo: fornì l'ispirazione per i trattati successivi di aritmetica mercantile sopra citati. Al XII secolo risale anche il *Liber Alchorismi*, testo latino fortemente connesso con l'*al-hindi* di al-Khawarizmi, la cui paternità è variamente attribuita, come si è visto in 7.13. (Sesiano, 1986, 1989; Allard, 1992, 1997). Indipendentemente dalla paternità, l'opera presenta per la prima volta uno schema poi regolarmente seguito in quasi tutti i trattati commerciali: presentazione delle operazioni fondamentali, raccolta di problemi di aritmetica applicata alla vita quotidiana ed al commercio. Allo stesso periodo risale anche l'aritmetica di tradizione ebraica (v. 7.6.), che contribuisce a creare quel terreno di coltura favorevole allo sviluppo di altri testi in castigliano, come il *De Arismetica* o *el Arte del Alguarismo*, entrambi del XIV secolo.

Completamente differente la realtà del Portogallo, in cui la matematica era strettamente collegata all'astronomia applicata alla marineria ed era considerata alla stregua di un segreto militare, prima della pubblicazione nel 1519 a Lisbona del *Tratado da Pratica Darysmetica* di **Gaspar Nicolas** (che ebbe ben 11 edizioni tra il 1519 e il 1716); a Porto nel 1555 uscì il *Tratado da arte de arismetica*

di **Bento Fernandes**, una delle prime opere di aritmetica in portoghese (do Céu Silva, 2007), e ad Anversa fu pubblicato il *Livro de algebra en arithmetica y geometria* di **Pedro Nuñez** (1502-1577) nel 1567, peraltro in spagnolo. Argomento principale di quest'ultima opera è la risoluzione di equazioni dal primo al terzo grado con una notazione letterale. Il *Livro* fu molto diffuso in Europa e tradotto in latino e francese (Albuquerque, 1981; Høyrup, 2002a).

10.8.1. *De Arismetica e El Art del Alguarismo*

Il primo dei due manoscritti citati è castigliano: inserito in un codice miscelaneo (Madrid, Real Academia Española, Ms. 155), che comprende argomenti disparati come detti filosofici, prontuari di ricette, astrologia, tavole con percentuali di leghe metalliche usate nelle varie monetazioni, il trattato è evidentemente incompleto. Presenta anche alcune singolari caratteristiche, come l'assenza dell'invocazione iniziale alla divinità, di un'introduzione e dell'esposizione del sistema di numerazione posizionale in base 10 e delle relative regole per le operazioni fondamentali, segno che non era necessaria o che il copista ha preferito trascurare quanto gli sembrava di maggior interesse. La raccolta comprende 48 problemi, tutti risolti (esattamente la metà di quelli contenuti nel *Liber Abaci*), che sembrano tratti dalla stessa esperienza mercantile di Fibonacci. La Caunedo Del Potro (Caunedo Del Potro, 2003) ha classificato i problemi secondo:

- Procedimenti e strumenti utilizzati per la soluzione:
 - Operazioni con frazioni (42 problemi)
 - Operazioni elementari (somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione) (2)
 - Proporzioni (4)
- Tipo di problema
 - Calcolo
 - Trovare uno o più numeri che soddisfino condizioni date (20)
 - Risolvere situazioni connesse con numeri (2)
 - Trovare prezzi o quantità di prodotti (16)
 - Suddividere del denaro (2)
 - Alligazione ³⁰ (2)
 - Interessi e rendite (5)
 - Cambio ³¹ (1)

³⁰ Il *consolamen*, secondo la nomenclatura latina di Fibonacci.

³¹ Questo problema (f. 159) presenta un testo singolare, che contiene un'allusione alla monetazione fiorentina: *e agora multiplicamos por la via de tu tierra, que dises que vale el florín 20 blancas e cada blanca que vale 12 denarios?*

Il secondo manoscritto (León, Real Colegiata de San Isidoro, Ms. 46) è stato studiato sempre dalla Caunedo Del Potro et al. (Caunedo Del Potro e Córdoba De La Llave, 2000), che hanno rilevato come gran parte dell'opera sia destinata agli zecchieri e contenga, in forma di 23 problemi di difficoltà progressiva, tutte le informazioni utili per il loro lavoro: l'intero sistema di pesi e misure utilizzato per la monetazione, indispensabile per fabbricare i pesi con cui si saggiava la lega.

10.8.2. *Francesc de Sanctcliment*

Diversa è la situazione del Sud della Spagna, dove pochissimo si sa della cultura e del sistema scolastico catalani nel Basso Medioevo, soprattutto in ambito matematico (Vernet, 1989).

Il primo documento di trattatistica commerciale in catalano è la *Summa de la art de Arismética* di **Francesc de Sanctcliment** pubblicata a stampa a Barcellona nel 1482 (Malet, 1998), quattro anni dopo l'*Aritmetica* di Treviso. Limitate le informazioni biografiche sull'autore: insegnava aritmetica a Barcellona e Saragoza, viaggiando, come un maestro d'abaco italiano.

Il testo (Malet e Paradis, 1984; Labarthe, 2001) contiene la consueta struttura dei trattati di aritmetica mercantile, votata a fornire un utilizzo immediato e pratico dei contenuti: descrizione del sistema numerico posizionale in base 10, algoritmi delle quattro operazioni in $\mathbb{N}$, descrizione delle frazioni e delle relative operazioni in $\mathbb{Q}^+$, regola del tre, proporzioni e risoluzione di problemi (Labarthe, 2005). Mancano completamente, come si vede, contenuti algebrici, nonostante la apparente somiglianza con il *Liber Abaci*.

Sempre di origine catalana, il maestro **Bernard de Branellach** (Barchinonensis) lasciò tracce della propria opera molto lontano da Barcellona, a Praga, in piena Mitteleuropea.

10.9. I PAESI DI AREA SLAVA

La ricostruzione della diffusione del pensiero matematico medievale nell'Est europeo è resa particolarmente laboriosa sia dalle difficoltà linguistiche, sia dalla limitatissima accessibilità elettronica dei materiali d'archivio. Infatti esistono pochi cataloghi online ed ancora meno numerosi sono quelli plurilingue.

Certamente un grosso merito di autori come **Micheal Ainhauser**, **Bernard de Branellach** o **Christianus de Prachaticz** nell'area di Praga, di **Johannes de Galandria** in Polonia, di **Georgius de Hungaria** fu quello di aver contribuito a diffondere i nuovi contenuti, a dispetto degli ostacoli linguistici delle lingue volgari ormai affermate. Solo di alcuni abbiamo notizie accertate.

10.9.1. *Christianus de Prachaticz*

Nato intorno al 1360 nella città boema di Prachaticze, nel 1388 si laureò all'Università di Praga, dove fu rettore più volte (1405, 1412-13, 1434 e 1437). La fama di questo autore è legata soprattutto alle sue opere di medicina in latino ed in ceco, ma si occupò anche di calcolo e di algorismi ³², oltre che di botanica e di astronomia ³³. Fu anche membro della Chiesa e si avvicinò alle posizioni scismatiche di Jan Hus (1371-1415), anch'egli originario di Prachaticze. Morì nel 1439.

10.9.2. *Georgius de Hungaria*

Questo autore (1422 circa-1502) deve la propria notorietà all'opera *Arithmeticae Summa Tripartita* stampata in Olanda nel 1499 nel convento di Schoonhoven per i confratelli di Zwolle o Deventer (Smeur, 1965); si citano svariati autori, da Boezio a Bradwardine (Jelitai, 1937; Szabó, 2002). Sui manoscritti latini conservati in Ungheria, v. Hunyadi (Hunyadi, 1998).

10.10. LA GRECIA E BISANZIO

Nell'Oriente greco-bizantino i numerali indo-arabici erano noti almeno dal VII secolo, secondo la già citata testimonianza di Severus Sebokht (v. 2.4.); tuttavia il loro impiego nelle arti del calcolo prima del XIII secolo era molto limitato ³⁴, come attesta l'esistenza di pochissimi manoscritti greci su cui essi compaiono. Tra questi, ad esempio, figura il ms. Oxford, Bodleian Library, D'Orville 301, copiato da **Stefano Chierico** a Costantinopoli nel settembre dell'888 e contenente il più antico esemplare greco degli *Elementi* di Euclide ³⁵; gli studiosi che l'hanno consultato nei cinque secoli successivi, hanno aggiunto glosse ed annotazioni, utilizzando anche i numeri arabi, come ha recentemente mostrato il paleografo ossioniense Wilson (Wilson, 2005).

³² Due opere sono conservate a Varsavia, Biblioteka Narodowa, 5; 30; ed una a Praga, Univer. Státní Knihovna, XIII.F.17(2355).

³³ Questo autore è oggetto di studio in un progetto della Accademia delle Scienze della Repubblica Ceca, avviato nel 1999, dal titolo «Astronomy in medieval Latin manuscripts and old prints I. Magister Cristannus de Prachaticz», coordinato dalla prof.ssa Alena Hadravova del Dipartimento di Studi Classici della stessa Accademia; il testo del progetto è la principale fonte di queste note biografiche.

³⁴ Era ancora utilizzata abbondantemente la notazione alfabetica, anche insieme con il sistema numerico indo-arabo (Boyer, 1968).

³⁵ Fu in seguito venduto ad Aretha di Patrasso, poi vescovo di Cesarea.

Il primo vero trattato di aritmetica pratica greca secondo le nuove modalità di calcolo (Μεγάλη καὶ Ἰνδικὴ Ψηφοφóρiα, Aritmetica grande e indiana) risale però al 1252 ed è conservato in un manoscritto miscellaneo quattrocentesco a Parigi (Bibliothèque Nationale, Ms. Suppl. Grec. 387, ff.163-180); il trattato, pubblicato da Tannery (Tannery, 1920), fu composto probabilmente durante l'occupazione latina di Costantinopoli (v. 8.1.1.).

10.10.1. Massimo Planude

All'ultimo scorcio del XIII secolo risale invece l'opera (Gerhardt, 1865; Wäschke, 1878; Wendel, 1940; Wilson, 1971; Allard, 1981) intitolata *Aritmetica indiana* (Λογιστικὴ Ἰνδική) o *Grande calcolo secondo gli Indiani* (*Calculatoria secundum Indos Magna appellata – Ψηφοφóρiα κατὰ Ἰνδούς ἢ λεγομένη Μεγάλη*) del monaco e ambasciatore bizantino **Massimo Planude** (1255-1305), che aveva studiato latino e aritmetica in Occidente.

Planude (al secolo Manuel) era nato a Nicomedia; era diventato monaco poco prima del 1280, assumendo il nome di Massimo. Fu un vero e proprio umanista, dedicatosi a tradurre moltissime opere dal latino, a pubblicare e commentare classici della letteratura greca, a formare studiosi capaci di tramandarli (Treu, 1890; Leone, 1991). I suoi interessi si estendevano anche alla matematica e spaziavano dai *Phenomena* di Arato, agli *Sphaerika* di Teodosio, agli *Elementi* di Euclide, ai *Theologoumena Arithmeticae* (una compilazione del IX secolo che comprende parte dei perduti *Theologoumena* di Nicomaco di Gerasa e del Περὶ δέκαδος di Anatolio ³⁶), all'*Aritmetica* di Diofanto. Morì a Costantinopoli nel 1305 circa.

Nell'*Aritmetica indiana*, l'autore si prefigge lo scopo di trasmettere la conoscenza del calcolo utile per l'astronomia, pertanto tratta le sei operazioni necessarie per questa disciplina (numerazione ³⁷, addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, estrazione di radice), accompagnandole con laboriosissimi algoritmi di calcolo e di verifica (prova del nove). Planude utilizza i nove simboli (σχήματα) in forma araba orientale, da lui denominata persiana, e lo zero, chiamato cifra (τσίφρα).

Il piano dell'opera comprende:

1. la presentazione del sistema numerico denominato persiano e della simbologia, ricorrendo ad un lessico tipicamente greco e boeziano (*numeri monadici* per le unità, *decadici* per le decine e così via), tranne che per lo zero, il cui nome è ricalcato sull'arabo *sifr*;

³⁶ L'opera è stata attribuita, in modo controverso, a Giamblico (De Falco, 1922), (Walterfield, 1988).

³⁷ Notazione posizionale decimale e sessagesimale.

2. l'algoritmo per l'addizione, del tutto simile a quello moderno, compresa la nozione di riporto e la prova del nove per la verifica del risultato;
3. per ciò che concerne la sottrazione, l'autore indica due algoritmi: quello di *credito e debito* e quello *commerciale*. Il livello di dettaglio nella spiegazione è eccessivo e l'esposizione è decisamente ridondante, segno verosimilmente di scarsa confidenza con questa pratica; anche la scelta degli esempi è talvolta infelice, dal momento che l'utilizzo di numeri contenenti la ripetizione della stessa cifra genera ambiguità;
4. per la moltiplicazione Planude presenta due tecniche:
 1. una chiastica (o incrociata), che interessa somme di prodotti combinate con il riporto. Per eseguire 24×35 , i passaggi sono i seguenti:
 - a. $4 \times 5 = 20$ (prodotto delle unità dei due numeri; riporto di 2);
 - b. $4 \times 3 = 12$ (prodotto delle unità del primo numero per le decine del secondo);
 - c. $2 \times 5 = 10$ (prodotto delle decine del primo numero per le unità del secondo);
 - d. $12 + 10 = 22$ (somma dei prodotti ottenuti ai punti *b* e *c*);
 - e. $22 + 2 = 24$ (somma del riporto del punto *a* e del totale ottenuto al punto *d*; riporto di 2);
 - f. $2 \times 3 = 6$ (prodotto delle decine dei due numeri);
 - g. $6 + 2 = 8$ (somma del prodotto al punto *f* e del riporto del punto *e*);
 - h. concatenando i risultati ottenuti in *g*, *e* (senza riporto) e *a* (senza riporto), si ottiene il risultato, ossia 840.
 2. La seconda tecnica richiede invece di scrivere e, in seguito, aggiornare i risultati parziali con gli eventuali riporti, pertanto necessita dell'uso di una tavola coperta di sabbia³⁸, dal momento che con carta e penna il risultato sarebbe di faticosa lettura.
5. La teoria della divisione comprende innanzitutto la casistica dei rapporti possibili tra dividendo (*a*) e divisore (*b*); l'autore si sofferma in particolare sul caso di $a > b$, che richiede maggiore attenzione. In generale, l'indicazione fornita è quella di scrivere la divisione sotto forma di frazione, riducendola poi ai minimi termini. Viene poi presentato attraverso esempi l'algoritmo della divisione, che mostra caratteristiche differenti a seconda che il divisore sia monadico (di una sola cifra) o misto (di più cifre). Sostanzialmente l'operazione di divisione viene ricondotta all'iterazione della sottrazione del divisore dal dividendo, completata con il ricorso ai riporti;

³⁸ Planude peraltro consiglia di usare questo strumento per tutti i calcoli, non solo per la moltiplicazione. La tecnica è la stessa descritta da Saïdan (Saïdan, 1997) come tipica dell'aritmetica indiana, importata dagli Arabi; lo storico sottolinea la primitività della tecnica, che, oltre a evidenti limiti pratici (era necessario sporcarsi di sabbia), escludeva ogni possibilità di verifica dei calcoli svolti; sarebbero stati gli Arabi a perfezionarla.

6. Presentazione del sistema sessagesimale, utilizzando i 12 segni zodiacali (un dodicesimo della circonferenza, ossia 30°), gradi, primi e secondi, e delle quattro operazioni in base 60;
7. Formula per l'estrazione della radice quadrata approssimata di numeri che non sono quadrati perfetti ³⁹:

1. detto n il numero di cui estrarre la radice, trovare il massimo quadrato perfetto minore del numero (q^2);

2. calcolare $m = n - q^2$;

3. la radice, approssimata, è data da $\sqrt{n} = \sqrt{q^2 + m} \approx q + \frac{m}{2q}$

Il primo esempio riguarda $n = 18$; $q^2 = 16$; $m = 2$;

$$\sqrt{18} = \sqrt{16 + 2} \approx 4 + \frac{2}{2 \cdot 4} = 4 + \frac{2}{8} = 4 + \frac{1}{4}$$

Planude invita a elevare il risultato al quadrato, per verificarne la correttezza, tut-

tavia è costretto ad ammettere che $\left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 = 16 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 16 + \frac{1}{16}$,

evidenziando con ciò il problema dell'errore di approssimazione: l'autore propone allora un algoritmo di cui rivendica la paternità, presentato attraverso esempi e completato con una dimostrazione geometrica.

1. $n = 235$;
2. Si separano le cifre in due coppie da destra a sinistra, ossia $2|35$;
3. Si sottrae il massimo quadrato minore della coppia più a sinistra dalla coppia stessa: nell'esempio, $2 - 1$;
4. Si annota la prima cifra della radice e si abbassa l'altra coppia (35);
5. Si moltiplica la radice trovata per due e si trascrive il risultato accanto al numero 135;
6. Si cerca il massimo numero m tale che $(20 + m)m < 135$; nel nostro caso, $m = 5$;
7. Si scrive 5, seconda cifra della radice, e da 135 si sottrae 125, ossia $(20 + 5)5$;
8. La radice quadrata di 235 è quindi 15 e $\frac{10}{30}$.

Discepolo di Planude fu **Manuel Moschopoulos** (1265-?), autore di un trattato sui quadrati magici ⁴⁰ (Tannery, 1886a; Sesiano, 1998), il *Libellus de*

³⁹ Approssimazione già utilizzata dai Greci e migliorata dagli Arabi:

$$\sqrt{q^2 + m} \approx q + \frac{m}{2q + 1}, \text{ caso particolare } (k = 2) \text{ della formula di al-Tusi, vista nel } Flos \text{ di}$$

Fibonacci in 8.2.5. e presentata anche da Regiomontanus nell'appendice di problemi del Plimpton 188 (Folkerts, 2002).

⁴⁰ Un quadrato magico è uno schieramento di numeri interi distinti in una tabella quadrata tale che il totale di ogni riga, di ogni colonna e di entrambe le diagonali sia sempre lo

inveniendis quadratis numeris, scritto attorno al 1315 e conservato a Parigi (Bibliothèque Nationale, Fonds Grec 2428, ff. 181-185). Il manoscritto si ispirerebbe ad un'opera del XIII secolo di **Ahmed al-Buni**, che a sua volta avrebbe ripreso tecniche di costruzione arabe, risultato della rielaborazione di contenuti cinesi mediati dagli Indiani.

Gli scritti matematici di Moschopoulos non ebbero grande influenza all'epoca, ma sono la testimonianza dei contatti fra Oriente ed Occidente in quest'area del Mediterraneo.

Dedicatario dell'opera di Moschopoulos fu il dotto bizantino **Nicola Artafas de Smirne**, detto **Rhabdas**, che realizzò un riedizione dell'*Aritmetica indiana* di Planude (Parigi, Bibliothèque Nationale, Fonds Grec, 2428, ff. 186-194) e scrisse due lettere con contenuti di aritmetica (Tannery, 1886b) la prima, indirizzata a Giorgio Khatzykes, è l'unico testimone che presenta le regole di calcolo con i numerali letterali greci, oltre all'esposizione di rappresentazione digitale dei numeri fino a 10000; la seconda ⁴¹, indirizzata a Teodoro Tzavoukhe di Clazomene nel 1341, presenta:

- la teoria del calcolo con le frazioni, utilizzando frazioni a numeratore unitario (egizie);
- l'estrazione di radice per approssimazioni successive;
- il *Computus pascalis*;
- la regola del tre semplice e composta;
- una batteria di problemi aritmetici di complessità crescente presentati in forma di matematica divertente.

L'opera di Rhabdas costituisce un raro documento sulle procedure di calcolo nella Bisanzio tardomedievale, soprattutto perché attesta una tradizione a prima vista esclusivamente greca. Nella seconda lettera sopra citata, egli suddivide tuttavia lo studio del calcolo (λογαρισμός) in arte del Quadrivio (μαθηματικός) e matematica pratica (πολιτικός), riprendendo una distinzione già utilizzata, pochi decenni prima, dal matematico arabo **ibn Haldun** in un suo trattato dal titolo *al-Muqaddima* (Quatremère, 1858).

Resta insoluto il problema di conoscere più a fondo l'aritmetica pratica greca, testimoniata da raccolte di problemi in lingua dimotica (il corrispondente del volgare per le lingue neolatine), come *Questioni e problemi aritmetici* (Ψηφορικά ζητήματα καὶ προβλήματα), conservati sempre nel ms. Parigi, Bibliothèque Nationale, Suppl. grec. 387, ff. 118v-127v. Nel già citato manoscritto bizantino del XV secolo ⁴² studiato da Hunger e Vogel (Hunger e Vogel, 1963), sono pre-

stesso numero; tale intero è denominato la **costante di magia** o **costante magica** o **somma magica del quadrato**.

⁴¹ Parigi, Bibliothèque Nationale, Fonds Grec, 2428, ff. 225-245.

⁴² Vienna, National Bibliothek, Phil. Gr. 65; v. 1.5.

senti infatti alcuni esempi che riportano al mondo islamico, per il ricorso ad un lessico tecnico arabo-turco, per la trattazione delle frazioni secondo il metodo diffuso in Turchia ed infine per la presenza di un problema incentrato su un bagnino turco costretto a calcolare (attraverso un'equazione indeterminata) i prezzi da far pagare per l'accesso alla piscina a seconda che i bagnanti siano turchi, cristiani o ebrei. Un problema del tutto analogo (anche per la presenza dello stesso listino confessionale dei prezzi) sarebbe presente, sostengono Hunger e Vogel, nel manuale siriano di calcolo (*Kitab al-Hawi*) di **al-Husain** risalente alla fine del XII secolo e conservato in un manoscritto a Parigi (Bibliothèque Nationale, ar. 2462, f. 20): un'analogia ben difficilmente catalogabile come casuale, che indica chiaramente l'origine islamica del problema.

Lo studio della matematica nell'area ellenofona in età tardomedievale è caratterizzato da una terza tendenza, individuata dalla Tihon (Tihon, 2001) sulla base dell'analisi della produzione superstite; infatti, oltre alle opere già viste di contenuto pratico ed alle raccolte di problemi, figurano opere dotte collocabili nella tradizione del Quadrivio⁴³, che pongono speciale enfasi sullo studio dell'astronomia e sulla didattica.

Autori delle opere di questo gruppo, legate al Quadrivio, sono, ad esempio, **Michael Psellus** (1018-1078 circa), che scrive una *Sintesi dell'arte aritmetica* (Τὼν περὶ ἀριθμητικῆς συνόψις); **Georgios Pachymeres** (1255 – 1310), che compone intorno al 1300 un *Quadrivio* (Σύνταγμα τῶν τεσσάρων μαθημάτων), ispirato all'opera di Nicomaco per l'aritmetica e di Euclide per la geometria; votato alla didattica del sistema sessagesimale per quanto riguarda l'astronomia, **Theodoros Metochites** (1270-1332), nella sua opera dal titolo *Elementi di astronomia*⁴⁴ (Στοιχείοσις ἀστρονομικῆ), si concentra esclusivamente sui contenuti di calcolo strettamente funzionali all'astronomia (Bydén, 2003); analoga la scelta di **Theodoros Meliteniotes** (?-1393) nel suo compendio (Ἀστρονομικὴ τρίβλος) del 1368, basato sull'astronomia di Tolomeo e di Teone, oltre che su quella persiana e araba (Katsiaboura e Nicolaidis, 2006). Vi sono poi alcune compilazioni anonime (Venezia, Biblioteca Nazionale Marciana, gr. 323, ff. 166v-179v; Parigi, Bibliothèque Nationale de France, gr. 2396, ff. 87-92v), una *Logistica* di **Barlaam di Seminara** (1290-1350) del 1337, in cui l'autore illustra le regole di calcolo con numeri interi e frazionari (decimali e sessagesimali); gli adespoti *Prolegomena in Claudii Ptolemaei Syntaxis mathematicam*, conservati in una copia del XV secolo a Milano (Biblioteca Ambrosiana, C 263 inf., ff. 166v-184v), in cui, sotto forma di teoremi preliminari alle dimostrazioni grafiche dell'*Almagesto* di Tolomeo, vengono presentati la divisione e il modo di trarre rapporti aritmetici secondo

⁴³ Tra queste, il commento all'*Arithmetica* nicomachea di **Giovanni Filopono** (VI secolo).

⁴⁴ Il manoscritto è conservato alla Vaticana (Vat. gr. 181).

l'analogia fra le grandezze, considerate in tutti i modi possibili; **Giorgio da Trebisonda** (1395-1473), detto in Italia **Trapezunzio** ⁴⁵, studiò prima a Venezia e in seguito svolse attività di traduttore dal greco in latino a Roma, realizzando le traduzioni di Aristotele, Platone e dell'*Almagesto* di Tolomeo (Monaco, Bayerische Staatsbibliothek, gr. 537), poi copiato e tradotto in tedesco da Regiomontanus (Norimberga, Stadtbibliothek, Cent. V. 62).

10.10.2. La scienza ebraica in Oriente: Mordecai Comtino

Filosofo, matematico, astronomo, esegeta e poeta, **Mordecai Comtino** (1402-1483) fu l'unico esempio significativo di studioso ebraico nel mondo greco tardomedievale. Infatti, dopo di lui e i suoi discepoli, nonostante la libertà politica e il benessere economico di cui godette la comunità ebraica anche sotto la dominazione turca, gli studi scientifici furono trascurati. Gli sono attribuite ben 16 opere di vario contenuto: nove sono commenti alla Bibbia, alla *Logica* aristotelica, alle opere di ibn Ezra (v. 4.4.); cinque riguardano contenuti di tipo astronomico (tavole e strumentazione); due presentano argomento matematico (Schub, 1932): glosse all'opera di Euclide (Günzburg, 340, 5) e il *Sefer habeshbon v'hammiddoth* (Libro di calcolo e misura), scritto attorno al 1478. Di questa seconda opera sono conservati manoscritti a Berlino (No. 49) ⁴⁶, Parigi (Bibliothèque Nationale, Heb. 1031, ff. 26r-67v.), San Pietroburgo (343, 344, 345, 346), Londra (27,107 A), Oxford (Bodleian Library, Laud. B. 108) e New York (Jewish Theological Seminary, Adler Collection, 1576). Le sue fonti dichiarate sono, per la parte di aritmetica, l'opera di ben Ezra e l'*Aritmetica* di Nicomaco di Gerasa, molto letta nella Costantinopoli di quegli anni, ma di contenuto troppo teorico: verosimilmente la citazione dell'opera era più un ossequio alla tradizione classica, che l'indicazione di un effettivo modello. Rebstock (Rebstock, 1994) è convinto che una fonte non citata sia il *Liber Abaci* di Fibonacci, con cui Mordecai condivideva le finalità pratiche. Per la sezione sulla geometria, invece, l'autore più citato è Euclide, nonostante l'effettivo modello greco risulti piuttosto Erone ⁴⁷. La fonte di ispirazione taciuta, secondo Schub a causa di un errore ⁴⁸, è invece il *Liber embadorum* di Savasorda: va però ricordato che

⁴⁵ Si tratta del luogo di origine della famiglia, dal momento che l'autore è nato a Creta.

⁴⁶ Citati da Steinschneider (Steinschneider, 1897) e Silberberg (Silberberg, 1905), (Silberberg, 1906).

⁴⁷ Schub (Schub, 1932) ritiene che l'omissione del nome di Erone dipenda da un errore presente nel manoscritto consultato da Comtino.

⁴⁸ L'errore sarebbe basato sull'omonimia dei due (Abraham bar Hiyya e Abraham ben Ezra), che avrebbe indotto in equivoco gli scrittori cristiani coevi. Lascia perplessi, però, il fatto che anche Comtino, di origine ebraica, confondesse gli autori a causa del nome, tra l'altro piuttosto diffuso nella sua comunità.

quest'ultima opera ha largamente influenzato anche la *Practica geometriae* di Fibonacci, il cui passaggio a Costantinopoli attorno al 1200 è noto.

Il contenuto dell'*Aritmetica* è il seguente:

- **Notazione posizionale in base 10:** Comtino valuta attentamente tutte le possibilità a sua disposizione ⁴⁹ e conclude scegliendo i numerali indo-arabici, che, come ricorda Schub (Schub, 1932), compaiono forse per la prima volta in un testo in lingua ebraica, senza consistenza, tuttavia, nella disposizione dell'ordine di grandezza (da destra a sinistra o viceversa).
- **Quattro operazioni:** sono presentate nell'ordine attuale (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione), diversamente dai modelli, che, tra l'altro, aggiungevano anche il raddoppiamento e il dimezzamento, qui ignorati. Vengono presentate due tecniche di moltiplicazione: quella tradizionale e quella che Planude aveva definito *incrociata* e qui viene indicata genericamente come tecnica presa a prestito dagli studiosi arabi ⁵⁰; lo stesso avviene per la divisione, per la quale, oltre alla tecnica tradizionale, si presenta il metodo della *galea*. Tutti i metodi sono illustrati con esempi, che ricorrono anche a metodi grafici, per sostituire la spiegazione verbale; la correttezza delle operazioni è verificata attraverso prove (del 9 e del 7) e attraverso la tecnica di ripercorrere le operazioni all'inverso, partendo dal risultato per ritrovare i dati iniziali. Colpisce l'analogia con la *probacio satis pulchra* presente nei manoscritti quasi coevi della *Modus Family* (v. 6.6.).
- **Frazioni:** vengono definite come una o più parti uguali di un'unità. Se ne trattano le operazioni di moltiplicazione, addizione, divisione e sottrazione, che prevedono tutte la riduzione a denominatore comune, non necessariamente il minimo, essendo, in genere, il prodotto dei denominatori. Per addizione, divisione e sottrazione, il numeratore del risultato è la somma, differenza o quoziente dei numeratori. La moltiplicazione è trattata in modo più contorto e ridondante, semplificando i fattori comuni al numeratore e al denominatore solo all'ultimo passaggio: ad esempio, $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{27}{36} \cdot \frac{16}{36} = \frac{432}{1296} = \frac{1}{3}$.
- **Proporzioni:** si tratta di esempi volti ad illustrare la regola del tre, derivata dall'opera di ibn Ezra, ma soprattutto da quella bizantina di Rhabdas, e la regola del cinque (una proporzione doppia). Comtino tratta distintamente proporzioni in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Q}^+$, come se presentassero differenti metodi risolutivi (Schub, 1932).

⁴⁹ In precedenza i matematici che avevano scritto in lingua ebraica avevano utilizzato la numerazione alfabetica, non sempre posizionale.

⁵⁰ Schub adduce motivazioni religiose per spiegare il ritegno di Comtino ad usare un termine allusivamente cristiano e ricorda che un allievo di Comtino, **Mizrahi**, la definisce *a forbice*.

Un aspetto curioso dell'opera dei discepoli di Comtino, sottolinea sempre Schub, che potrebbe riguardare anche il maestro, nonostante l'assenza di prove certe, è il vincolo alla trasmissione delle conoscenze matematiche solo all'interno di un ristretto gruppo di iniziati ed esclusivamente dietro autorizzazione del maestro, sul modello pitagorico o ippocratico; lo stesso sta avvenendo, ricorda Schub, nelle scuole d'abaco in Italia e presso i Cossisti in Germania.

10.10.3. Il XV secolo e la caduta di Costantinopoli

Dopo la caduta dell'impero d'Oriente, nel 1453, il livello culturale della popolazione greca conobbe una drammatica decadenza: i dotti bizantini, spaventati dall'arrivo dei Turchi, erano fuggiti quasi tutti in Occidente; le biblioteche, piene di manoscritti greci, furono vendute agli Umanisti o distrutte dai conquistatori (Kastanis, 1997). Soltanto un piccolo gruppo di uomini di cultura, che si era raccolto intorno al patriarca ecumenico, rimase sul suolo patrio e, in seguito al riconoscimento del patriarca di Costantinopoli come guida e rappresentante di tutti gli ortodossi, essi costituirono la guida politica e spirituale, ma non religiosa, dei Greci sottomessi e si posero in conflitto con i dotti emigrati in Occidente. Questi ultimi (i cosiddetti **Ellenisti**) infatti erano ecumenici (confidavano in una riconciliazione tra ortodossi e cattolici) ed ostili all'egemonia del clero greco, essendo legati al movimento umanistico dell'epoca ed avendo, nella quasi totalità, legami con la Chiesa cattolica; essi auspicavano una formazione culturale basata sugli antichi grammatici e filologi greci, con lo scopo, neanche troppo recondito, di creare un clima filellenico in Occidente. I **Patriarchisti** invece erano separatisti e difensori dei principi della purezza della fede e della cultura ortodossa, imprimendo alla loro politica culturale un'inclinazione teocratica.

Mentre si profilava questa insanabile disputa, si assisteva alla crisi della cultura, delle scienze e della matematica, in particolar modo. La crisi della filosofia aveva portato con sé anche quella del pensiero scientifico: gli studi matematici, cioè il Quadrivio, come parte della cultura filosofica, erano stati trascurati dai Patriarchisti già nell'ultimo decennio prima della caduta. Erano esistite sì figure di primo piano, come i teorici del Quadrivio, ma al livello di base l'istruzione matematica consisteva in alcuni elementi di aritmetica pratica con limitati cenni a pochi metodi numerici e di calcolo.

Gli Ellenisti erano sensibili, almeno teoricamente, alle questioni di insegnamento della matematica, poiché erano recettori e trasmettitori dell'antica cultura greca, dove la matematica aveva una solida tradizione, ed erano anche favorevoli allo sviluppo della nuova cultura, di cui la rinascita della matematica antica era il centro, tuttavia mostravano una sorta di apatia congenita: non avevano nessuna partecipazione alla pratica matematica e si opponevano ai tentativi di comprensione e di diffusione delle opere matematiche dei Greci antichi da una gran parte

degli intellettuali italiani. Essi non sembravano contribuire in alcun modo al Rinascimento in ambito matematico: è significativa la mancanza di qualsiasi partecipazione greca agli studi e alle traduzioni delle opere di Euclide e di Archimede presso le accademie italiane coeve, che segnala l'esclusione della matematica dalla cultura dell'epoca. Per questo motivo il cardinale Bessarione avrebbe scelto Regiomontanus per lo studio e la traduzione degli antichi manoscritti matematici greci, e per la stessa ragione, più o meno nel 1530, il matematico **Francesco Maurolico** (1494-1575) criticò aspramente la prima traduzione latina dal greco degli *Elementi* di Euclide che non rivelava né una sicura conoscenza del greco né una padronanza dei contenuti matematici, come da lui auspicato. Gli Ellenisti erano privi di formazione e inclinazione per la matematica, a causa dell'incapacità dei loro predecessori di coltivare l'interesse verso questa disciplina.

Per spiegare questa apatia, Kastanis (Kastanis, 1997) fa notare la coincidenza cronologica fra crisi della matematica e definitiva affermazione dell'Esicismo⁵¹ come dottrina religiosa dominante della Chiesa ortodossa. **Gregorios Palamas** (1296-1360), massimo teorico di questa dottrina, ponendo come premessa l'assenza di rapporti tra l'essenza divina ed il mondo creato, ne negava di fatto la conoscibilità e da essa concludeva l'inammissibilità non solo delle argomentazioni sillogistiche, ma anche delle dimostrazioni geometriche; questa affermazione poneva gli Esicasti in completa antitesi rispetto alla Scolastica occidentale, la quale dal XIII secolo utilizzava il metodo razionale negli studi teologico-filosofici. Questa posizione della Scolastica, che offriva supporto logico agli studi teologici e filosofici, concentrò l'interesse verso la matematica e la cultura della formazione matematica nei centri intellettuali europei. Viceversa, il disprezzo degli Esicasti per il metodo logico non solo non incoraggiava, ma anzi impediva la crescita della matematica.

In questo quadro, sembra degna di nota la figura di **Georgios Gemisto-Pletone** (1360-1452). Nel suo tentativo di far rinascere la filosofia, si era concentrato soprattutto sulla teoria politica di ascendenza platonica e sui rapporti con la teologia, col risultato di escludere una gran parte dei contenuti, come, per esempio, la gnoseologia, la teoria delle idee e, in ultima analisi, i presupposti matematici alla loro conoscenza. Con lui sembrava persa l'ultima occasione di far rinascere l'interesse per le scienze, se non fosse stato per il suo allievo, il futuro cardinale **Bessarione**, che, come si è visto in 6.1., tanto si sarebbe adoperato per la diffusione in Occidente del patrimonio matematico ed astronomico greco. Nel 1468 la donazione della biblioteca bessarionea alla Serenissima, infatti, costituì l'atto di fondazione del primo nucleo (il fondo antico) della Biblioteca Marciana di Venezia (Zorzi, 1987; Cavallo, 1993).

⁵¹ L'Esicismo (dal greco *ἡσυχία*, pace interiore) è una pratica ascetica diffusasi tra i monaci cristiani d'Oriente fin dal IV secolo (Rigo, 1993).

10.11. UNIVERSITÀ E SCUOLE D'ABACO

Le università di oggi sono l'evoluzione dei medievali *studia generalia*, aperti a studiosi di ogni provenienza, come si è visto a proposito degli algebristi (Gabriel, 1986). All'inizio le università avevano lo scopo di garantire a chierici e monaci una formazione superiore, di più ampio respiro.

Le prime ad affermarsi nel Medioevo furono le Università di **Salerno** (IX secolo), **Bologna** (XI secolo), **Parigi** e **Oxford** (XII secolo), le ultime due offrivano ai propri studenti anche alloggio.

Si trattava in effetti di gilde di docenti molto aperte ed indipendenti dal potere politico e religioso: persino il papa si limitava a chiedere di evitare professioni di ateismo o eresia. Questa estrema libertà comportava per le università l'esigenza di autofinanziarsi, ricorrendo a tasse a carico degli studenti, i quali potevano, se insoddisfatti dell'insegnamento, trasferirsi altrove anche in massa: in questo modo nacquero dall'Università di Oxford quella di **Cambridge** nel 1209 e dall'Università di Bologna quella di **Padova** nel 1222 (Arnaldi, 1976).

Il corso di studi era diviso in due parti: dai 14 ai 20 anni si accedeva al baccalaureato ed in seguito al dottorato. Dopo si poteva accedere alla specializzazione, ma relativamente a discipline come Teologia, Medicina e Giurisprudenza.

A partire dal XIII secolo, tutte le città più importanti si erano dotate di un'università, in cui si insegnavano le arti del Trivio e del Quadrivio, basate sul *curriculum* fissato da Boezio; gli studi erano incentrati soprattutto su contenuti tradizionali (Platone, Aristotele, Euclide e Nicomaco di Gerasa, forse con rudimenti di algorismi) e solo a partire dal XVI secolo si aggiunse, in Germania, l'attività di ricerca, anche se esempi illustri, come quello di Regiomontanus, sono già presenti nel XV secolo. La Franci (Franci, 1996) cita a questo proposito, l'*Arithmetica* di **fra' Leonardo da Pistoia** (Firenze, Biblioteca Riccardiana, 1169), risalente al XIII-XIV secolo; in essa è declinato il contenuto di un tipico corso di arti liberali, musica esclusa, dove figura l'esplicita citazione dell'algorismo come *ars numerandi*.

A Firenze, fulcro degli studi matematici tardomedievali, la storia dell'insegnamento della matematica si è per lo più svolta lontano dal mondo accademico. In epoca già umanistica, maestri come **Paolo**, **Benedetto dell'Abaco** o **Raffaello Canacci** non furono ammessi tra i docenti dello Studio, anche per il fatto che la matematica non rappresentava il loro interesse esclusivo e teorico, ma ne saggiavano le applicazioni in campo astrologico, pittorico, architettonico e ingegneristico: al culmine di questa tendenza, alla fine del Quattrocento, si trova **Leonardo da Vinci**, preceduto da **Leon Battista Alberti** e **Piero della Francesca**. Il primo docente di matematica allo Studio fiorentino, tramite lo Studio pisano, fu **fra Luca Pacioli**, professore di matematica in varie università italiane tra Quattro e Cinquecento e allievo di Piero della Francesca.

Ad ulteriore conferma della distanza fra i due mondi, umanistico e tecnico, sta una lettera del cardinale **Ippolito Ammannati**, scritta nell'autunno del 1464 all'umanista **Cristoforo Landino** (1424-1492) per rifiutargli l'autorizzazione ad intercedere per un francescano di nome Mariotto, che voleva insegnare l'abaco fuori dal convento a figli di mercanti: fra Mariotto non li avrebbe istruiti sui contenuti della vera matematica (quella boeziana, che schiudeva le porte dell'esegesi biblica, definita *sumum magisterium*), ma avrebbe fornito loro solo un insegnamento basso, *ad administrandam mercaturam* (Cherubini, 1997).

11.

L'UMANESIMO E L'ECLISSI DELL'EREDITÀ ALGEBRICA ARABA

La *querelle*, testimoniata ¹ dal saggio di Duhem (Duhem, 1965), sul rapporto tra scienze matematiche ed Umanesimo riguarda l'impatto delle *humanae litterae* sulla scienza di quei secoli: l'atteggiamento critico dei nuovi intellettuali nei confronti della Scolastica avrebbe rallentato il progresso della scienza, interrompendo l'evoluzione della scienza moderna, che, nata dalla Scolastica, sarebbe culminata con Galileo e Newton nel XVII secolo.

Un'altra questione ampiamente dibattuta riguarda la rinascita stessa della matematica nel XVI secolo: essa fu della stessa portata di quella artistica e letteraria?

Per rispondere a queste provocatorie domande, Rose (Rose, 1973) passa in rassegna tutta la vita culturale delle corti italiane del Quattrocento e, studiando il contenuto delle loro biblioteche oltre alle loro committenze, può agevolmente dimostrare che nessuna cesura né censura vi è mai stata rispetto alla scienza scolastica ed, anzi, nulla è andato perduto, grazie anche ai mecenati ed agli intellettuali umanisti: uno per tutti, Niccolò V, che finanziò nel 1449 le traduzioni di Jacopo da Cremona dell'opera di Archimede (Negri, 1997), copiate poi da Regiomontanus e impiegate da Cusano e da Copernico.

Quanto alla presunta sudditanza delle discipline scientifiche, Rose mostra come la rinascita stessa della matematiche nel XVI secolo sia stata favorita proprio dalle traduzioni di nuovi autori, sconosciuti o negletti in epoca medievale: Apollonio, Diofanto, Euclide, Erone, Pappo, Proclo e la *Meccanica* di Aristotele; e questo avrebbe fatto un'enorme differenza rispetto alla scienza medievale, come immediatamente compresero matematici come **Regiomontanus**, **Maurolico** e **Commandino** (1506-1575) e artisti come **Piero della Francesca**.

¹ V. anche Durand (Durand, 1943), Thorndike (Thorndike, 1943), Brown (Brown, 1960) e Klein (Klein, 1961).

Va tuttavia segnalato che la storiografia più di recente tende a porre la questione in termini molto diversi. La Goldstein (Goldstein, 1996) insiste sul fatto che la riscoperta dei classici avrebbe portato ad escludere qualsiasi debito culturale con il mondo medievale ed arabo-islamico, riconnettendo le conoscenze del tempo direttamente alla tradizione greca, soprattutto archimedeica, anche grazie alla costituzione di imponenti biblioteche presso le corti signorili e nei palazzi della borghesia cittadina; si sarebbe configurata allora una nuova tassonomia degli studi basati sulla matematica: ai più bassi livelli erano poste la geometria pratica, l'aritmetica e l'algebra (la cui derivazione dalla cultura medievale e arabo-islamica era invece accettata nell'ambito della formazione mercantile), seguivano poi la prospettiva e l'arte militare, infine al più alto livello c'erano l'astronomia e la geometria teorica, le uniche ad essere riconducibili a prestigiose origini greche; in questo processo fu rilevante il ruolo, per esempio, di Regiomontanus, che, nella lezione tenuta all'Università di Padova nel 1464, riferì entusiasticamente il suo ritrovamento di un manoscritto contenente una versione parziale dell'*Aritmetica* di Diofanto, esaltandone lo straordinario contenuto non solo aritmetico, ma anche algebrico, e accreditando in tal modo l'ascendenza greca della disciplina; il matematico tedesco, che pure non ignorava l'esistenza di una tradizione algebrica arabo-islamica, andò tuttavia oltre, attribuendo ai Greci la teoria algebrica e relegando sempre più al solo ambito pratico il contributo arabo-islamico.

11.1. PIERO DELLA FRANCESCA

Piero della Francesca, ossia Pietro di Benedetto de' Franceschi e di Romana di Perino di Carlo da Monterchi, nacque nel 1412 a Borgo San Sepolcro, da una famiglia di mercanti di pellame e di lana e, in seguito, di *guado*, una pianta usata per la tintura blu dei tessuti (*isatis tinctoria*) ². Piero manifestò molto presto una vocazione artistica e diventò allievo e poi assistente di **Antonio di Giovanni d'Anghiari**, l'unico pittore cittadino di un certo prestigio, esperto di pittura araldica, con il quale realizzò stemmi e bandiere papali, commissionate dopo che la città era passata sotto il dominio pontificio (Banker, 1993). Contemporaneamente Piero frequentò anche una scuola d'abaco locale, appropriandosi dei rudimenti contabili per l'attività mercantile di famiglia.

Negli anni 1437-1438, Piero lavorò con **Domenico Veneziano** (1400-1461) agli affreschi di casa Baglioni a Perugia. Negli anni successivi (1439) è documentata la sua presenza a Firenze, in un ambiente assai più stimolante di

² Le note biografiche sono state redatte sulla base di: (Berenson, 1936), (Gombrich, 1964), (Previtali, 1965), (Negri Arnoldi, 1988), (Paolucci e Bertelli, 2007).

quello borghigiano, presso lo stesso Domenico Veneziano che aveva ricevuto l'incarico di affrescare la cappella maggiore della Chiesa di Sant'Egidio con le *Storie della Vergine*, oggi perdute. L'atmosfera della Firenze conciliare, popolata di dotti di ogni provenienza (cardinale Bessarione compreso), giunti nella città per dibattere sul dogma trinitario, e dei più importanti artisti dell'epoca, grazie ai quali Piero poté arricchire la sua formazione teorica e tecnica, influenzò profondamente Piero, che verosimilmente conobbe papa Eugenio IV (1383-1447) e la corte pontificia, profondamente permeata di Umanesimo: tra gli altri, **Leon Battista Alberti** (1404-1472), di cui forse Piero lesse il *De pictura*.

Da quel momento la sua attività divenne febbrile, in continuo movimento tra le corti italiane.

Nel 1442 l'artista tornò a Borgo: la città era stata restituita a Firenze da papa Eugenio IV, come pagamento delle spese conciliari. Piero cominciò a viaggiare regolarmente in varie città delle Marche: Pesaro, Ancona, Loreto, Urbino. Nel 1445 ricevette la commissione per realizzare il *Polittico della Misericordia*; nel 1448 fu a Ferrara a lavorare per il duca Lionello e poi per Borso d'Este, tipici mecenati umanisti, incontrando anche il pittore fiammingo **Rogier van der Weyden** (1399-1464).

Nell'Anno Santo del 1450 era forse a Roma; dipinse il *San Girolamo penitente* conservato a Berlino e compose il *Trattato d'Abaco*. L'anno successivo, affrescò il ritratto votivo di Sigismondo Malatesta nel Tempio Malatestiano a Rimini, progettato dall'Alberti.

Ma a segnare la sua affermazione come pittore fu il ciclo con *La leggenda della Vera Croce* in San Francesco ad Arezzo, incominciato dopo il 1452, ossia dopo la morte di **Bicci di Lorenzo** (1373-1452), l'artista cui originariamente (1447) il committente Francesco Bacci aveva affidato la realizzazione degli affreschi.

Nel 1455, sull'onda della fama dovuta al ciclo di Arezzo, Piero fu chiamato a Roma da papa Niccolò V e lavorò, pur con brevi viaggi a Borgo, anche per Pio II, senza che di queste opere sia rimasto nulla, dal momento che furono distrutte nel XVI secolo per lasciare il posto agli affreschi di Raffaello. In quegli anni, come si è visto in 6.1., incontrò il concittadino Francesco da Borgo San Sepolcro, architetto e appassionato di studi matematici, che lavorava nella basilica di Santa Maria Maggiore, nella quale Piero affrescò la cappella di san Michele. Furono anni caratterizzati dalla committenza di copie di manoscritti di contenuto matematico, fisico (ottica) e geometrico da parte di Francesco e dall'interesse di Piero per gli stessi argomenti, testimoniato dalla copia ³ di vari trattati di Archimede (Firenze, Biblioteca Riccardiana, 106), di cui Piero curò anche l'illustrazione, e dalla sua produzione trattatistica successiva (*De prospectiva pingendi*).

³ Della traduzione latina di Jacopo da Cremona del 1450, realizzata per incarico di Niccolò V, invece che di quella più antica e famosa di Guglielmo di Moerbeke.

Negli anni tra il 1463 e il 1464 Piero dipinse la *Flagellazione*, una delle opere più commentate dagli storici dell'arte, a causa dell'enigmatica iconografia.

Nel 1467, dopo aver completato il ciclo di Arezzo, Piero è documentato a Borgo, dove ricoprì incarichi pubblici, ma si allontanò dalla città in seguito ad un'epidemia di peste. Nel 1469 Piero si trovava ad Urbino presso la corte di **Federico da Montefeltro** (1422-1482), con l'incarico di completare con Giovanni Santi (1435-1494), padre di Raffaello, una tavola d'altare per la confraternita del *Corpus Domini*, iniziata da **Paolo Uccello** (1397-1435). La sua successiva permanenza presso i Montefeltro risale agli anni 1474-1478, quando realizzò i ritratti dei duchi, la *Pala di Brera* e la *Madonna di Senigallia*.

Anche a Borgo dipinse in questi anni svariate opere, ma nel 1482 si trasferì a Rimini, abbandonando gradualmente la vita pubblica e dedicandosi quasi esclusivamente agli studi sulla trattatistica geometrica, già affrontati nel *Libellus de quinque corporibus regularibus* (Biblioteca Apostolica Vaticana, Urb. Lat. 263) e nel *De prospectiva pingendi*. Affetto da gravi problemi alla vista, morì a Borgo il 12 ottobre del 1492, a sei mesi di distanza dalla morte di Lorenzo il Magnifico, mentre Colombo sbarcava in America.

11.1.1. Il Trattato d'abaco (1450?)

Il *Trattato d'abaco* fu scritto, secondo quanto riferisce Piero stesso, su richiesta dei suoi amici, verosimilmente altri pittori, dunque non come libro di testo per una scuola. Tuttavia esso presenta notevoli affinità con le altre opere contemporanee omonime: affronta dapprima l'aritmetica delle frazioni, poi passa all'algebra ed infine alla geometria, cui è riservato ampio spazio sempre attraverso numerose serie di esempi. Piero arricchisce la parte geometrica, aggiungendo problemi su argomenti di derivazione archimedeica, mai affrontati da altri nel Medioevo: il tetraedro tronco (4 facce esagonali e 4 triangolari) e il cubottaedro (6 facce quadrate e 8 triangolari).

Del testo esistono due codici, entrambi conservati a Firenze: uno alla Biblioteca Medicea Laurenziana, Ash. 280, studiato da Arrighi (Arrighi, 1967, 1970); e l'altro presso la Biblioteca Nazionale, Conv. Soppr. A.6.2606, studiato da Van Egmond (Van Egmond, 1980b). La prima edizione del testo è del 1970 (Arrighi, 1970).

Il testo (Franci e Toti Rigatelli, 1985; Giusti, 1991, 1993; Peterson, 1997) è articolato in quattro parti:

1. contenuti commerciali (3r-24r)
2. algebra (24v-79v)
3. geometria (80r-127v)
4. miscellanea di problemi geometrici, risolti algebricamente

Per quanto riguarda l'algebra, Piero presenta le regole di calcolo con i radicali, alcuni prodotti notevoli, poi 64 casi di equazioni con le relative regole di risoluzione; essi sono in gran parte comuni alla tradizione, fanno notare Franci e Toti Rigatelli (Franci e Toti Rigatelli, 1985): 1-15 sono presenti anche in Gerardi, 16-59 in Dardi (v.10.1.1.).

Interessanti sono, a giudizio delle due studiose, i casi 60 e 61, riportati in *tab. 11.1.*: essi sono validi sotto condizione che le equazioni si possano ridurre alla forma $b(1+x)^n = k; n \in \{5,6\}$.

Tab. 11.1. – Casi 60 e 61 del Trattato d'abaco di Piero della Francesca.

CASO	TESTO	FORMULA RISOLUTIVA
60	$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 = N$	$x = \sqrt[5]{\left(\frac{b}{a}\right)c + \frac{N}{e}} - \sqrt[3]{\frac{a}{d}}$
61	$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 = N$	$x = \sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \frac{N}{f}} - \sqrt[4]{\frac{c}{f}}$

Piero non fa menzione di condizioni. Franci e Toti Rigatelli pensano che non si tratti di esercizi originali dell'autore, nonostante se ne ignori la fonte.

Come si vede, Piero non amplia in alcun modo le conoscenze matematiche del tempo, anzi, il fatto che il trattato appaia collettaneo induce a pensare che si tratti di scritti precedenti riuniti senza revisione critica del materiale.

11.1.2. Il possibile incontro con Regiomontanus e Bessarione

Un recente studio ha posto in relazione questi tre personaggi coevi, tutti connessi con studi matematici. King (King, 2006, 2007) ha sviluppato una tesi che collega strettamente i due studiosi e due loro opere: l'astrolabio che Regiomontanus regalò al cardinale Bessarione e la *Flagellazione di Cristo* di Piero.

Un astrolabio, regalato al cardinale a Roma nel 1462 dal suo protetto Regiomontanus, reca impressa un'immagine che raffigura un angelo (secondo King, il cardinale) accompagnata da un misterioso epigramma latino disposto geometricamente: esso nasconde 8 assi verticali di un acrostico di difficile lettura per dei profani, ma certamente molto stimolante e gradito per un uomo colto come il cardinale; il contenuto si riferirebbe al cardinale ed suo rango, a Regiomontanus e ad un antico astrolabio bizantino risalente al 1062, oggi conservato a Brescia (Civici Musei d'Arte e Storia).

SVB DIVI BESSARIONIS DE
CARDINE DICTI PRAESI
DIO ROMAE SVRGO IO
ANNIS OPVS :~14 62

(letteralmente «Sotto la protezione del divino Bessarione, detto dal cardine, sorgo a Roma come opera di Giovanni nel 1462»). Secondo le complicate argomentazioni di King, Bessarione avrebbe potuto rilevare la presenza di un gioco linguistico e forse l'avrebbe anche risolto. Sarebbero presenti tre assi verticali, seguendo i quali si leggerebbe il testo ottenendo 3 parole o frammenti di parola: un acrostico, un mesostico ed un telestico; ripetendo più volte la lettura con lettere diverse, si otterrebbero 8 assi.

Ad esempio:

SVB	DIVI	BESSARIONIS	DE
CARDINE	DICTI	PRAESI	
DIO	ROMAE	SVRGO	IO
ANNIS	OPVS	:~14	62

Fig. 11.1. – Epigramma sull'astrolabio di Regiomontanus.

Acrostico: sub CD annis, ossia dopo 400 anni (il primo astrolabio data 1062)

Mesostico: IIV: ~14, ossia 1407 (forse l'anno di nascita di Bessarione)

Telestico: IO 62, ossia 1062, l'anno di fabbricazione dell'astrolabio antico

L'astrolabio sarebbe connesso, secondo King, con la celebre tavola di Piero che rappresenta la *Flagellazione di Cristo* attraverso le tre enigmatiche figure in primo piano; i critici si sono avventurati nell'identificazione dei personaggi già dal XVIII secolo e King enumera ben 43 tentativi, tra i quali in 6 casi uno dei personaggi sarebbe Bessarione. La difficoltà di fornire un'interpretazione iconografica convincente e univoca viene usata da King come prova che dietro la scelta dei personaggi sta un mistero che può essere svelato proprio ricorrendo all'iscrizione sull'astrolabio. Tra l'altro, la perfetta geometria dello spazio pittorico rifletterebbe le posizioni degli assi dell'iscrizione.

Dei tre uomini in primo piano quello a sinistra, con un copricapo alla greca e la barba, sarebbe Bessarione: il fatto che non presenti somiglianza con i ritratti coevi dimostra, secondo King, che Piero l'avrebbe dipinto come se lo ricordava durante il concilio, a Firenze. La figura angelica sarebbe il giovane Regiomontanus, sceso in Italia nel 1461 col cardinale, ma i suoi tratti somatici sarebbero confusi con quelli di altri familiari defunti del cardinale. Nei ricami sulla stoffa

dell'abito del terzo personaggio si noterebbero dei cardi e questo dettaglio figurativo sarebbe un'ulteriore prova del nesso con l'epigramma per mezzo della parola *cardo*.

La tesi, pur interessante, si fonda esclusivamente su indizi e coincidenze e manca di riscontri storici: che il cardinale Bessarione sia passato da Borgo, mentre Piero stava affrescando la *Leggenda*, è una pura illazione ⁴ e nulla si sa neanche del committente della tavola, necessariamente coinvolto nella scelta di questa iconografia tanto singolare. Non illumina su questo punto neanche l'antica iscrizione «*Convenerunt in unum*» (Atti degli Apostoli IV: 26–27), visibile in passato ⁵ sulla tavola.

Le tre opere hanno effettivamente avuto un destino comune: sono scomparse per molto tempo. Infatti, il dipinto fu ritrovato nel 1744 nella sacrestia del duomo di Urbino; l'astrolabio bizantino ricomparve a Brescia nel 1844; quattro anni dopo fu riscoperto anche quello di Regiomontanus, a Roma.

11.1.3. Libellus de quinque corporibus regularibus

Il *Libellus*, a dispetto del suo titolo, presenta, oltre all'analisi dei cinque solidi regolari (tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro), anche quattro solidi semiregolari o archimedei: il *cubo troncato* (8 triangoli e 6 ottagoni), l'*ottaedro troncato* (6 quadrati e 8 esagoni), l'*icosaedro troncato* (12 pentagoni e 20 esagoni) ed il *dodecaedro troncato* (20 triangoli e 12 decagoni) ⁶. È il primo trattato geometrico in cui vengono sviluppati il problemi di costruzione e di calcolo relativi ai poliedri, grazie a disegni stereometrici (Mancini, 1915). Nell'ultima parte l'opera si concentra soprattutto sulla misura e sulla rappresentazione stereometrica di elementi architettonici o parti di edifici, come colonne, volte, absidi, cupole.

Del *Libellus* è rimasto un solo manoscritto, (Biblioteca Apostolica Vaticana, Urb. Lat. 632), autografo solo per quanto riguarda disegni e annotazioni; dedicato a Guidubaldo da Montefeltro (1472-1508), il testo fu dapprima attribuito a Luca Pacioli, che ne pubblicò la traduzione in volgare nel 1509, inserendola nel *De divina proportionem* ed ascrivendosene in tal modo la paternità. Il plagio

⁴ Per Ginzburg (Ginzburg, 1981) la presenza del ritratto di Giovanni VIII Paleologo sarebbe una dimostrazione evidente della volontà di celebrare l'imperatore bizantino: Giovanni Bacci, subentrato nel 1459 nella committenza dopo la morte del padre, avrebbe conosciuto direttamente Bessarione e richiesto a Piero di aggiungere l'effigie dell'imperatore. Lo scopo del cardinale sarebbe stato quello di esaltare il Paleologo, con cui era giunto in Italia per il Concilio e grazie al quale era entrato in possesso di un frammento del legno della Vera Croce.

⁵ È testimoniata dal Passavant (Passavant, 1839), ma oggi non più leggibile.

⁶ I nomi dei solidi seguono qui la nomenclatura introdotta da Keplero nel 1619, non presente tuttavia nell'opera di Piero.

fu notato già dal Vasari, segnalato da Mancini nella prima edizione del testo, risalente al 1915 (Mancini, 1915), e da altri (Peterson, 1997). L'edizione critica nazionale risale invece al 1995 (Grayson et al., 1995).

11.1.4. *De prospectiva pingendi* (1478?)

Piero fu certamente uno dei più grandi esperti di prospettiva lineare, su cui compose il trattato *De prospectiva pingendi* a trentanove anni di distanza dal *De pictura* dell'Alberti. La familiarità di Piero con l'*Ottica* e gli *Elementi* di Euclide segna la principale differenza rispetto al suo predecessore: il metodo che Piero individua viene applicato rigorosamente (Elkins, 1987). I risultati delle ricerche matematiche precedenti, sintetizzate nel *Libellus* e prima ancora nel *Trattato d'abaco*, vengono applicati al disegno stereometrico di corpi ed elementi architettonici nel *De prospectiva pingendi*: negli anni intercorsi fra i primi trattati e quest'ultimo, il metodo di Piero aveva avuto notevole rinomanza nella letteratura del settore ed era stato applicato in molte arti, persino all'intarsio in legno (Daly Davis, 2001), ogniqualvolta un artista voleva offrire una rappresentazione prospettica di singoli oggetti o di uno scorcio architettonico.

Il trattato è il primo ad occuparsi di prospettiva in termini matematici, ossia della tecnica per suggerire una terza dimensione in opere di pittura o in bassorilievi: l'idea dell'autore è quella di dimostrare che il metodo, basandosi sulle nozioni di ottica del tempo, ha solidi fondamenti scientifici. Infatti, la prima parte dell'opera è interamente dedicata a teoremi tratti dall'opera di Euclide e dagli studi di Piero stesso. Destinatari dell'opera sono i pittori, cui sono riservate minuziosissime e talvolta ridondanti indicazioni operative.

La prima edizione del testo risale al 1899 a opera di Winterberg (Winterberg, 1899); un'edizione recente è quella della Nicco-Fasola (Nicco-Fasola, 1984).

11.1.4.1. *La tradizione dell'opera*

Complessivamente esistono sette manoscritti dell'opera, risalenti al XV-XVI secolo, sia in lingua volgare nel testo originale di Piero sia nella posteriore trasposizione latina di Matteo di Pietro Anghiari, rivista dallo stesso Piero.

1. Parma, Biblioteca Palatina, ms. 1576 (in volgare – autografo)
2. Milano, Biblioteca Ambrosiana, C 307 inf. (in latino)
3. Milano, Biblioteca Ambrosiana, D 200 inf. (in volgare – autografo)
4. Milano, Biblioteca Ambrosiana, D 195 inf. (frammento)
5. Reggio Emilia, Biblioteca Panizzi, ms. REGG. A 41/2 (in volgare – autografo)
6. Reggio Emilia, Biblioteca Panizzi, ms. REGG. A 41/4 (in latino; copia parziale del C 307 inf.)
7. Reggio Emilia, Biblioteca Panizzi, ms. REGG. A 41/5 (copie parziali del 41/2 di Reggio e del 1576 di Parma)

11.1.4.2. Il testo

Il trattato è organizzato in tre libri: nel primo, Piero si occupa di punti, linee e superfici; nel secondo «*de corpi chubi, de pilastri quadri, de colonne tonde et de più facce*»; nel terzo, «*de le teste et capitelli, base, torchi de più base et altri corpi diversamente posti*».

L'approccio di Piero alla parte geometrica mostra l'intento pratico del trattato; punto, linea e superficie non devono essere intesi come enti geometrici, ma pittorici; infatti, precisa l'autore, «*questi [i punti] non sono aparenti se non a l'intellecto et io dico tractare de prospectiva con demonstrationi le quali voglio sieno comprese da l'ochio, perbò è necessario dare altra difinitione. Dirò adunqua puncto essere una cosa tanto piccholina quanto è possibile a ochio comprendere; la line dico essere extensione da uno puncto a un altro, la cui larghezza è de simile natura che è il puncto. Superficie dico essere larghezza e longhezza compresa da le linee*».

Nel trattato, Piero presenta esclusivamente problemi di riduzione prospettica, in progressione di complessità, in modo da introdurre per gradi il lettore alle tecniche attraverso il sussidio della pratica (Fava, 1972).

11.1.4.3. Le città ideali e gli scorci prospettici urbani nell'opera di Piero

Associate (Miller, 1993) a quest'opera di Piero, sono le tre tavole raffiguranti le città ideali, conservate ad Urbino, Baltimora e Berlino, che a giudizio della critica più attuale (Nicco-Fasola, 1984) contengono anch'esse alcuni progetti vagheggiati da Niccolò V per il riassetto urbanistico di Roma in occasione del giubileo del 1450.

Le tre opere presentano forti analogie fra loro ed hanno suscitato un grande interesse negli storici, che hanno da sempre cercato di individuarne la paternità: è stato proposto il nome di Piero della Francesca o di un artista della sua scuola, oppure di **fra' Carnevale** (1445-1484), scritto negli inventari della corte di Urbino, luogo di provenienza di tutte le opere, altri ancora indicano **Luciano Laurana** (1430-1502) o **Francesco di Giorgio Martini** (1439-1501); l'attribuzione più recente, proposta grazie ad uno studio basato su tecniche radiologiche dei disegni preparatori della tavola urbinata, è all'**Alberti** stesso (Acidini Luchinat e Morolli, 2006). Se questa tesi trovasse altre conferme, le tavole potrebbero essere state disegnate dall'Alberti, ma dipinte ad opera di un altro artista della cerchia urbinata.

Indipendentemente dall'attribuzione di queste tavole, va segnalato che Piero ha spesso inserito nelle sue opere scorci urbani di notevole interesse, sia di fantasia, sia tratti da paesaggi a lui familiari. Caso paradigmatico è quello dell'episodio *Ritrovamento e verifica della Vera Croce* del ciclo della *Leggenda della Vera Croce*, dove convivono, nello stesso affresco, uno scorcio di Arezzo ed uno di Borgo.

11.2. LUCA PACIOLI

11.2.1. *La vita*

Nato nel 1445 a Borgo San Sepolcro, come Piero, Luca si allontanò dalla città ancora ragazzo, dopo aver studiato le basi di matematica commerciale, per trasferirsi a Venezia presso il facoltoso mercante Antonio Rompiansi (o Rompiasi), come precettore dei figli ed aiutante ⁷. Qui, Pacioli colse l'opportunità di continuare i suoi studi in latino e nelle arti liberali alla scuola di Rialto, di **Domenico Bragadin** (o Domenico da Venezia), e di maturare esperienza didattica e commerciale. Alla morte di Rompiansi, si spostò a Roma presso **Leon Battista Alberti**, allora segretario nella Cancelleria pontificia; in questa città iniziò gli studi teologici ed entrò nell'ordine francescano.

Dal 1477 al 1489 la sua vita diventò itinerante, poiché si trasferiva da un'università all'altra per insegnare aritmetica, anche se trovò il tempo per scrivere ben due trattati di aritmetica ⁸: era all'università di Perugia dal 1477 al 1480, poi a Zara, ancora a Perugia, a Napoli ed a Roma; probabilmente, a Urbino, era anche tutore di **Federico Guidubaldo da Montefeltro**, figlio del duca Federico.

Tornato a Borgo, nonostante alcuni dissapori, peraltro di breve durata, con i religiosi locali, Luca si occupò della *Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proportionalità* che dedicò al suo pupillo Guidobaldo, nel frattempo divenuto ultimo duca di Urbino. L'opera fu pubblicata a Venezia nel 1494 presso Paganino de' Paganini. Due anni dopo, Luca fu invitato a Milano dal duca Ludovico Maria Sforza, detto il Moro (1452-1508) per insegnare matematica a corte, forse dietro suggerimento di **Leonardo da Vinci** (1452-1519), che già frequentava la corte sforzesca. Infatti negli anni successivi i due collaboravano: Luca cominciò a scrivere il suo trattato *De divina proportione*, pubblicato nel 1509, il cui apparato iconografico è curato proprio da Leonardo.

Gli anni successivi (1498-1500) furono molto tormentati: prima dovette rifugiarsi a Mantova con Leonardo, durante l'invasione francese; poi i due fuggirono a Venezia ed a Firenze, dove trovarono una sede relativamente stabile. Luca diventò docente di geometria all'Università di Pisa, momentaneamente trasferitasi a Firenze. Leonardo andò per un breve periodo a lavorare per Cesare Borgia in Romagna; Pacioli insegnò all'Università di Bologna durante il 1501-

⁷ Le note biografiche sono state redatte sulla base di: (Speziali, 1973), (Jayawardene, 1974), (Giusti e Maccagni, 1994), (Ulivi, 1994).

⁸ Composto fra il 12 dicembre 1477 e il 29 aprile 1478, il manoscritto (Vat.Lat. 3129) contiene il *Trattato d'aritmetica e d'algebra*, consta di 367 fogli ed è dedicato *suis carissimis discipulis, egregijs clarisque juvenibus perusinis*. Il contenuto, in sintesi, è lo stesso della *Summa*.

1502, incontrando Scipione del Ferro (1465-1526), il matematico che avrebbe scoperto la formula risolutiva delle equazioni cubiche. Negli anni fiorentini, Luca fece anche carriera ecclesiastica: fu eletto superiore del suo ordine in Romagna e ammesso nel prestigioso monastero di Santa Croce a Firenze.

Tornò a Venezia, negli anni successivi, attratto dall'opportunità di pubblicare i suoi lavori: infatti nel 1509 diede alle stampe il testo in tre volumi del *De divina proportione* e una nuova traduzione latina degli *Elementi* di Euclide, basata sulla versione trecentesca di Giovanni **Campano da Novara** (1220-1296), ma riccamente commentata da Luca (Bologna, Biblioteca Universitaria, 250).

Viaggiò ancora tra Perugia, dove tenne lezioni di aritmetica (Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana, Vat. lat. 3129), e Roma, poi ritornò a Borgo, dove morì nel 1517, lasciando incompiuti gli ultimi opuscoli di giochi, il *De viribus quantitatis* (Roma, Biblioteca Casanatense, Cod. 4066) e il *De ludis* o *Schifanoia* (anch'esso in Roma, Biblioteca Casanatense, Cod. 4066).

11.2.2. De divina proportione

Incominciato a Milano nel 1496, dedicato al duca Ludovico Sforza e stampato a Venezia nel 1509 per i tipi di Paganino de' Paganini (Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana, Cod. 257), è testimoniato da due manoscritti: uno a Milano (Biblioteca Ambrosiana, & 170 sup.), l'altro a Ginevra (Bibliothèque Publique et Universitaire, m. l. e. 210); e da frammenti in un codice in Germania, ad Erlangen (Universitätsbibliothek, 836).

L'argomento generale è la proporzione matematica ed artistica, in particolare il calcolo del rapporto aureo e la sua applicazione in architettura (Bertato, 2005). Leonardo da Vinci, mentre studiava questi concetti con Pacioli, ne curò le illustrazioni stereometriche. Il primo libro contiene i teoremi di Euclide connessi con questa proporzione e studia anche i poligoni regolari e semiregolari.

Nel secondo libro, Luca passa a fare una storia dell'applicazione prospettica da parte di autorevoli artisti come Piero della Francesca, Melozzo da Forlì (1438-1494) e del suo allievo Marco Palmezzano (1459/1463-1539) ed infine, nel terzo, inserisce la già citata traduzione in italiano del *Libellus de quinque corporibus regularibus*, senza attribuirne la paternità a Piero.

11.2.2. Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proportionalità

Fu pubblicata a Venezia nel 1494 e di nuovo a Tuscolano sul Garda nel 1523. Un manoscritto è conservato a Cambridge (University Library, Addit. 7711); un altro a Milano (Biblioteca Ambrosiana, P 114 Sup.). L'edizione nazionale è del 1994 (Giusti, 1994b).

Come ben indica il titolo, l'opera costituisce una vera e propria enciclopedia del sapere abacistico, poiché l'autore presenta aritmetica, algebra, geometria e trigonometria attraverso le scoperte dei suoi predecessori, come Euclide, Boezio, Giordano Nemorario, Biagio da Parma, Sacrobosco, Fibonacci, Prosdocimo de' Beldomandi e molti altri, anche rimasti anonimi. Questo legame con tante fonti più o meno dichiarate ha fatto formulare da parte di più di uno studioso ⁹ l'accusa di plagio. Altri (Giusti, 1994a; Giusti e Maccagni, 1994), pur ammettendo la notevole «sistematicità con cui Pacioli si avvale delle opere altrui», osservano che «quello che conta, nell'opera di fra' Luca come in quella del Pisano [Fibonacci], non è il maggiore o minore grado di originalità del suo contenuto, ma l'aver organizzato le conoscenze in un tutto organico, e nell'aver messo a disposizione degli studiosi un testo nel quale potessero trovare facilmente quanto prima era sparso e difficile da rinvenire».

L'opera è divisa in due parti: la prima è dedicata a questioni di aritmetica e algebra; la seconda è il *Tractatus geometriae*.

La prima parte della *Summa* è composta da nove *distinzioni*, divise in *trattati*, a loro volta costituiti da *articoli* o *capitoli*.

1. Analisi della quantità discreta e continua con riferimenti all'opera di Nicomaco e di Teone.
2. Descrizione del sistema di numerazione in base 10, del calcolo digitale e delle operazioni con gli interi (*sani*); le tecniche per eseguire le operazioni presentate sono varie.
3. Calcolo con le frazioni (*rotti*).
4. Ancora sul calcolo con le frazioni.
5. Regola del tre.
6. Teoria delle proporzioni.
7. Falsa posizione semplice e doppia (*elkatayn*).
8. Teoria algebrica modellata sul *Liber Abaci* di Fibonacci; i *tractati* dal 4 al 6 sono dedicati all'algebra. Nel quarto trattato, Pacioli presenta le equazioni fino al ventinovesimo grado; nel quinto si danno le definizioni dei numeri algebrici (numero, cosa e censo), seguite dalle sei regole per i casi semplici e composti ¹⁰, come nel *Liber Abaci*; Luca aggiunge però le regole connesse con i casi in cui $ax^n = bx^n; n \geq 1$: le equazioni hanno soluzione solo nel caso in cui $a = b$ e dunque $x = 1$, altrimenti sono indicate come senza soluzione. Le prove geometriche che seguono sono del tutto simili a quelle di Fibonacci. Nel sesto trattato, Pacioli fornisce consigli su come utilizzare l'algebra per risolvere problemi:

⁹ Già Vasari nel Cinquecento, ma anche Brown (Brown, 1960), Franci e Toti Rogatelli (Franci e Toti Rigatelli, 1985) e Picutti (Picutti, 1989).

¹⁰ In effetti, i tre casi composti sono presentati in quartine latine.

- scegliere con cura l'incognita;
- riportare sempre l'equazione ad uno dei casi noti;
- eliminare gli eventuali radicali;
- introdurre, se necessario, due incognite irrazionali distinte (*cosa* e *quantità*, come si è già visto fare a Fibonacci e a Mazzinghi).

Attraverso la proporzionalità, ossia moltiplicando per l'incognita ogni termine dell'equazione, Luca spiega che si possono ottenere, a partire dai sei casi di base, infiniti altri casi, non tutti risolvibili con le nozioni dell'epoca: ad esempio, giudica impossibili $ax^4 + bx^2 = cx$ e $ax^4 + cx = bx^2$.

La trattazione algebrica rimane teorica (Franci e Toti Rigatelli, 1985), nonostante la presenza di molti problemi di argomento commerciale: cambio, società, baratto ed interessi.

9. La nona distinzione è riservata ad argomenti mercantili e contiene il *Tractatus particularis de computis et scripturis* (tenuta dei libri contabili secondo *el modo de Vinegia*).

Il principale merito che la storiografia matematica (Casalderrey, 2000) riconosce a Pacioli è quello di aver trasmesso ai grandi algebristi del XVI secolo, come **Scipione del Ferro**, **Gerolamo Cardano**, **Niccolò Tartaglia** e **Ludovico Ferrari**, una sintesi della matematica precedente, stimolandoli più o meno direttamente alla ricerca delle soluzioni delle equazioni cubiche; essi furono certamente influenzati anche dalla cultura dell'abaco (Arrighi, 1966a; Bartolozzi e Franci, 1990), che circolava nei numerosi manoscritti a noi pervenuti e non.

11.3. GEROLAMO CARDANO

Cardano (1501-1576) rappresenta l'ultimo erede dichiarato dell'algebra araba, mediata attraverso la letteratura d'abaco. La sua *Ars Magna*, la prima opera di algebra in latino ad essere stampata (1545), si pone consapevolmente in una linea di continuità con il sapere medievale; all'inizio del primo capitolo l'autore presenta una concisa storia dell'algebra: «Questa arte ha preso inizio da Maometto, figlio dell'arabo Mosé. Infatti un testimone affidabile di ciò [tale origine] fu Leonardo Pisano. Ha lasciato quattro capitoli, con le sue dimostrazioni, che noi gli attribuiremo nei passi opportuni. Dopo un lungo intervallo di tempo, a quelli furono aggiunti tre capitoli derivati, di autore incerto, i quali tuttavia furono collocati da Luca Pacioli con i principali. Infine, ho letto anche altri tre capitoli derivati dai primi, ideati da uno sconosciuto, tuttavia questi non erano per nulla stati messi in luce, pur essendo di gran lunga più utili degli altri: infatti insegnavano il calcolo di cubi e numeri e cubi quadrati. Ma ai nostri tempi, il bolognese **Scipione del Ferro** ha ideato uno studio sul cubo e sulle cose uguali a un numero, lavoro davvero bello e notevole. Per emulare costui, il bresciano **Niccolò Tartaglia**, no-

stro amico, avendo affrontato in una sfida un suo (di quello) discepolo **Antonio Maria Flor**, dimostrò, per non essere sconfitto, quella medesima regola, che, su mia insistita richiesta, mi spiegò. Tratto perciò in inganno dalle parole di Pacioli, il quale afferma che non ci può mai essere nessun'altra regola generale al di fuori di quelle indicate da lui, (sebbene io l'avessi tra le mani, dopo aver già fatto tante altre scoperte), avevo perso la speranza di trovare ciò che non osavo cercare. Poi, ottenuta quella, essendo andato in cerca della dimostrazione, ho capito che ce ne possono essere molte altre. E perciò accresciute la passione e la fiducia, ho fatto scoperte, in parte da solo, in parte grazie a **Ludovico Ferrari**, già nostro alunno. Di seguito [nell'opera], le scoperte altrui sono associate ai rispettivi nomi, quelle senza nome sono nostre. Ma anche le regole, tranne le tre di Maometto e le due di Ludovico, sono tutte nostre, e saranno preposte ai singoli capitoli, poi, dopo la regola, sarà esposta la dimostrazione». ¹¹

Come si vede, la paternità dell'algebra è ricondotta senza esitazioni ad al-Khawarizmi, probabilmente sulla base dell'attribuzione fatta da Fibonacci nel *Liber Abaci*; al contrario mancano riferimenti a Diofanto o ad altri matematici greci (Franci e Toti Rigatelli, 1985; Cifoletti, 1996), molto cari invece ai matematici vicini ad ambienti umanistici.

I legami fra l'algebrista arabo e Cardano non si limitano a questo riconoscimento, ma si estendono all'ambito metodologico: l'*Ars Magna* infatti offre la trattazione minuziosa di tutti i casi delle equazioni di terzo grado, proprio come era avvenuto per quelle di secondo grado nell'*Algebra* di al-Khawarizmi, ed allo stesso modo se ne presenta una dimostrazione geometrica (Hunger Parshall, 1988). Quest'ultimo aspetto creò problemi nel calcolo con numeri negativi, dal momen-

¹¹ *Haec ars olim a Mabomete Mosis Arabis filio initium sumpsit. Etenim buius rei locuples testis Leonartus Pisanus. Reliquit autem capitula quatuor, cum suis demonstrationibus, quas nos locis suis ascribemus. Post multa vero temporum interualla, tria capitula deriuatiua addita illis sunt, incerto authore quae tamen cum principalibus, a Luca Pacciolo posita sunt. Demum etiam ex primis, alia tria deriuatiua, a quodam ignoto viro inuenta legi, haec tamen minime in lucem prodierant, cum essent alijs longe utiliora nam cubi & numeri & cubi quadrati aestimationem docebant. Verum temporibus nostris, Scipio Ferreus Bononiensis, capitulum cubi & rerum numero aequalium inuenit, rem sane pulchram & admirabilem. [...] Huius aemulatione Nicolaus Tartalea Brixellensis, amicus noster, cum in certamen cum illius discipulo Antonio Maria Florido venisset, capitulum idem, ne vinceretur, inuenit, qui mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit. Deceptus ergo verbis Lucae Paccioli, qui ultra sua capitula, generale ullum aliud esse posse negat (quamquam tot iam antea rebus a me inventis, sub manibus esset) desperabam taman inuenire, quod quaerere non audebam. Inde autem, illo habito, demonstrationem venatus, intellexi complura alia posse haberi. Ac eo studio, auctaque iam confidentia, per me partim, ac etiam aliqua per Ludouicum Ferrarium, olim alunnum nostrum, inueni. Porro quae ab his inuenta sunt, illorum nominibus decorabuntur, caetera, quae nomine carent, nostra sunt. At etiam demonstrationes, praeter tres Mabometis, & duas Ludovici, omnes nostrae sunt, singulaeque capitibus suis praeponentur, inde regula addita, subijcetur experimentum. (Cap. I).*

to che si prospettavano difficoltà concettuali nel pensare a dimensioni negative, così come nel trattare i risultati di sottrazioni del tipo $a - b$ con $a, b > 0, a < b$.

11.4. IL DEFINITIVO TRAMONTO

Dopo Cardano, l'ultimo ad attribuire ad al-Khawarizmi la paternità dell'algebra e a non citare Diofanto fu **Nicolò Tartaglia** nel *General Trattato di Numeri e Misura* (1543).

Nel tardo XVI secolo, infatti, in un'*Algebra*, ristampa postuma¹² di un'opera omonima attribuita al francese **Pierre de la Ramée** (1509-1572), si trova una fantasiosa ricostruzione della storia dell'algebra, dimostrazione lampante del declino della fama di al-Khawarizmi, di cui si ignora persino il nome: «Si crede che il termine algebra sia siriano e significhi *arte e dottrina di un uomo straordinario*. Infatti *Geber* in Siria significa *uomo*, e questo termine ha talvolta una connotazione onorifica, come presso di noi *maestro* o *dottore*. Si tramanda infatti che ci fu un insigne matematico, che inviò ad Alessandro Magno un suo libro di algebra, scritto interamente in lingua siriana e lo intitolò *Almucabala*, ossia *libro di cose occulte*, dottrina che altri hanno preferito chiamare algebra. Questo libro è oggi tenuto in grande considerazione presso quei popoli eruditi dell'Oriente; dagli Indiani, esperti di queste arti, è chiamato *Aliabra*, oppure anche *Alboret*, anche se è sconosciuto il nome esatto dell'autore. L'algebra fu chiamata da alcuni latini *ars rei et census*, come è nelle opere di Regiomontanus. In Italia per alcuni è *arte de la cosa*, per altri *cossa*. Dall'esistenza di tanti e forse più nomi, risulta altrettanto evidente quanto fu stimata questa dottrina presso i dotti di ogni popolo e con quanto danno oggi i più la trascurino nelle scuole»¹³.

¹² Per la precisione, si tratta di tre ristampe, sostanzialmente identiche tra loro nel contenuto, i cui editori sono gli eredi di André Wechel, editore della prima, pubblicata nel 1560 e sicuramente attribuita a Ramée. Le ristampe risalgono invece agli anni 1586, 1592 e 1599 e copie sono conservate rispettivamente nella biblioteca di Wolfenbüttel, nella Bibliothèque Nationale di Parigi e nella Public Library di New York (Høyrup, 1996).

¹³ *Nomen Algebra Syriacum putatur, significans artem et doctrinam hominis excellentis. Nam Geber Syris significat virum, idque nomen interdum est bonoris, ut apud nos Magister aut Doctor. Etenim insignis mathematicus quidam fuisse fertur, qui suam algebram Syriaca lingua perscriptam ad Alexandrum Magnum miserit, eamque nominaverit Almucabalam, hoc est, librum de rebus occultis, cuius doctrinam Algebram alii dicere maluerunt. Is liber hodie magno precio est apud illas eruditas Orientis nationes, et ab Indis harum artium perstudiosis dicitur Aliabra, item Alboret, tametsi proprium auctoris nomen ignoretur. Algebra vero a Latinis quibusdam dicta fuit ars rei et census, ut est apud Regiomontanum. Ab Italis ars de la cosa, an aliis cossa. Quibus tot nominibus ac fortasse pluribus etiam palam fit, quanti fuerit haec doctrina apud doctos omnium gentium homines quantaque cum iactura doctrinae plerique in scholiis hodie neglegunt. Ibid.*

Di fatto, nei secoli successivi, per effetto della riscoperta e della traduzione di tante opere classiche, fu posto l'accento eminentemente sull'origine greca dell'algebra e, tranne rari casi ¹⁴, fu accantonato ogni interesse per la matematica medievale e per la sua matrice arabo-islamica, almeno, come si è visto, fino a quando le pubblicazioni di **Baldassarre Boncompagni** (1821-1894), **Michel Chasles** (1793-1880) e **Guillaume Libri** (1803-1869) non riaprirono la questione.

¹⁴ Gli scritti di Fibonacci continuavano ad essere letti solo in qualche ambito minore: ad esempio, come ricorda Pepe (Pepe, 2002), il matematico **Muzio Oddi** lo cita nel suo *Dello squadro* (Oddi, 1625) e l'inglese **Edward Bernard** (1638-1697) nella sua raccolta di opere storiche di matematici, di cui riferisce Libri (Libri, 1838).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- D. Abulafia, «The Role of Trade in Muslim-Christian Contact during the Middle Ages», in D. Agius e R. Hitchcock (a cura di), *The Arab Influence in Medieval Europe* (Lebanon, Ithaca press, 1996).
- C. Acidini Luchinat e G. Morolli, *L'uomo del Rinascimento. Leon Battista Alberti e le arti a Firenze tra ragione e bellezza* (Firenze, Mandragora, 2006).
- P. Acker, «The Crafte of Nombryng in Columbia University Library, Plimpton ms 259», *Manuscripta*, 37 (1993).
- G. Airaldi (a cura di), *Gli orizzonti aperti. Profili del mercante medievale* (Torino, G.B. Paravia, 1997).
- D. Aissani, *Bougie Médiéval: centre de transmission méditerranéen*, in *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*, Montpellier, 1993, a cura di D. Aissani, (IREM de Montpellier, 1995).
- D. Aissani e D. Valerian, «Mathématiques, commerce et société à Béjaia (Bugia) au moment du séjour de Leonardo Fibonacci (XII-XIII siècle)», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XXIII (2002).
- A. A. al-Daffa, *The Muslim Contribution to Mathematics* (London, Croom Helm, 1977).
- L. Albuquerque, «Nunes, Pedro», in J. SERRÃO (a cura di), *Dicionário de História de Portugal* (Porto, Figueirinhas, 1981), pp. 407-408.
- G. N. P. Alidosi, *Li Dottori Forestieri, che in Bologna hanno letto Teologia, Filosofia, Medicina, & Arti Liberali, con Li Rettori dello Studio da gli anni 1000, fino per tutto Maggio del 1623* (Bologna, Tebaldini, 1623).
- A. Allard, *Les plus anciennes versions latines du 12ème siècle issues de l'arithmétique d'al-Kuwarizmi* (Louvain-le-Neuve, Faculté de Philosophie et Lettres de l'Université Catholique, 1975).
- A. Allard (a cura di), *Maxime Planude: Le grand calcul selon les Indiens* (Louvain-la-Neuve Faculté de Philosophie et Lettres de l'Université Catholique 1981).
- A. Allard, *La nature et la diffusion des méthodes de Calcul indien dans l'Occident médiéval du XIIe et XIIIe siècle*, presentato a *European Mathematics during the XVth Century*, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Cortona, Italy, 1991.
- A. Allard (a cura di), *Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi Le calcul indien (algorismus). Versions latines du XIIe siècle* (Paris, Lib. sc. et tec. A. Blanchard, 1992).

- A. Allard, «L'influence des mathématiques arabes dans l'Occident médiéval», in R. Rashed (a cura di), *Histoire des sciences arabes* (Paris, Le Seuil, 1997).
- A. Allard, *Sur les nombres figurés et les médiétés dans l'arithmétique de Boèce*, in Boèce ou la chaîne des savoirs, *Actes du Colloque international de la Fondation Singer Polignac* Paris, 1999, a cura di A. Galonnier, (Peeters, 2003).
- A. Allard, *Les versions de 1202 et 1228 du Liber Abaci*, presentato a Leonardo Fibonacci. Matematica e società nel Mediterraneo del secolo XIII. Convegno internazionale di studi, Pisa-Firenze, 2002.
- H. Alten, A. Djafari Naini, M. Folkerts, H. Schlosser, K. Schlote e H. Wußing, *4000 Jahre Algebra – Geschichte Kulturen Menschen* (Berlin Heidelberg, Springer Verlag, 2000).
- L. M. Álvarez, «Petrus Alfonsi», in M. R. Menocal, R. P. Scheindlin e M. Sells (a cura di), *The Literature of Al-Andalus* (Cambridge, Cambridge University Press, 2000).
- A. Anboub, «L'algèbre arabe aux IXe et Xe siècles. Aperçu général», *Journal for the History of Arabic Science*, 2 (1978), pp. 66-100.
- G. Arnaldi, «Scuole nella Marca Trevigiana e a Venezia nel XIII secolo», in G. Arnaldi e M. Pastore Stocchi (a cura di), *Storia della cultura veneta* (Vicenza, N. Pozza, 1976).
- G. Arrighi, «L'Aritmetica di Paolo d'Abaco e i tempi suoi», *Cultura e scuola*, III (1964a), pp. 273-276.
- G. Arrighi, *La 'Practica geometriae' di Leonardo Fibonacci e i tempi suoi* in Celebrazioni archimedee del secolo XX. Simposio di didattica della matematica, Gubbio, 1964b.
- G. Arrighi (a cura di), *Maestro Guglielmo. De Arithmetica compendiose tractata. Dal codice 614 (sec. XII) della Biblioteca Capitolare Feliniana di Lucca* (Pisa, Domus Galileana, 1964c).
- G. Arrighi, «Il codice L.IV.21 della Biblioteca degli Intronati di Siena e la "Bottega d'abaco" a santa Trinita in Firenze», *Physis*, 7 (1965), pp. 369-400.
- G. Arrighi, «La matematica del Rinascimento in Firenze. L'eredità di Leonardo Pisano e le 'Botteghe d'abaco'», *Cultura e scuola* (1966a), pp. 287-294.
- G. Arrighi (a cura di), *Paolo dell'Abaco. Regoluzze. Secondo la lezione del codice 2511 della Biblioteca Riccardiana di Firenze* (Prato, Azienda Autonoma di Turismo, 1966b).
- G. Arrighi, «Note di algebra di Piero della Francesca», *Physis*, 9 (1967), pp. 421-424.
- G. Arrighi, «La fortuna di Leonardo Pisano alla corte di Federico II», in *Dante e la cultura sveva: atti del Convegno di studi tenuto a Melfi in collaborazione con la Biblioteca provinciale di Potenza*, Melfi 1969, (Olschki, 1970).
- G. Arrighi, «Piero della Francesca. Trattato d'abaco. Dal codice Ashburnhamiano 280 della Biblioteca Medicea laurenziana di Firenze», *Testimonianze di Storia della Scienza*, 6 (1970).
- G. Arrighi, «Un 'libro d'abaco' umbro: il primo in volgare italiano Codice 2404 (sec. XIII) della Biblioteca Riccardiana di Firenze», *Bollettino della deputazione di Storia Patria per l'Umbria* 83 (1986), pp. 161-165.
- G. Arrighi, «Maestro Umbro (sec. XIII). Libro de l'abbecho. Codice 2404 della Biblioteca Riccardiana di Firenze». *Bollettino di Deputazione di Storia Patria per l'Umbria*, 86 (1989), pp. 5-140.

- H. M. Attiya, «Knowledge of Arabic in the Crusader States in the twelfth and thirteenth centuries», *Journal of Medieval History*, 25 (1999), p. 203.
- G. T. Bagni, «Dai coniglietti alla «sezione aurea»: piccole storie matematiche», *Progetto Alice II* 5(2001a), pp. 175-190.
- G. T. Bagni, *L'arte de labbacho (l'Aritmetica di Treviso, 1478) e la matematica medievale*, presentato a I Seminari dell'Umanesimo Latino 2001-2002, Antilia, Treviso, 9-32, 2001b.
- B. Bakhouché (a cura di), *Bernelin – Libre d'abaque* (Monein, Princi Néguer, 2000).
- I. Baldelli, «Di un volgarizzamento pisano della Pratica geometrie», *Rivista di cultura classica e medievale*, VII (1965), pp. 74-92.
- M. Ballieu, *Le monde 'arabe': quelques pages de son histoire*, in M. Ballieu (a cura di), Pour une culture mathématiques accessible à tous: élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes, (Nivelles, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques a.s.b.l., 2004).
- J. R. Banker, «Piero della Francesca as Assistant to Antonio d'Anghiari in the 1430s: Some Unpublished Documents», *The Burlington Magazine*, 135 (1993), pp. 16-21.
- F. Barbieri e C. Fiori, «Sulle scienze matematiche a Modena nei secoli XIV e XV», *Atti e Mem. Accad. Naz. Sc. Lettere Arti Modena*, VII (1993), pp. 43-56.
- F. Barbieri e P. Lancellotti, «Della radice de' numeri e metodo di trovarla (Trattatello di Algebra e Geometria) dal Codice Ital. 578 della Biblioteca Estense di Modena. Parte seconda», *Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale*, 16 (1986).
- F. Barbieri e P. Lancellotti, «Bastiano da Pisa detto il Bevilacqua (sec XVI), Trattato d'arismetricha praticcha, dal Codice Ital. 1110 della Biblioteca Estense di Modena», *Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale*, 17 (1987).
- A. Bartoli Langeli, «I notai e i numeri (con un caso perugino 1184-1206)», in *Scienze matematiche e insegnamento in epoca medievale*, Chieti, 1996, a cura di P. Freguglia, L. Pellegrini e R. Paciocco, (ESI, Napoli, 2000).
- M. Bartolozzi e R. Franci, «La teoria delle proporzioni nella matematica dell'abaco da Leonardo Pisano a Luca Pacioli», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, X (1990), pp. 3-28.
- G. Beaujouan, «Étude paléographique sur la «rotation» des chiffres et l'emploi des «apices» du Xe au XIIIe siècle», *Revue d'histoire des sciences* (1948).
- G. Beaujouan, «L'enseignement de l'arithmétique élémentaire à l'université de Paris aux XIIIe et XIVe siècles. De l'abaque à l'algorithme», in AA.VV. (a cura di), *Homenaje a Millàs-Vallcrosa* (Barcelona, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1954).
- G. Beaujouan, «Article Nombre», in J. Le Goff e J.-C. Schmitt (a cura di), *Dictionnaire raisonné de l'Occident médiéval* (Paris, Librairie A.Fayard, 1999), pp. 834-844.
- O. B. Bekken e M. Christoffersen, «Algorismus i Hauksbok», *Agder Distrikthøgskole : Fagseksjon for matematikk / Fagseksjon for norsk*, 1 (1985).
- B. Berenson, *Pittori italiani del Rinascimento* (Milano, Hoepli, 1936).
- J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* (New York, Springer-Verlag, 1986), p. 197.

- W. Bergmann, *Innovationen im Quadrivium des 10. und 11. Jahrhunderts : Studien zur Einführung von Astrolab und Abakus im lateinischen Mittelalter* (Stuttgart, Franz Steiner, 1985), pp. 175-215.
- F. M. Bertato, «Fratre Luca Pacioli e su divin proportion», *Revista Brasileira de História da Matemática*, 4 (2005), pp. 79 -91.
- H. Beseler e H. Roggenkamp, *Die Michaeliskirche in Hildesheim* (Hildesheim, Selbstverlag, 1954).
- E. Bessel-Hagen e O. Spies, «Das Buch über die Ausmessung des Kreisringes des Ahmad ibn 'Omar al-Karabisi», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B: Studien*, 1 (1931), pp. 502-540.
- R. O. Besthorn, J. L. Heiberg, J. Junge, J. Raeder e W. Thomson, *Euclidis Elementa ex interpretatione al'Hadschdschaschii cum Commentariis al'Nayrizii* (Hauniae, Lib. Gylðendaliana, 1900).
- C. Bianca, «Libri copisti e stampatori tra Roma e la Germania», in *Germania Latina – Latinitas Teutonica*, Monaco, 2001, a cura di E. Keßler e H. C. Kuhn, (München, 2003).
- J. Biard e S. Rommevaux (a cura di), *Blaise de Parme Questiones circa Tractatum Proportionum Magistri Thome Braduardini* (Paris, Vrin, 2005).
- C. Binder, «Die erste Wiener Mathematische Schule (Johannes von Gmunden, Georg von Peurbach)», in *Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit*, Annaberg-Buchholz, 1996, a cura di R. Gebhardt e H. Albrecht, (Adam-Ries-Bund e.V, 1996).
- K. Bjarnadóttir, *Algorismus. Fornt stærðfræðirit í íslenskum handritum*. (Reykjavík, Rannsóknarstofnun Kennaraháskóla Íslands, 2004).
- A. A. Björnbo, «Gerhard von Cremona Übersetzung von Alkwarizmis Algebra und von Euklids Elementen», *Bibliotheca mathematica*, 6 (1905), p. 240.
- F. Bonaini, «Memoria unica sincrona di Leonardo Fibonacci novamente scoperta», *Giornale Storico degli Archivi Toscani*, 1-4 (1857), pp. 239-246.
- B. Boncompagni, «Della vita e delle opere di Gerardo cremonese traduttore del secolo duodecimo e di Gherardo da Sabbionetta astronomo del secolo decimoterzo», *Atti dell'Accademia Pontifica de' Nuovi Lincei*, 4 (1850-1851), pp. 412-435.
- B. Boncompagni, *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano secondo la lezione di un codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano* (Firenze, Tipografia Galileiana, 1854).
- B. Boncompagni (a cura di), *Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano pubblicato secondo la lezione del codice magliabechiano C. 1., 2616, Badia Fiorentina, n. 73* (Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857a).
- B. Boncompagni, *Trattati d'aritmetica pubblicati da Baldassarre Boncompagni, I, Algoritmi de numero Indorum; II, Ioannis Hispalensis liber Algoritmi de practica arismetice* (Roma, 1857b).
- B. Boncompagni, *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo* (Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857-1862).
- B. Boncompagni, «Intorno ad un trattato d'Aritmetica stampato nel 1478», *Atti dell'Accademia Pontifica de' Nuovi Lincei*, XVI (1862-1863).

- J.-Y. Boriaud e F. Furlan (a cura di), *Leon Battista Alberti, Descriptio urbis Romae* (Firenze, Olshki, 2005).
- Q. Bortolato e A. Contò, «Il carteggio inedito Boncompagni-Fapanni sull'Aritmetica di Treviso, 1478», *Studi Trevisani*, II (1985).
- H. Bosmans, «Le fragment du Commentaire d'Adrien Romain su 'Algèbre de mahumed ben Musa al-Chowresmi», *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 30 (1906), pp. 267-287.
- C. B. Boyer, «Zero: the Symbol, the Concept, the Number», *National Mathematics Magazine*, 18 (1944), pp. 323-330.
- C. B. Boyer, *A History of Mathematics* (New York, John Wiley and Sons, Inc., 1968).
- H. Bresc, «La Provence médiévale», *La pensée de Midi*, 1 (2000).
- H. Bresc e A. Nef (a cura di), *Idrîsî, La première géographie de l'Occident* (Paris, Flammarion, 1999), p. 165.
- C. Brezina, *Al-Khwarizmi – The Inventor of Algebra* (New York, The Rosen Publishing Group, 2006).
- H. Brown, «The Renaissance and Historians of Science», *Studies in the Renaissance*, VII (1960), pp. 27-42.
- N. Bubnov, *Gerberti postea Silvestri II. Papa Opera mathematica: (972-1003)* (Berlin, R. Friedländer, 1899).
- N. Bubnov, *Arithmetische Selbstständigkeit der Europäische Kultur: Ein Beitrag z. Kulturgeschichte* (Berlin, Friedländer, 1914).
- M. Buonocore (a cura di), *Vedere i classici. L'illustrazione libraria dei testi antichi dall'età romana al tardo Medioevo* (Roma, Palombi, 1996).
- R. Burnam, «A Group of Spanish Manuscripts: codices escorialenses Id2 and Id1», *Bulletin Hispanique*, 22 (1920), pp. 229-233.
- C. Burnett, «A Group of Arabic-Latin Translators Working in Northern Spain in the mid-twelfth Century», *Journal of the Royal Asiatic Society* (1977), pp. 62-108.
- C. Burnett, «Arabic into Latin in Twelfth-Century Spain: the Works of Hermann of Carinthia», *Mittelaltinisches Jahrbuch*, 13 (1978), pp. 100-134.
- C. Burnett, «Adelard of Bath: An English Scientist and Arabist of the Early Twelfth Century», *Warburg Institute Surveys and Texts* 14 (1987a), p. 208 pp.
- C. Burnett, «Literal Translation and Intelligent Adaptation amongst the Arabic-Latin Translators of the First Half of the Twelfth Century», in B. M. S. Amoretti (a cura di), *La diffusione delle scienze islamiche nel Medio Evo Europeo* (Roma, 1987b), pp. 9-28.
- C. Burnett, «Plato of Tivoli», in J. Strayer (a cura di), *Dictionary of the Middle Ages* (New York, Paul Scribner's Son, 1987c), pp. 704-705.
- C. Burnett, «Ocreatus», *Vestigia Mathematica* (1993), pp. 69-77.
- C. Burnett, «Magister Iohannes Hispanus: towards the Identity of a Toledan Translator», in AA.VV. (a cura di), *Comprendre et maîtriser la nature au moyen âge, mélanges d'histoire des sciences offerts à Guy Beaujouan* (Genève, 1994a), pp. 425-436.

- C. Burnett, «Master Theodore, Frederick II's Philosopher», in *Federico II e le nuove culture*, Atti del XXXI Convegno storico internazionale, Todi, 1994b, (Centro Studi Alto Medioevo, 1995) pp. 225-285
- C. Burnett, «Michael Scot and the Transmission of Scientific Culture from Toledo to Bologna via the Court of Frederick II Hohenstaufen», *Micrologus*, 2 (1994c), pp. 101-126.
- C. Burnett, «Algorismi vel helcep decentior est diligentia: the Arithmetic of Adelard of Bath and his Circle», in M. Folkerts (a cura di), *Mathematische Probleme im Mittelalter: Der lateinische und arabische Sprachbereich* (Wiesbaden, 1996), pp. 221-331.
- C. Burnett, «Antioch as a Link between Arabic and Latin Culture in the Twelfth and Thirteenth Centuries», in *Occident et Proche-Orient: Contacts scientifiques au temps des Croisades Actes du colloque*, Louvain-la-Neuve, 1997a, a cura di A. Tihon, I. Draelants e B. Van den Abeele, (Turnhout, 2000) pp. 1-78.
- C. Burnett, *The Introduction of Arabic Learning into England* (London, The Panizzi Lectures, 1997b).
- C. Burnett, «Translating from Arabic into Latin in the Middle Ages: Theory, Practice, and Criticism», in S. G. Lofts e P. W. Rosemann (a cura di), *Éditer, traduire, interpreter: essais de methodologie philosophique* (Louvain-la-Neuve, 1997c), pp. 55-78.
- C. Burnett, «The Works of Petrus Alfonsi: Questions of Authenticity», *Medium Ævum*, 66 (1997d), pp. 42-79.
- C. Burnett, «Tolède: le réveil des Latins», *Les cahiers de science et vie* (1998).
- C. Burnett, «Indian Numerals in the Mediterranean Basin in the Twelfth Century», in Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts e B. v. Dalen (a cura di), *From China to Paris: 2000 years transmission of mathematical ideas* (Stuttgart, Franz Steiner, 2002a).
- C. Burnett, «Learning Indian Arithmetic in the Early Thirteenth Century», *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, IX (2002b), pp. 15-26.
- C. Burnett, «Fibonacci's method of the Indians», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XXIII (2003).
- C. Burnett, «Abbon de Fleury, abaci doctor», *Oriens-Occidens*, 6 (2004), pp. 129-139.
- C. Burnett, «Arabic into Latin: the Reception of Arabic Philosophy into Western Europe», in P. Adamson e R. Taylor (a cura di), *The Cambridge Companion to Arabic Philosophy* (Cambridge, 2005), pp. 370-404.
- C. Burnett e A. Contadini (a cura di), *Islam and the Italian Renaissance* (London, Warburg Institute, 1999), p. 239.
- C. Burnett e D. Pingree (a cura di), *The Liber Aristotilis of Hugo of Santalla* (London, Warburg Institute Surveys and Texts 26, 1997), p. 299.
- H. L. L. Busard, «L'algèbre au Moyen Âge: Le 'Liber mensurationum' d'Abu Bakr», *Journal des Savants* (1968), pp. 65-125.
- H. L. L. Busard, *The first Latin translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelardo of Bath* (Toronto, Pontifical Institute of Mediaeval Studies, 1983).
- H. L. L. Busard, *The Latin translation of the arabic version of Euclid's Elements commonly ascribed to Gerard of Cremona* (Leiden, New Rhine Publishers, 1984).

- H. L. L. Busard, *Jordanus de Nemore, De Elementis Arithmetice Artis. A Medieval Treatise on Number Theory* (Stuttgart, Franz Steiner Verlag, 1991).
- H. L. L. Busard, «Über eine Vorlage des Traktats Algorismus de minutiis von Johannes de Lineriis», *Sudhoffs Archiv*, 82 (1998), pp. 74-91.
- P. L. Butzer e D. Lohrmann, «The *Propositiones ad acuendos iuvenes* Ascribed to Alcuin», in M. Folkerts (a cura di), *Essays on Early Medieval Mathematics* (Aldershot, Ashgate, 2003).
- B. Bydén, *Theodore Metochites' Stoicheiosis astronomike and the study of natural philosophy and mathematics in early Palaiologan Byzantium* (Göteborg, Acta universitatis Gothoburgensis, 2003).
- J. S. Byrne, «A Humanist History of Mathematics? Regiomontanus's Padua Oration in Context», *Journal of the History of Ideas*, 67 (2006), pp. 41-61.
- E. Caianiello, *Le problème d'oiseaux de Zhang Qiuqian à Léonard de Pise : procédés de résolution*, presentato a 16th Novembertagung, Paris, 2005.
- F. Cajori, *A History of Mathematical Notations* (New York, Dover Publications, 1928).
- E. Caldelli, *Copisti a Roma nel Quattrocento* (Roma, Viella, 2006), pp. 130-31.
- G. Camerani Marri (a cura di), *Statuti dell'arte del cambio di Firenze (1299-1316)* (Firenze, Olschki, 1955).
- M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig, Teubner, 1907).
- G. M. Cao, M. Cortesi, M. Curandai, E. D. Mattia, G. Italiani, F. W. Lupi, P. Rossi, A. M. Velli e S. Zamponi (a cura di), *Catalogo di manoscritti filosofici nelle biblioteche italiane. Volume VI: Atri, Bergamo, Cosenza, Milano, Perugia, Pistoia, Roma, Siena*. (Firenze, Olschki, 1992).
- F. M. Casallerrey, *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano* (Madrid, Edicion Nivola, 2000).
- J. Cassinet, «Le manuscrit XXVI de Cesena: important maillon occitan de transmission de l'algorithme au 15eme siècle», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 1993), pp. 251-285.
- P. A. Cataldi, *Trattato de' numeri perfetti* (Bologna, Heredi di Giovanni Rossi, 1603).
- F. Cattelani Degani e A. Mantovani, «Una raccolta di tre libri d'abaco», *Quaderni dell'Istituto di Storia della Matematica Medievale* 25 (2000).
- B. Caunedo Del Potro, «De Arismetica: Un manual de aritmética para mercaderes», *Cuadernos de Historia de España*, 78 (2003), pp. 35-46.
- B. Caunedo Del Potro e R. Córdoba De La Llave, *El arte del Alguarismo* (Salamanca, Junta de Castilla y León, 2000).
- B. Caunedo Del Potro e R. Córdoba De La Llave, «Oficios urbanos y desarrollo de la ciencia y de la técnica en la baja Edad Media: la corona de Castilla», *Norba. Revista de Historia*, 17 (2004), pp. 41-68.
- G. Cavallo, «Modelos bibliotecarios en Occidente y en Oriente en la edad media», in *Oriente y occidente en la edad media. Influjos bizantinos en la cultura occidental. Actas de las VIII Jornadas sobre Bizancio*, Bilbao, 1993, a cura di P. Bádenas de la Peña e J.

- M. Egea, (Instituto de Ciencias de la Antigüedad, Servicio Editorial, Universidad del País Vasco, 1993) pp. 277-285.
- M. Cecchini, *La matematica alla Corte Sabauda 1567-1624* (Torino, Crisis, 2001).
- J. Chabás, «¿Qué sabemos de los comienzos de la traducción científica en la Península?» *Puntoycoma*, 36 (1995).
- T. Charmasson, «L'arithmétique' de Roland l'Ecrivain et le 'Quadripartitum numerorum' de Jean de Murs», *Revue d'histoire des sciences*, 31 (1978), pp. 173-176.
- M. Chasles, *Explication des traités de l'abacus et particulièrement du traité de Gerbert* (Paris, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences 1843).
- P. Cherubini (a cura di), *Lettere (1444-1479) / Iacopo Ammannati Piccolomini* (Roma, Pubblicazioni degli Archivi di Stato. Fonti XXV, 1997), pp. 558-562.
- P. Cherubini, «Scritture e scriventi a Roma nel secolo XV: gruppi sociali, presenze nazionali e livelli di alfabetizzazione», in *I luoghi dello scrivere da Francesco Petrarca agli albori dell'età moderna*. Convegno Internazionale organizzato dall'Associazione Italiana Paleografi e Diplomatisti, Arezzo, 2003, a cura di C. Tristano, M. Calleri e L. Magionami, Spoleto, 2006).
- P. Cherubini, «Il numero come elemento di disturbo», in *Lo scaffale della biblioteca scientifica in volgare* (secoli XIII-XVI) – Atti del Convegno, Matera, 2004, a cura di R. Librandi e R. Piro, (Sismel – edizioni del Galluzzo, Firenze, 2006).
- G. Chiarini, M. Nasti, M. L. Gengaro e G. Martini (a cura di), *Pietro Paolo Muscarello. Algorismus (1478). Trattato di aritmetica pratica e mercantile del secolo XV* (Milano, BCI - Edizioni Il Polifilo, 1972).
- G. Gifoletti, «The History of Algebra in the Sixteenth Century», in C. Goldstein, J. Gray e J. Ritter (a cura di), *L'Europe mathématique / Mathematical Europe* (Paris, Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1996).
- R. Cipriani, *Codici miniati dell'Ambrosiana* (Milano, Neri Pozza Editore 1968).
- M. Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages* (Madison, University of Wisconsin press, 1959).
- M. Clagett (a cura di), *Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions. A treatise on the uniformity and difformity of intensities known as 'tractatus de configurationibus qualitatum et motuum'* (Madison, University of Wisconsin Press, 1968), p. 167.
- M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages* (Madison-Philadelphia, University of Wisconsin Press, 1978).
- L. Cochrane, *Adelard of Bath, the First English Scientist* (London, British Museum Press, 1994).
- C. Codoñer, «Influence isidorienne sur l'évolution des Artes liberales», in *L'Europe héritière de l'Espagne wisigothique. Colloque international du C.N.R.S.*, 14-16 mai Paris, 1990, a cura di J. Fontaine e C. Pellistrandi, (Casa de Velázquez, Madrid, 1992).
- H. T. Colebrooke, *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara* (London, Cosmo Publications, 1817).

- C. Colombrero, «Voce 'Cristini, Bartolomeo'», in AA.VV. (a cura di), *Dizionario Biografico degli Italiani* (Roma, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, 1985).
- P. Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra* (Parma, Reale Tipografia Parmense, 1797).
- J. N. Crossley e A. S. Henry, «Thus spake al-Khwrizmi: A translation of the text of Cambridge University Library Ms. Ii.vi.5», *Historia Mathematica*, 17 (1990), p. 103.
- S. Cuomo, «Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation by Laurence E. Sigler reviewed», *Aestimatio*, I (2004), pp. 19-27.
- M. Curtze, «Jordani Nemorarii Geometria vel De triangulis libri IV», *Mitteilungen des Copernicus-Vereins* 6, iv (1887).
- M. Curtze, «Algebra in Deutschland in 15. Jahrhundert», *Abhandlung zur Geschichte der Mathematik*, 7 (1895), pp. 31-74.
- M. Curtze, «Petri Philomeni de Dacia in Algorismum Vulgarem Johannis de Sacrobosco Commentarius», in F. Sezgin (a cura di), *The Book on Arithmetic by Muhammad ibn Mûsâ al-Khwarizmi: Western Translations and Adaptations. Texts and Studies. Collected and Reprinted*. (Copenhagen, 1897).
- M. Curtze, «Über eine Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts». *Abhandlung zur Geschichte der Mathematik*, VIII (1898), pp. 1-27.
- M. Curtze, «Der 'Liber Embadorum' des Abraham bar Chijja Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli», *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, 12 (1902), pp. 1-183.
- M. T. d'Alverny, «Avendauth?», in AA.VV. (a cura di), *Homenaje a Millas Vallicrosa* (Barcelona, Consejo Superior de Investigaciones Científicas 1993), pp. 19-43.
- F. D'Acais e B. Porro (a cura di), *L'Aritmetica di Treviso, copia anastatica* (Roma, Società Tipografica Cremonese, 1969).
- M. Daly Davis, *The wooden inlay decoration of the Sacristy: perspectival intarsie, pictorial intarsie*, presentato a The 4th International Laboratory for the History of Science: Art, Science and Techniques of Drafting in the Renaissance, Florence and Vinci, Italy, 2001.
- V. De Falco (a cura di), *(Iamblich) theologumena arithmeticae* (Leipzig, Teubner, 1922).
- D. D. De Lacy O'Leary, *How Greek Science Passed to the Arabs* (London, Routledge & Kegan Paul Ltd., 1949).
- G. De Young, «The Arithmetic Books of Euclid's Elements», 1981, *PhD. Dissertation*, Harvard University Cambridge Massachusetts.
- S. Dehaene, N. Molko, L. Cohen e A. J. Wilson, «Arithmetic and the Brain», *Current Opinion in Neurobiology* (2004), pp. 218-224.
- A. Djebbar, «Science, culture et patrimoine en Algérie», *Alliage* (1996).
- A. Djebbar, «Du nombre pensé à la pensée du nombre : quelques aspects de la pratique arithmétique arabe et de ses prolongements en Andalus et au Maghreb, Actes de la «Rencontre Internationale de Peyresc sur la pensée numérique» (Peyresc, 7-10 Septembre 1999)», *Sciences et Techniques en Perspective*, 8 (2004), pp. 303-322.

- M. do Céu Silva, *The algebraic contents of Bento Fernandes' Tratado da arte de arismetica (1555)*, presentato a 5th European Summer University On The History And Epistemology In Mathematics Education, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007.
- P. Duhem, *Les origines de la statique* (Paris, A. Hermann, 1906), pp. 98-155.
- P. Duhem, *Le système du monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic* (Paris, Hermann et C.ie, 1965).
- I. H. Dunlap, «Gerard of Cremona», in <http://www.wiu.edu/users/mfihd/research/gerard/gerard.html> 1995, visitato il 15 marzo 2007.
- D. Durand, «Tradition and Innovation in Fifteenth Century Italy: Il Primato dell'Italia in the Field of Science», *Journal of the History of Ideas*, IV (1943), pp. 1-20.
- Y. Eche, *Les Bibliothèques arabes publiques et semi-publiques en Mésopotamie, en Syrie et en Egypte au Moyen-Age* (Damas, Institut Français d'Etudes Arabes, 1967).
- M. Eggertsdóttir, *Manuscript Resources in Iceland*, in 33rd International Congress on Medieval Studies, Western Michigan Univ., Kalamazoo, 1998.
- M. El-Madkouri Maataoui, *Las escuelas de traductores en la edad media*, in X semana de estudios medievales: la enseñanza en la edad media, Nájera, 1999, a cura di J. I. d. l. Iglesia Duarte, (Instituto de Estudios Riojanos, 2000).
- J. Elkins, «Piero della Francesca and the Renaissance Proof of Linear Perspective», *The Art Bulletin*, 69 (1987), pp. 220-230.
- J. W. Engroff, «The Arabic Tradition of Euclid's Elements: Book V», 1980, PhD. Dissertation, Harvard University Cambridge Massachussets.
- A. Evans (a cura di), *Francesco Balducci Pegolotti, La pratica della mercatura* (Cambridge, The Medieval Academy of America, 1936).
- G. R. Evans, «The influence of quadrivium studies in the eleventh- and twelfth-century schools», *Journal of Medieval History*, 1 (1975), p. 151.
- G. R. Evans, «Difficillima et Ardua: theory and practice in treatises on the abacus, 950-1150», *Journal of Medieval History*, 3 (1977), p. 21.
- G. R. Evans, «A commentary on Boethius's Arithmetica of the twelfth or thirteenth century», *Annals of Science*, 35 (1978), pp. 131-141.
- G. R. Evans, «Schools and Scholars: The Study of the Abacus in English Schools C. 980-C. 1150», *English Historical Review*, 94 (1979), pp. 71-89.
- G. Falco, *Pagine sparse di storia e di vita* (Milano-Napoli, Ricciardi, 1960).
- B. Fava, «Il trattato 'De prospectiva pingendi' di Piero della Francesca», *Bollettino storico reggiano*, 5 (1972), pp. 22-31.
- A. Favaro, «Intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi matematico padovano del secolo XV», *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, 12 (1879), pp. 1-74, 115-251.
- D. M. Federici, *Memorie trevigiane sulla tipografia del secolo XV per servire alla storia letteraria d'Italia* (Venezia, 1805).

- M. Folkerts, *Boethius' Geometrie II, ein mathematischen Lehrbuch des Mittelalters* (Wiesbaden, F. Steiner, 1970).
- M. Folkerts, «Pseudo Beda: De arithmetice propositionibus. Eine mathematische Schrift aus der Karolingerzeit», *Sudhoffs Archiv*, 56 (1972), pp. 22-43.
- M. Folkerts, *Boethius Geometrie II Boethius Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Exakten Wissenschaften* (Wiesbaden, Franz Steiner Verlag, 1975).
- M. Folkerts, *Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen 'propositiones ad acuendos juvenes'. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition* (Wien, Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematische-Naturwissenschaftliche Klasse, 1978).
- M. Folkerts, «Die mathematischen Studien Regiomontans in seiner Wiener Zeit», in G. Hermann (a cura di), *Regiomontanus studies* (Wien, 1980), pp. 175-209.
- M. Folkerts, «Die Alkuin zugeschriebenen 'Propositiones ad acuendos juvenes'», in P. L. Butzer e D. Lohrmann (a cura di), *Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times* (Basel, Birkhäuser Verlag, 1993).
- M. Folkerts, «Andreas Alexander – Leipziger Universitätslehrer und Cossist?», in *Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit*, Annaberg-Buchholz, 1996a, a cura di R. Gebhardt e H. Albrecht, (Adam-Ries-Bund e.V, 1996).
- M. Folkerts, «Frühe Darstellungen des Gerbertschen Abakus», in R. Franci (a cura di), *Itinera mathematica* (Siena, Tipografia Senese, 1996b).
- M. Folkerts, «Johannes Regiomontanus – Algebraiker und Begründer der algebraischen Symbolik», in *Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit*, Annaberg-Buchholz, 1996c, a cura di R. Gebhardt e H. Albrecht, (Adam-Ries-Bund e.V, 1996).
- M. Folkerts, *Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Kwarizmi* (München, Abhandlungen der Bayerische Akademie der Wissenschaften, 1997).
- M. Folkerts, «Regiomontanus' Role in the Transmission of Mathematical Problems», in Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts e B. v. Dalen (a cura di), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas* (Stuttgart, Franz Steiner Verlag, 2002).
- M. Folkerts, «*De arithmetice propositionibus*. A Mathematical Treatise Ascribed to the Venerable Beda», in M. Folkerts (a cura di), *Essays on Early Medieval Mathematics* (Aldershot, Ashgate, 2003a).
- M. Folkerts (a cura di), *The Development of Mathematics in the Latin Middle Ages* (Aldershot, Ashgate, 2003b).
- M. Folkerts, «The *Geometry II* ascribed to Boethius», in M. Folkerts (a cura di), *Essays on Early Medieval Mathematics* (Aldershot, Ashgate, 2003c).
- M. Folkerts, «The Name and Forms of the Numerals on the Abacus in the Gerbert Tradition», in M. Folkerts (a cura di), *Essays on Early Medieval Mathematics – The Latin Tradition* (Aldershot, Ashgate, 2003d).
- M. Folkerts, «Rithmomachia', a Mathematical Game from the Middle Ages», in M. Folkerts (a cura di), *Essays on Early Medieval Mathematics* (Aldershot, Ashgate, 2003e).

- J. Fontaine, *Isidore de Séville et culture classique dans l'Espagne wisigothique* (Paris, Études Augustiniennes, 1959).
- E. Franceschini, «Il contributo dell'Italia alla trasmissione del pensiero greco in Occidente nei secoli XII-XIII e la questione di Giacomo chierico di Venezia», *Scritti di filologia medievale*, 2 (1976), pp. 560-588.
- R. Franci, *Storia della teoria delle equazioni algebriche* (Milano, Mursia, 1979).
- R. Franci, «Antonio de' Mazzinghi: An algebraist of the 14th century», *Historia Mathematica*, 15 (1988), p. 240.
- R. Franci, *Scuole, maestri e trattati d'abaco nel Quattrocento*, presentato a European Mathematic during the XVth Century, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Cortona, Italy, 1991.
- R. Franci, «L'insegnamento dell'aritmetica nel Medioevo», in L. Toti Rigatelli, P. Pagli e R. Franci (a cura di), *Itinera mathematica. Studi in onore di Gino Arrighi per il suo 90° compleanno* (Siena, Università di Siena, 1996).
- R. Franci, «Maestro Dardi (sec. xiv) ALIABRA ARGIBRA dal manoscritto I.VII.17 della Biblioteca Comunale di Siena, *Quaderno del Centro Studi della Matematica Medioevale* 26 (2001), p. 299.
- R. Franci, «Il Liber Abaci di Leonardo Fibonacci (1202-2002)», *Bollettino Unione Matematica Italiana*, VIII (2002).
- R. Franci, «Leonardo Pisano e la trattatistica dell'abaco in Italia nei secoli XIV e XV», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XXIII (2003a).
- R. Franci, «Una traduzione in volgare dell'al-jabr di al-Khwarizmi (ms. Urb. Lat. 291 Biblioteca Apostolica Vaticana)», in R. Franci, P. Pagli e A. Simi (a cura di), *Il Sogno di Galois. Scritti di storia della matematica dedicati a Laura Toti Rigatelli per il suo 60° compleanno*. (Siena, 2003b).
- R. Franci, *Giochi matematici alla corte di Carlo Magno* (Siena, Edizioni ETS, 2005).
- R. Franci e L. Toti Rigatelli, «Maestro Benedetto da Firenze e la storia dell'algebra», *Historia Mathematica*, 10 (1983), pp. 297-317.
- R. Franci e L. Toti Rigatelli, «Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli», *Janus*, LXXII (1985), pp. 17-82.
- R. Franci e L. Toti Rigatelli, «Fourteenth-century Italian algebra», in C. Hay (a cura di), *Mathematics from Manuscript to Print. 1300-1600* (Oxford, Clarendon Press, 1988), pp. 11-29.
- P. Frankl, *The Gothic. Literary Sources and Interpretations through Eight Centuries* (Princeton, Princeton University Press, 1960).
- G. Friedlein (a cura di), *Boetii De institutione arithmetica libri duo* (Leipzig, B. G. Teubner, 1867).
- C. L. Frommel, «Francesco del Borgo: Architekt Pius II und Pauls III», *Römisches Jahrbuch für Kunstgeschichte*, XX (1983).
- C. Frola, *Istruzione e educazione nel medioevo* (Torino, Loescher, 1973).

- C. Frova, «Cultura aritmetica nel X secolo», in *Scienze matematiche e insegnamento in epoca medievale* – Atti del convegno internazionale di studio, Chieti, 1996, a cura di P. Freguglia, L. Pellegrini e R. Paciocco, (ESI, 2000).
- A. L. Gabriel, *A summary catalogue of microfilms of one thousand scientific manuscripts in the Ambrosiana Library* (Notre Dame, University of Notre Dame, 1968).
- A. L. Gabriel, *The University of Paris and its Hungarian students and masters during the reign of Louis XII and François Ier* (Notre Dame -Frankfurt, University of Notre Dame-Verlag Josef Knecht, 1986).
- F. Gabrieli, B. M. Alfieri, C. Baffioni, A. Bausani e al., *Il Califfato di Baghdad. La civiltà abbaside* (Milano, Jaca Book, 1988).
- E. Gamba, *La matematica dei tecnici tra oralità e scrittura*, presentato a Laboratorio «Matematica & Realtà», Urbino, 2006.
- S. Gandz, «The Origin of the Ghubar Numerals, or the Arabian Abacus and the Articuli», *Isis*, 16 (1931), pp. 393-424.
- S. Gandz, *The Mishnat ha-Middot, the First Hebrew Geometry of about 150 C. E., and the Geometry of Muḥammad Ibn Musa Al-Khwarizmi, the first Arabic Geometry (c. 820), Representing the Arabic Version of the Mishnat ha-Middot* (Berlin, Springer Verlag, 1932).
- S. Gandz, «The Sources of al-Khwarizmi's Algebra», *Osiris*, 1 (1936), pp. 263-277.
- H. Gasc, «Gerbert et la pédagogie des arts libéraux à la fin du dixième siècle», *Journal of Medieval History*, 12 (1986), p. 111.
- S. Gattei, «Recensione a 'Sigler, Laurence E., Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation. New York, Springer-Verlag, 2003'», in http://www.flis.unipi.it/~gattei/file_scaricabili/recensioni_017.pdf, 2005, visitato il 18 febbraio 2007.
- R. Gebhardt (a cura di), *Einblicke in die Coß von Adam Ries* (Stuttgart-Leipzig, B.G. Teubner, 1994).
- C. J. Gerhardt (a cura di), *Das Rechenbuch des Maximus Planudes: Nach den Handschriften der Kaiserlichen Bibliothek zu Paris* (Eisleben, Reichardt'schen Buchdruckerei, 1865).
- A. Gerl, «Fridericus Amann», in *Rechnenbücher und mathematische Texte der frühen Neuzeit. Tagungsband zum wissenschaftlichen Kolloquium anlässlich des 440. Todestages des Rechenmeisters Adam Ries, Annaberg-Buchholz 1999*, a cura di R. Gebhardt, (Adam-Ries-Bund. Schr. Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz, 1999) pp. 1-12.
- C. A. Gibson e F. Newton, «Pandulf of Capua's De Calculatione: an Illustrated Abacus Treatise and some evidence for the Hindu-Arabic Numerals in Eleventh-Century South Italy», *Mediaeval Studies*, 57 (1995), pp. 293-335.
- S. Gibson e A. B. Emden, «Statuta Antiqua Universitatis Oxoniensis», *The English Historical Review*, 49 (1934), pp. 116-120.
- F. Gies e J. Gies, *Leonard of Pisa and the New Mathematics of the Middle Ages* (New York, Thomas Y. Crowell & Company, 1969).

- J. S. Gil, *La escuela de traductores de Toledo y sus colaboradores judíos* (Toledo, Instituto de Investigaciones y Estudios Toledanos, 1985), pp. 30-38.
- C. Ginzburg, *Indagini su Piero. Il Battesimo, il ciclo di Arezzo, la Flagellazione di Urbino* (Torino, Einaudi, 1981).
- E. Giusti, «L'algebra nel 'trattato d'abaco' di Piero della Francesca: osservazioni e congetture», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XI (1991), pp. 55-83.
- E. Giusti, «Fonti medievali dell'Algebra' di Piero della Francesca», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XIII (1993), pp. 199-250.
- E. Giusti, *Luca Pacioli matematico*, in Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento. Atti del convegno internazionale di studi, Sansepolcro, 1994a, a cura di E. Giusti, (Petruzzi ed., 1998) pp. 7-18.
- E. Giusti (a cura di), *Luca Pacioli. Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Roma, Istituto poligrafico e Zecca dello Stato, 1994b).
- E. Giusti, *Matematica e commercio nel Liber Abaci*, presentato a Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente, Pisa, 2002.
- E. Giusti e C. Maccagni (a cura di), *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento* (Firenze, Giunti, 1994).
- C. Goldstein, «À la recherche des origines : contenus, sources, communautés et histoires», in C. Goldstein, J. Gray e J. Ritter (a cura di), *L'Europe mathématique/Mathematical Europe* (Paris, Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1996).
- R. Goldthwaite, «Schools and Teaching of Commercial Arithmetic in Renaissance Florence», *Journal of European Economic History*, 1 (1972), pp. 418-433.
- E. H. Gombrich, *Norma e forma. Studi sull'arte del Rinascimento* (Torino, Einaudi, 1964).
- Á. Gonzáles Palencia, *El arzobispo don Raimundo de Toledo* (Barcelona, Ed. Labor, 1942).
- R. Gonzalez Ruiz, «Participación de judíos en las traducciones de Toledo», in AA.VV. (a cura di), *La escuela de traductores de Toledo* (Toledo, Diputación de Toledo, 1996).
- R. González Ruiz, «El traductor maestro Juan de Toledo», *Toletum*, 11 (1981), pp. 177-189.
- M. Grabmann, «Guglielmo di Moerbeke O.P., il traduttore delle opere di Aristotele», *Miscellanea Historiae Pontificiae*, IX (1946), pp. 147-segg.
- E. Grant, «Part I of Nicole Oresme's Algorismus proportionum», *Isis*, 56 (1965), pp. 327-341.
- E. Grant, «Jordanus de Nemore. De Numeris Datis. A critical edition and translation by Barnabas Hughes», *Historia Mathematica*, 10 (1983), pp. 125-129.
- C. Grayson (a cura di), *Leon Battista Alberti De Pictura* (Bari, Laterza, 1980).
- C. Grayson, M. Dalai Emiliani e C. Maccagni (a cura di), *Piero della Francesca, Libellus de quinque corporibus regularibus* (Firenze, Giunti Gruppo Editoriale, 1995).
- P. F. Grendler, *Schooling in Renaissance Italy: Literacy and Learning 1300-1600* (Baltimore, London, The John Hopkins University Press, 1989).

- R. E. Grimm, «The Autobiography of Leonardo Pisano», *Fibonacci Quarterly*, 11 (1973), pp. 99-104.
- A. Grossi, «Un *carmen* figurato di fine XII secolo, lo schema planimetrico della Basilica di Sant'Ambrogio in Milano e i primi *n* numeri dispari», *Aevum*, 2 (2003), pp. 161-182.
- J. Y. Guillaumin (a cura di), *Boèce, Institution Arithmetique* (Paris, Les Belles Lettres, 1995).
- J. M. Hackett, «Adelard of Bath and Roger Bacon: early English natural philosophers and scientists», *Endeavour*, 26 (2002).
- J. O. Halliwell, *Rara Mathematica* (London, J. W. Parker, 1841).
- G. Hamann, «Die mathematische Studien Regiomontans in seiner Wiener Zeit», in G. Hamann (a cura di), *Regiomontanus-Studien* (Wien, Verlag der Österreichische Akademie der Wissenschaften, 1980).
- E. Hankel, «Storia delle matematiche presso gli arabi», *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 5 (1872), pp. 343-501.
- C. H. Haskins, «Adelard of Bath», *English Historical Review*, 26 (1911), pp. 491-498.
- C. H. Haskins, «The Reception of Arabic Science in England», *English Historical Review*, 30 (1915), pp. 56-69.
- C. H. Haskins, «The 'De Arte Venandi cum Avibus' of the Emperor Frederick II», *The English Historical Review*, 36 (1921), pp. 334-355.
- C. H. Haskins, «Arabic Science in Western Europe», *Isis*, 7 (1925), pp. 478-485.
- C. H. Haskins, *Studies in the History of Mediaeval Science* (Cambridge, Mass., 1927), pp. 194-197.
- A. Heeffer, «A Conceptual Analysis of Early Arabic Algebra», 2006, Ghent University, Ghent.
- R. Hissette, «Guillaume de Luna a-t-il traduit Abu-Kamil?», in *Averroes and the Aristotelian tradition: sources, constitution, and reception of the philosophy of Ibn Rushd (1126-1198) proceedings of the Fourth Symposium Averroicum*, Cologne, 1996, a cura di G. Endress, J. A. Aertsen e K. Braun, (Brill Academic Pub, 1999) pp. 300-315.
- R. Hissette, «Guillaume de Luna ou de Lunis ou Lunense : un même traducteur d'Averroès et de traités d'al-Jabr?», *Bulletin de philosophie médiévale*, 39 (1997), p. 125.
- R. Hissette, «L'al-Jabr d'al-Khwārizmī dans les mss Vat. lat. 4606 et Vat. Urb. lat. 291 et Guglielmo de Lunis», *Miscellanea Bibliothecae Apostolicae Vaticanae*, X (2003), pp. 137-158.
- R. Hoernle, «The Bakhshali Manuscript», *Indian Antiquary*, XVIII (1888).
- H. Hoffmann (a cura di), *Richer von Saint-Remi, Historiae* (Hannover, Hahnsche Buchhandlung, 2000).
- A. F. Horodam, «Fibonacci's Mathematical Letter to Master Theodorus», *Fibonacci Quarterly*, 29 (1991), pp. 103-107.
- J. Høyrup, «The Formation of 'Islamic Mathematics': Sources and Conditions», *Science in Context*, 1 (1987), pp. 281-329.

- J. Høyrup, «Jordanus de Nemore, 13th Century Mathematical Innovator: an Essay on Intellectual Context, Achievement, and Failure», *Archive for History of Exact Sciences* 38 (1988), pp. 307-363.
- J. Høyrup, «Oxford' and 'Cremona': on the relations between two versions of al-Khwarizmi's *Algebra*, presentato a 3me Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, Tipaza (Algerie), 1990.
- J. Høyrup, «Algèbre d'al-gabr et algèbre d'arpentage au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne», in *D'Imhotep à Copernic. Astronomie et mathématiques des origines orientales au moyen âge*. Actes du Colloque international, Bruxelles, 1992, a cura di F. Mawet e P. Talon, (Peeters, 1992).
- J. Høyrup, «The formation of a myth: Greek mathematics – our mathematics», in C. Goldstein, J. Gray e J. Ritter (a cura di), *L'Europe mathématique / Mathematical Europe* (Paris, Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1996).
- J. Høyrup, «VAT. LAT. 4826. Jacopo da Firenze, Tractatus algorismi Preliminary transcription of the manuscript, with occasional commentaries», *Filosofi og videnskabsteori på roskilde universitetscenter*, 3 (1999).
- J. Høyrup, «Jacobus de Florentia, Tractatus algorismi (1307), the chapter on algebra (Vat. Lat. 4826, fols 36v-45v)», *Centaureus*, 42 (2000), p. 21.
- J. Høyrup, «Pedro Nuñez: Innovateur bloqué, et dernier témoin d'une tradition millénaire», *Gazeta de Matemática*, 43 (2002a), pp. 52–59.
- J. Høyrup, «PRE-MODERN 'ALGEBRA' A concise survey of that which was shaped into the technique and discipline we know», *Quaderni di ricerca in didattica del G.R.I.M.*, 11 (2002b).
- J. Høyrup, «Leonardo Fibonacci and abbaco culture: a proposal to invert the roles», *Filosofi og videnskabsteori på roskilde Universitetcenter*, 3. Raekke: Preprints og reprints (2004).
- J. Høyrup, «Jacopo da Firenze and the beginning of Italian vernacular algebra», *Historia Mathematica*, 33 (2006), pp. 4-42.
- B. B. Hughes, *Jordanus de Nemore. De Numeris Datis* (Berkeley, CA University of California Press., 1981).
- B. B. Hughes, «The Medieval Latin Translation of Al-Khwarizmi's Al-Jabr», *Manuscripta*, XXVI (1982), pp. 31-37.
- B. B. Hughes, «Gerard of Cremona's Translation of al-Khwarizmi's al-jabr: A Critical Edition», *Mediaeval Studies* (1986), pp. 211-263.
- B. B. Hughes, «An early 15th-century algebra codex: A description», *Historia Mathematica*, 14 (1987), p. 167.
- B. B. Hughes, *Robert of Chester's Latin Translation of al-Kwarizmi's al-Jabr: a new critical edition* (Wiesbaden, Steiner, 1989).
- B. B. Hughes, «Arabic Algebra. Victim of Religious and Intellectual Animus», in M. Folkerts (a cura di), *Mathematische Probleme im Mittelalter: der lateinische und arabische Sprachbereich* (Wiesbaden, 1996).

- B. B. Hughes, «A Treatise on Problem Solving from Early Medieval Latin Europe», *Mediaeval Studies*, 63 (2001), pp. 107-141.
- H. Hunger e K. Vogel, *Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts. 100 Aufgaben aus dem Codex vindobonensis phil. gr. 65: Text, Übersetzung und Kommentar* (Graz, Böhlau, 1963).
- K. Hunger Parshall, «The Art Of Algebra From Al-Khwarizmi To Viète: A Study In The Natural Selection Of Ideas», *History of Science*, 26 (1988), pp. 129-164.
- Z. Hunyadi, *Archival and Manuscript Resources in Hungary*, in 33rd International Congress on Medieval Studies, Western Michigan Univ., Kalamazoo, 1998.
- G. Ifrah, *Histoire universelle des chiffres* (Paris, Robert Laffont, 1981).
- S. A. Jayawardene, «Luca Pacioli», in C. C. Gillispie (a cura di), *Dictionary of Scientific Biography* (New York, C. Scribner's Sons, 1974), pp. 269-272.
- J. Jelitai, «The History of Mathematics in Hungary before 1830», *National Mathematics Magazine*, 12 (1937), pp. 125-130.
- C. W. Jones (a cura di), *Bede, the Schools and the Computus* (Aldershot, Variorum, 1994).
- G. G. Joseph, *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics* (London, Penguin Books, 2000).
- L. C. Karpinski, «Jordanus Nemorarius and John of Halifax», *American Mathematical Monthly*, 17 (1910), pp. 108-113.
- L. C. Karpinski, «An Italian Algebra of the Fifteenth Century», *Bibliotheca mathematica*, 11 (1911), p. 210.
- L. C. Karpinski, «The Algebra of Abu Kamil», *American Mathematical Monthly*, 21 (1914a), pp. 37-48.
- L. C. Karpinski, «The Algorithm of John Killingworth», *English Historical Review*, 29 (1914b), pp. 707-717.
- L. C. Karpinski, *Robert of Chester's Latin Translation of al-Khowarizmi: with an Introduction, Critical Notes and an English Version* (New York, The Macmillian Company, 1915).
- N. Kastanis, «Περί της βυζαντινής και μεταβυζαντινής μαθηματικής παιδείας του 15ου αιώνα», *Ενημερωτικό Δελτίο της Ελληνικής Εταιρείας Ιστορίας Επιστημών και Τεχνολογίας*, 7 (1997), pp. 7-13.
- G. Katsioura e E. Nicolaidis, «Θεόδωρος Μελιτηνιώτης Αστρονομική Τριβίβλος», in <http://www2.ehw.gr/asiaminor/Forms/fLemmaBodyExtended.aspx?lemmaID=8495>, 2006, visitato il 17 settembre 2007.
- W. Kaunzner, *Reihe C. Quellentexte und Übersetzungen* (München, Deutsches Museum, 1968).
- W. Kaunzner, «Die Lateinische Algebra in Ms Lyell 52 der Bodleian Library, Oxford, früher Ms. Admont 612», in G. Hamann (a cura di), *Aufsätze zur Geschichte der Naturwissenschaften und Geographie* (Wien, Österreichischen Akademie der Wissenschaften 1986), pp. 47-89.

- W. Kaunzner, *Johannes Widmann, Cossist und Verfasser des ersten großen deutschen Rechenbuches*, in *Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit*, Annaberg-Buchholz, 1996, a cura di R. Gebhardt e H. Albrecht, (Adam-Ries-Bund e.V, 1996).
- W. Kaunzner, A. Meixner, J. Lehmann, G. Dippold, M. Weidauer, P. Rochhaus, S. Müller, H. Wußing, A. Steber e C. Risterer (a cura di), *Adam Rieß vom Staffelstein. Rechenmeister und Cossist* (Stuttgart-Leipzig, Stadt Bad Staffelstein, 1992).
- D. A. King, «An Introduction to Iohannes Regiomontanus' Acrostic, Cardinal Basileios 'Iohannes' Bessarion's Agenda and Piero della Francesca's Enigma», *Preprints of the Institute for the History of Science, Johann Wolfgang Goethe University, Frankfurt am Main, 4th series*, 2 (2006).
- D. A. King, *Astrolabes and Angels, Epigrams and Enigmas – From Regiomontanus' Acrostic for Cardinal Bessarion to Piero della Francesca's Flagellation of Christ* (Stuttgart, Franz Steiner, 2007).
- O. Klein, «Who Was Jordanus Nemorarius?» *Nuclear Physics*, 57 (1964), p. 347.
- R. Klein, «Les Humanistes et la science», *Bibliothèque d'Humanisme et Renaissance*, XXIII (1961), pp. 7-16.
- A. Koyré, *Études d'histoire de la pensée scientifique* (Paris, Gallimard, 1973).
- C. Kren, «Planetary Latitudes, the Theorica Gerardi, and Regiomontanus», *Isis*, 68 (1977), pp. 194-205.
- G. L'Huillier-de Guibert (a cura di), *Le Quadripartitum numerorum de Jean de Murs (1343). Edition critique* (Génève, Librairie Droz, 1990).
- J. L. La Monte, «The Communal Movement In Syria In The Thirteenth Century», in C. H. Taylor e J. L. La Monte (a cura di), *Anniversary Essays in Mediaeval History* (Boston, Houghton Mifflin Company, 1929).
- M.-H. Labarthe, «La Suma de la art de Arismetica de Francesch Sanct Climent», *Domitia: une revue d'échanges et de rencontres*, 2 (2001).
- M.-H. Labarthe, «Les règles de compagnie, dans les premières arithmétiques imprimées des Espagnes: de la règle marchande à l'outil mathématique», *Revue d'histoire des mathématiques*, 11 (2005), pp. 257-313.
- G. Lacombe, A. Birkenmajer, M. Dulong e E. Franceschini (a cura di), *Aristoteles Latinus. Pars prior* (Roma, Libreria dello Stato, 1939).
- S. Lamassé, «Une utilisation précoce de l'algèbre en France au XV siècle. – Note sur le manuscrit 1339 de la Bibliothèque nationale de France», *Revue d'histoire des mathématiques*, II (2005), pp. 239-255.
- S. Lamassé, «Les problèmes dans les arithmétiques commerciales en langues française et occitane de la fin du Moyen Âge», 2007, Université de Paris 1, Paris.
- Y. T. Langermann (a cura di), *The Jews and the Sciences in the Middle Ages* (London, Oxford, 1999).
- L. J. Lauand, *El Coràn y la Ciencia – El Algebra como Ciencia Arabe*, presentato a Departamento de Estudios Arabes e Islamicos, Universidad Autonoma de Madrid, 1998.

- J. Lehmann, G. Dippold, M. Weidauer, P. Rochhaus, S. Müller e H. Wussing, *Adam Riess vom Staffelstein. Rechenmeister und Cossist* (Staffelstein, Stadt Staffelstein, 1992).
- R. Lemay, «Gerard of Cremona», in C. C. Gillispie (a cura di), *Dictionary of Scientific Biography* (New York, Paul Scribner's Son, 1978), pp. 173-192.
- R. Lemay, «De la scolastique à l'histoire par le truchement de la philologie: Itinéraire d'un médiéviste entre Europe et Islam», in *La diffusione delle scienze islamiche nel medio evo europeo*, Roma, 1987, a cura di B. Scarcia Amoretti, (Accademia Nazionale dei Lincei, 2-4 ottobre 1984) pp. 399-538.
- J. G. Lemoine, «Les anciens procédé de calcul sur les doigts en Orient et en Occident», *Revue des études islamiques* (1932), pp. 1-58.
- C. Leonardi, *I codici di Marziano Capella* (Milano, Editrice Vita e Pensiero, 1959-1960).
- P. L. M. Leone (a cura di), *Maximi Monachi Planudis Epistulae* (Amsterdam, Hakker, 1991), pp. 1-215.
- M. Levey, «Abraham Savasorda and His Algorithm: A Study in Early European Logistic», *Osiris*, 11 (1954).
- M. Levey (a cura di), *The algebra of Abu Kamil. Kitab, fi al-jabr wa'l- muqabala in a commentary by Mordecai Finzi* (Madison, The University of Wisconsin Press, 1966).
- M. Levey, «Abraham bar Hiyya Ha-Nasi», in C. C. Gillispie (a cura di), *Dictionary of Scientific Biography* (New York, Charles Scribner's Son, 1970-1980), p. 23.
- T. Lévy, *Mathématiques des communautés juives médiévales en Europe*, in *Mythes et Réalités historiques de l'Europe mathématique*, Paris, April 3-6 1992, 1992.
- T. Lévy, «L'algèbre en Europe: enquête sur un héritage», *Cahiers de science et vie*, 056 (2000), pp. 56-63.
- T. Lévy, «L'algèbre arabe dans les textes hébraïques (II). Dans l'Italie des XVe et XVIe siècles, Sources arabes et sources vernaculaires», *Arabic Sciences and Philosophy* (2007), pp. 81-107.
- G. Libri, *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle* (Paris, Jules Renouard, 1838).
- A. E. Lieber, «Eastern Business Practices and Medieval European Commerce», *The Economic History Review, New Series*, 21 (1968), pp. 230-243.
- D. C. Lindberg, «The Transmission of Greek and Arabic Learning to the West», in D. C. Lindberg (a cura di), *Science in the Middle Ages* (Chicago, University of Chicago Press, 1976), pp. 52-90.
- U. Lindgren, «Gerbert von Aurillac und das Quadrivium. Untersuchungen zur Bildung im Zeitalter der Ottonen», *Sudhoffs Archiv*, 18 (1976).
- W. M. Lindsay (a cura di), *Isidorus Hispalensis. Etymologiarum sive Originum libri XX* (Oxford, 1911).
- R. Lorch, «Greek-Arabic-Latin: The Transmission of Mathematical Texts in the Middle Ages», *Science in Context*, 14 (2001), p. 313.
- E. A. Lowe, *The Beneventan script: a history of the south Italian minuscule* (Oxford, Clarendon press, 1914).

- B. Luderer (a cura di), *Adam Ries and his 'Coss'. A Contribution to the Development of Algebra in 16th Century Germany* (Leipzig, Edition am Gutenbergplatz 2004).
- D. E. Luscombe, *Trivium, Quadrivium and the Organization of Schools*, in L'Europa nei secoli XI e XII fra novità e tradizione: sviluppi di una cultura (Atti della decima Settimana internazionale di studio) Mendola, 1986, a cura di AA.VV., (Vita e Pensiero, 1989) pp. 81-100.
- C. E. Lutz (a cura di), *Iohannis Scotti Annotationes in Marcianum* (Cambridge, Mass., The Medieval Academy of America, 1939).
- C. E. Lutz, «The Commentary of Remigius of Auxerre on Martianus Capella», *Mediaeval Studies*, XIX (1957), pp. 138-139.
- S. Maddalo, *In figura Romae. Immagini di Roma nel libro medievale* (Roma, Viella, 1990).
- M. S. Mahoney, «Mathematics», in D. C. Lindberg (a cura di), *Science in the Middle Ages* (Chicago, University of Chicago Press, 1976).
- A. Malet, *Suma de l'art d'aritmética, Francesc Sanctcliment* (Vic, Eumo Editorial, 1998).
- A. Malet e J. Paradis, *El orígens y el ensonjament de l'àlgebra simbòlica* (Barcelona, ICE, 1984).
- E. Malisani, «Storia del pensiero algebrico fino al Cinquecento. Costruzione del simbolismo e risoluzione di equazioni», *Quaderni di ricerca in didattica del G.R.I.M.* (1996), pp. 22-77.
- G. Mancini, «L'opera 'De corporibus regularibus' di Piero Franceschi detto della Francesca, usurpata da fra' Luca Pacioli», *Memorie della R. Accademia dei Lincei, Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, anno CCCXII, serie quinta*, XIV (1915), pp. 441-580.
- S. Maracchia, *Storia dell'algebra* (Napoli, Liguori editore, 2005).
- F. Márquez Villanueva, *El concepto cultural alfonsí* (Madrid, Editorial MAPFRE, 1994).
- A. J. Martín Duque, «El Ingles Roberto, traductor del Coran», *Hispania*, 88 (1962), pp. 483-506.
- J.-C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises* (Paris, Masson, 1987).
- M. Masi, «A Newberry Diagram of the Liberal Arts», *Gesta*, 11 (1972), pp. 52-56.
- M. Masi (a cura di), *Boethius and the liberal arts: a collection of essays* (Bern, Peter Lang Publishing, 1981).
- M. Masi, *Boethian Number Theory: A Translation of the De Institutione Arithmetica* (Amsterdam, Rodopi, 1983).
- R. B. McClenon, «Leonardo of Pisa and his Liber Quadratorum», *American Mathematical Monthly*, 26 (1919), pp. 1-8.
- M. McVaugh, «Constantine the African», in C. C. Gillispie (a cura di), *Dictionary of Scientific Biography* (New York, Charles Scribner's Sons, 1970), pp. 393-395.
- R. Mett, «Regiomontanus in Italien», *Sitzungsberichte / Österreichische Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Klasse; 520. Veröffentlichungen der Kommission für Geschichte der Mathematik, Naturwissenschaften und Medizin* ; 48 (1989).

- N. Middleton, «Early medieval port customs, tolls and controls on foreign trade», *Early Medieval Europe*, 13 (2005), pp. 313-358.
- J. M. Millàs Vallicrosa, «La aportacion astronomica de Pedro Alfonso», *Sefarad*, 3 (1943), pp. 65-105.
- N. Miller, «Euclides Redivivus: A Hypothesis on a Proposition», *Gazette des Beaux-Arts*, 121 (1993), pp. 213-226.
- L. Minio-Paluello, «James of Venice», in C. C. Gillispie (a cura di), *Dictionary of Scientific Biography* (New York, Charles Scribner's Son, 1970-1980a), pp. 65-67.
- L. Minio-Paluello, «Moerbeke, William of», in C. C. Gillispie (a cura di), *Dictionary of Scientific Biography* (New York, Charles Scribner's Son, 1970-1980b), pp. 434-440.
- N. Miura, «The Algebra of the Liber Abaci of Leonardo Pisano», *Historia Scientiarum*, 21 (1981), pp. 57-65.
- J. Monfasani, *Byantine Scholars in Renaissance Italy: Cardinal Bassarion and Other Emigrés* (Aldershot, Variorum, 1995).
- M. Montesano, «Cultura e prospettive mediterranee nella società genovese al tempo di Fibonacci», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XXIII (2003).
- P. Morpurgo, *Le traduzioni di Michele Scoto e la circolazione di manoscritti scientifici in Italia meridionale*, in Convegno Internazionale 'La diffusione delle scienze islamiche nel Medioevo europeo', Roma, 1984, a cura di AA.VV., (Accademia Nazionale dei Lincei, 1987).
- A. E. Moyer, «The Philosophers' Game: Rithmomachia in Medieval and Renaissance Europe, with an Edition of Ralph Lever and William Fulke», *The Most Noble, Auncient, and Learned Playe (1563)* (Ann Arbor, The University of Michigan Press, 2001).
- M. Muccillo, «Voce 'Dagomari, Paolo', in AA.VV. (a cura di), *Dizionario Biografico degli Italiani* (Roma Istituto dell'Enciclopedia Italiana, 1987).
- G. M. Muccioli, *Catalogus codicum manuscriptorum Malatestianae Bibliothecae fratrum minorum conventualium* (Caesenae, typis Gregorii Blasinii, 1784), pp. 173-174.
- J. Mundy, «John of Gmunden», *Isis*, 34 (1943), pp. 196-205.
- A. Murray, *Reason and Society in the Middle Ages* (Oxford, Clarendon Press, 1978).
- A. M. Musharraf e M. M. Ahmad (a cura di), *Al-Khawârizmî Kitâb al-mubtasar fi hisab al-jabr wal-muqâbalab* (Il Cairo, Dar al-Katib al-Arabi, 1939 e 1968).
- R. A. B. Mynors, *Cassiodori Senatoris Institutiones* (Oxford, Clarendon Press, 1937).
- A. Nagl, «Über eine Algorithmusschrift des XII Jahrhunderts und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechnenkunst und Zahlreichen», *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, XXXIV (1890), pp. 129-146; 161-170.
- L. Naldini, «La politica coloniale di Pisa nel Medioevo», *Bollettino della deputazione di Storia Patria*, VIII (1939).
- C. A. Nallino, «Il Gherardo Cremonese autore della Teorica Planetarum deve ritenersi essere Gherardo Cremonese da Sabbionetta», *Rendiconti. Real Accademia dei Lincei, Classe scienze morali, storiche e filologiche*, 8 (1932), pp. 386-404.

- E. Narducci, «Turchillus. Reguncule super Abacum», *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, XV (1882), pp. 111-163.
- F. Negri Arnoldi, *Storia dell'arte* (Milano, Fabbri Editori, 1988).
- M. P. Negri, «Gerardo da Cremona. Insegnamento e ricerca nelle scienze matematiche del XII secolo», *Nuova Secondaria* (1994), pp. 74-76.
- M. P. Negri, «Jacopo da Cremona: matematiche nel Rinascimento», *Nuova Secondaria* (1997), pp. 76-79.
- G. H. F. Nesselmann, *Die Algebra der Griechen nach den Quellen bearbeiten* (Berlin, G. Reimer, 1842).
- O. Neugebauer, «Studien zur Geschichte der antiken Algebra», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, B (1934).
- O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity* (Providence, Rhode Island, Brown University Press, 1957).
- G. Nicco-Fasola (a cura di), *'De Prospectiva Pingendi' di Piero della Francesca* (Napoli, Liguori Editore, 1984).
- E. Nilsson Nylander, *Septentrionalia. A Summary Guide to Medieval. Archival and Library Holdings in Sweden*, in 33rd International Congress on Medieval Studies, Western Michigan Univ., Kalamazoo, 1998.
- J. D. North, *Aspects of the Language of Medieval Mathematics* in *Vocabulary of Teaching and Research between Middle Ages and Renaissance*, London, Warburg Institute, 1994, a cura di O. Weijers, (Brepols, 1995) pp. 134-150.
- F. G. Nuvolone, «The Names and Forms of the Numerals on the Abacus in the Gerbert Tradition», in M. Folkerts (a cura di), *Essays on Early Medieval Mathematics* (Aldershot, Ashgate, 2003).
- F. G. Nuvolone, *Il Carme figurato di Gerberto d'Aurillac*, presentato a Giornata di chiusura del millenario di Silvestro II, Papa e scienziato dell'anno mille, Roma, Pontificium Consilium de Cultura, 2004.
- J. Oaks e H. M. Alkhateeb, «Mal, enunciations, and the prehistory of Arabic algebra», *Historia Mathematica*, 32 (2005), p. 400.
- J. Oaks e H. M. Alkhateeb, «Simplifying equations in Arabic algebra», *Historia Mathematica*, 34 (2007), pp. 45-61.
- M. Oddi, *Dello squadro* (Milano, Fobella, 1625).
- C. Otten-Froux, «Le Pisans en Egipte et à Acre dans la seconde moitié du XIIIème siècle», in M. Balard, A. E. Laiou e C. Otten-Froux (a cura di), *Les Italiens à Byzance* (Paris, Publications de la Sorbonne, 1987).
- P. N. Pagliara, «Voce 'Francesco di Benedetto Cereo da Borgo san Sepolcro'», in AA.VV. (a cura di), *Dizionario Biografico degli Italiani* (Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, 1997).
- J. G. Pallares, «Sobre manuscritos latinos de computo en escritura visigótica», *Hispania sacra*, XXIX (1987), pp. 25-84.

- J. G. Pallares, «Textos latinos de computo eclesiastico en los codices abeldense y emilianense de la biblioteca del Escorial», *Hispania sacra*, 41 (1989), pp. 11-34.
- A. Paolucci e C. Bertelli (a cura di), *Piero della Francesca e le corti italiane* (Milano, Skira, 2007).
- J. M. Papakonstantinou, *Historical Development of the Secant Method in 1-D*, presentato a Mathematical Association of America – MathFest 2007, San Jose California, 2007.
- A. Paravicini Bagliani, *La scienza araba nella Roma del Duecento: prospettive di ricerca*, in Convegno Internazionale La diffusione delle scienze islamiche nel Medioevo europeo, Roma, 1984.
- J. D. Passavant, *Raffaello d'Urbino e il padre suo Giovanni Santi* (Firenze, Le Monnier, 1839).
- A. M. Peden (a cura di), *Abbo of Fleury and Ramsey: Commentary on the Calculus of Victorius of Aquitaine* (Oxford, Oxford University Press, 2003).
- O. Pedersen, «The Origins of the 'Theorica Planetarum'», *Journal for the History of Astronomy Cambridge*, 12 (1981), pp. 113-123.
- G. B. Pellegrini, *Gli arabismi nelle lingue neolatine con speciale riguardo all'Italia* (Brescia, Paideia, 1972).
- L. Pepe, *La riscoperta di Leonardo Pisano*, presentato a Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente, Pisa, 2002.
- G. H. Pertz (a cura di), *Monachi Sangallensis De gestis Karoli Imperatoris libri duo* (Hannover, 1829), pp. 731-732.
- M. A. Peterson, «The geometry of Piero della Francesca», *The Mathematical Intelligencer*, 19 (1997).
- E. Picutti, *Sul numero e la sua storia* (Milano, Feltrinelli, 1977).
- E. Picutti, «Il libro dei quadrati di Leonardo Pisano e i problemi di analisi indeterminata nel codice Palatino 577 della Biblioteca Nazionale di Firenze», *Physis*, 21 (1979).
- E. Picutti, «Il Flos di Leonardo Pisano. Traduzioni e commenti», *Physis*, 25 (1983), pp. 293-387.
- E. Picutti, «Sui plagi matematici di frate Luca Pacioli», *Le Scienze*, 40 (1989), pp. 72-79.
- L. Pieraccini, *M° Biagio, Chasi exenplari alla regola dell'algebra. Nella trascelta a cura di Maestro Benedetto. Dal Codice L. VI. 21 della Biblioteca Comunale di Siena* (Siena, Servizio Editoriale dell'Università, 1983).
- B. Piochi, «Il Trattato di Paolo dell'Abaco», *Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze*, 9 (1984), pp. 21-40.
- H. Pirenne, «L'instruction des marchands au Moyen Age», *Annales d'histoire économique et sociales*, I (1929), pp. 13-28.
- P. L. Pizzamiglio, «Le traduzioni matematiche gerardiane e la tradizione matematica cremonese», in P. L. Pizzamiglio (a cura di), *Gerardo da Cremona* (Cremona, Annali della Biblioteca Statale e Libreria Civica, 1993).
- P. Pontio, *Ragionamento di musica* (Parma, Erasmo Viotto, 1588).

- P. Portet, «Bertrand Boysset, arpenteur arlésien de la fin du XIV^e siècle 1355-1415», 1995, Université de Toulouse II Le Mirail, Toulouse.
- G. Previtali, *Piero della Francesca* (Milano, Fabbri Editori, 1965).
- A. Procissi, «I Ragionamenti d'Algebra di R.Canacci», *B.U.M.I.S.*, III (1954), p. 3.
- E. S. Procter, «The Scientific Works of the Court of Alfonso X of Castille: The King and his Collaborators», *The Modern Language Review*, 40 (1945), pp. 12-29.
- L. Puig, «El De Numeris Datis de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos», *Mathesis*, 10 (1994), pp. 47-92.
- L. Puig, «Componentes de una historia del algebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado», in F. Hitt (a cura di), *Investigaciones en Matemática Educativa* (México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1996a), pp. 109-131.
- L. Puig, *Pupils' prompted Production of a Medieval Mathematical Sign System*, in Proceedings of the Twentieth International Conference on the Psychology of Mathematics Education, Valencia, 1996b, a cura di L. Puig e Á. Gutiérrez, (PME, 1996) pp. 77-84.
- M. Quatremère (a cura di), *Ibn Haldun, al-Muqaddima, texte arabe publié, d'après les manuscrits de la bibliothèque impériale par M. Quatremère* (Paris, Benjamin Duprat, 1858).
- L. Radford, «Before The Other Unknowns Were Invented: Didactic Inquiries On The Methods And Problems Of Mediaeval Italian Algebra», *For the Learning of Mathematics*, 15 (1995).
- I. Ramelli (a cura di), *Le nozze di Mercurio e Filologia di Marziano Capella* (Milano, Bompiani, 2001).
- R. Rashed, *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes* (Paris, Les Belles Lettres, 1984).
- R. Rashed, «Where geometry and algebra intersect – the Arab world – A Mathematical Mystery Tour», *UNESCO Courier* (1989).
- R. Rashed, *The development of Arabic Mathematics between Arithmetic and Algebra* (Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1994).
- R. Rashed, «Fibonacci et les mathématiques arabes», *Alliage*, 24-25 (1996).
- R. Rashed, «L'algèbre», in R. Rashed (a cura di), *Histoire des sciences arabes* (Paris, Le Seuil, 1997).
- R. Rashed, «Fibonacci et le prolongement latin des mathématiques arabes», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XXIII (2003).
- R. Rashed (a cura di), *Al-Khwarizmi – Le commencement de l'algèbre. Texte établi, traduit et commenté par R. Rashed* (Paris, Librairie Blanchard, 2007).
- U. Rebstock, «Angewandtes Rechnen in der islamischen Welt und dessen Einflüsse auf die abendländische Rechenkunst», in *Kommunikation zwischen Orient und Okzident. Alltag und Sachkultur*, Wien, 1994, (Österreichische Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-Historische Klasse, Sitzungsberichte, 19. Band, Freiburg, 2003) pp. 91-115.
- U. Reich, *Johann Scheubel (1494-1570), Wegbereiter der Algebra in Europa*, in *Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit*, Annaberg-Buchholz, 1996, a cura di R. Gebhardt e H. Albrecht, (Adam-Ries-Bund e.V, 1996).

- C. Renzi Rizzo, «I rapporti diplomatici fra il re Ugo di Provenza e il califfo 'Abd ar-Ramân III: fonti cristiane e fonti arabe a confronto», *Reti medievali*, III (2002).
- B. E. Reynolds, «The Algorists vs. the Abacists: An Ancient Controversy on the Use of Calculators», *The College Mathematics Journal*, 24 (1993), pp. 218-223.
- D. E. Rhodes, *La stampa a Treviso nel secolo XV* (Treviso, Biblioteca Comunale, 1983).
- J. Richard, *Les modalités de la présence franque en Orient*, in *La présence latine en orient au moyen âge*, Paris, 1999, a cura di G. Brunel e M.-A. Nielen, (Centre historique des Archives nationales, 2000).
- P. Riché, *Educazione e cultura nell'Occidente barbarico dal VI all'VIII secolo* (Roma, Armando editore, 1966).
- P. Riché, «La bibliothèque de Gerbert d'Aurillac», in P. Riché (a cura di), *Education et culture dans l'Occident médiéval* (Aldershot, Variorum, 1993).
- P. Riché, «Les écoles de Lotharingie autour de l'an mil», in *Lotharingia. Eine europäische Kernlandschaft um das Jahr 1000*, Saarbrücken, 1994, a cura di H.-W. Herrmann e R. Schneider, (Saarbrücker Druckerei und Verlag, 1995).
- P. Riché, «Le 'Quadrivium' dans le Haut Moyen Age», in *Scienze matematiche e insegnamento in epoca medievale* – Atti del convegno internazionale di studio Chieti, 1996, a cura di P. Freguglia, L. Pellegrini e R. Paciocco, (ESI, 2000) pp. 15-33.
- J. P. Richter (a cura di), *The notebooks of Leonardo da Vinci. Compiled and edited from the original manuscripts by Jean Paul Richter* (New York, Dover Publications, 1970).
- O. Rignani, «Ruggero Bacone su traduttori e traduzioni», in A. Colli, R. Fedriga, A. Ferrara, C. Fiocchi, F. Forte, S. Fresko, M. T. Fumagalli Beonio Brocchieri, M. Parodi, M. Rossini, C. Selogna, S. Simonetta e M. D. Roberto (a cura di), *Doctor virtualis. Quaderno n. 7. Tradurre l'intraducibile. Liceità e limiti della traduzione nel medioevo latino e arabo-islamico* (Milano, CUEM, 2007).
- A. Rigo, *I Padri esicasti. L'amore della quiete. L'esicasmò bizantino tra il XIII e il XV secolo* (Magnano, Qiqajon, 1993).
- J. Rivera, «Personajes hispanos asistentes en 1215 al IV Concilio de Letrán», *Hispania sacra*, 4 (1951), pp. 349, 354-355.
- A. Rivolta, *Catalogo dei codici pinelliani dell'Ambrosiana* (Milano, Tipografia pontificia arcivescovile S.Giuseppe, 1933).
- L. Rodet, «L'algèbre d'Al-Kharizmi et les méthodes indienne et grecque», *Journal Asiatique*, 7 (1878), pp. 5-98.
- C. S. Roero, *Algebra e Aritmetica nel Medioevo islamico*, presentato a Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente, Pisa, 2002.
- D. Romano, *Le opere scientifiche di Alfonso X e l'intervento degli Ebrei*, presentato a Oriente e Occidente nel Medioevo: filosofia e scienze, Roma, 1971.
- D. Romano, «Hermman -el Alemán», in AA.VV. (a cura di), *La escuela de traductores de Toledo* (Toledo, Diputación de Toledo, 1996).
- G. Romano (a cura di), *L'arte del labirinto, copia anastatica* (Treviso, Longo e Zoppelli, 1969).

- P. L. Rose, «Humanist Culture and Renaissance Mathematics: The Italian Libraries of the Quattrocento», *Studies in the Renaissance*, 20 (1973), pp. 46-105.
- V. Rose, «Ptolemaeus und die Schule von Toledo», *Zeitschrift für klassische Philologie*, VIII (1874), pp. 327-349.
- F. Rosen, *The algebra of Mohammed Ben Musa*. (London, Oriental Translation Fund, 1831).
- F. Rosenthal, *Das Fortleben der Antike im Islam* (Zürich, Artemis Verlag, 1965).
- F. Rosenthal, «al-Safadi, Salah al-Din Khalil b. Aybak, Abu'l-Safa' al-Albaki», in AA.VV. (a cura di), *The Encyclopaedia of Islam* (Leiden, Brill, 1994), pp. 759-760.
- B. Rotman, *Signifying nothing: The Semiotics of Zero* (New York, St. Martin's Press, 1987).
- J. Ruska, «Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst», *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-Historische Klasse*, 2 (1917), pp. 1-125.
- J. Ruysschaert, «Miniaturistes 'romains' sous Pie II», in D. Maffei (a cura di), *Enea Silvio Piccolomini Papa Pio II: Atti del Convegno per il Quinto Centenario della Morte e Altri Scritti* (Siena, Società Tipografica Multa Paucis, 1968).
- A. S. Saïdan, «The 'Takmila fi'l-Hisab' of al-Baghdadi», in D. A. King e G. Saliba (a cura di), *From Deferent to Equant: A Volume of Studies in the History of Science in the Ancient and Medieval Near East in Honor of E. S. Kennedy* (New York, Academy Of Sciences, 1987).
- A. S. Saïdan (a cura di), *Handasat Uqlidis fi aydin arabiiyya* (Amman, Dar al-Basir, 1991).
- A. S. Saïdan, «Numération et Arithmétique», in R. Rashed (a cura di), *Histoire des sciences arabes* (Paris, Le Seuil, 1997).
- G. Saliba, «The meaning of al-jabr wa'l-muqābalah», *Centaurus*, 17 (1972), pp. 189-204.
- J. Sándor e B. Crstici, «Perfect numbers: Old and new issues; perspectives», in J. Sándor e B. Crstici (a cura di), *Handbook of Number Theory II* (Dordrecht, Springer, 2004), pp. 15-96.
- A. Saponi, *La mercatura medievale* (Firenze, Sansoni, 1972).
- A. Saponi, «La cultura del mercante medievale italiano», in G. Airaldi (a cura di), *Gli orizzonti aperti. Profili del mercante medievale* (Torino, Paravia, 1997).
- G. Sarton, *Introduction to the History of Science* (Washington D.C., Carnegie Institution, 1931).
- G. Sarton, «Adriaan van Roomen's commentary on al-Khwarizmi (c. 1598)», *Isis*, 21 (1934), p. 209.
- A. Sayili, «Turkish Contribution to Scientific Work in Islam», *Belleteen*, XLIII (2004).
- E. Scholz, *Geschichte der Algebra* (Mannheim, Bibliographisches Institut Brockhaus, 1990).
- M. Schramm, «Frederick II of Hohenstaufen and Arabic Science», *Science in Context*, 14 (2001), p. 289.

- E. Schröder, «Ulrich Wagner, Autor des ersten gedruckten deutschsprachigen kaufmännischen Rechenbuches von 1483», in *Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit*, Annaberg-Buchholz, 1996, a cura di R. Gebhardt e H. Albrecht, (Adam-Ries-Bund e.V., 1996).
- P. Schub, «A Mathematical Text by Mordecai Comtino (Constantinople, XV Century)», *Isis*, 17 (1932), pp. 54-70.
- R. K. Schwartz, *Issues in the Origin and Development of Hisab al-Kbata'ayn (Calculation by Double False Position)*, presentato a Huitième Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, Radès, 2004.
- C. J. Scriba e P. Schreiber, *5000 Jahre Geometrie Geschichte, Kulturen, Menschen* (Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 2000).
- L. A. Sédillot, *Histoire des Arabes* (Paris, Maisonneuve, 1854).
- S. Sela, *Abraham Ibn Ezra and the Rise of Medieval Hebrew Science* (Netherland, Brill Academic Publishers, 2003).
- J. Sesiano, «The appearance of negative solutions in mediaeval mathematics», *Archive for History of Exact Sciences*, 32 (1985), pp. 105-150.
- J. Sesiano, *Le Liber Mabamaletb, un traité mathématique latin composé au XIIe siècle en Espagne*, in *Histoire des Mathématiques Arabes. Premier colloque international sur l'histoire des mathématiques arabes*, Alger, 1986, (La Maison des Livres, 1988) pp. 69-98.
- J. Sesiano, *Der Liber Mahameletb*, in *Proceeding of the Symposium of the XVIIIth International Congress of History of Science, Hamburg-München, 1989*, a cura di Ä. Bäumer e M. Büttner, (Universitätsverlag N. Brockmeyer, 1989).
- J. Sesiano, «La version latine médiévale de 'l'Algèbre' d'Abu Kamil», in M. Folkerts e J. P. Hogendijk (a cura di), *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard* (Amsterdam, Rodopi, 1993), pp. 315-452.
- J. Sesiano, «Les Carrés magiques de Manuel Moschopoulos», *Archive for History of Exact Sciences* 53 (1998), pp. 377-397.
- F. Sezgin, *Geschichte des Arabischer Schriftums* (Leiden, Brill, 1974).
- L. E. Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation* (New York, Springer Verlag, 2002).
- M. Silberberg, «Ein handschriftliches hebräisch-mathematisches Werk des Mordechai Comtino», *Jahrbuch der Jüdisch-Literarischen Gesellschaft*, III (1905), pp. 277-292.
- M. Silberberg, «Ein handschriftliches hebräisch-mathematisches Werk des Mordechai Comtino», *Jahrbuch der Jüdisch-Literarischen Gesellschaft*, IV (1906), pp. 214-237.
- A. Simi, «Two 15th Century Algebra Texts derived from the Treatise of Master Dardi of Pisa», *Pure Mathematics and Applications*, Ser. A-II (1992), pp. 291-304.
- A. Simi, «Trattato dell'Alcibra Amuchabile», *Quaderni del Centro Studi di Matematica Medievale*, 22 (1994).
- A. Simi, «L'eredità della Practica geometriae di Leonardo Pisano nella geometria del basso Medioevo e del primo Rinascimento», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, I (2004).

- C. J. Singer e D. W. Singer, «Hand-list of scientific MSS. in the British Isles dating from before the sixteenth century», *Library*, s3-X (1919), pp. 91-100.
- E. R. Slight, «The Art of Nombryng», *Mathematics Teacher* 35 (1942), pp. 112-116.
- A. J. E. M. Smeur, «Georgius de Hungaria, Arithmeticae summa tripartita, 1499. Facsimile of the first arithmetic printed in The Netherlands with an introduction by A. J. E. M.» *Smeur Dutch Classics on the History of Sciences*, 14 (1965).
- D. E. Smith, *Rara Arithmetica* (Boston, Ginn and Company, 1908).
- D. E. Smith, «On the Origin of Certain Typical Problems», *The American Mathematical Monthly*, 24 (1917), pp. 64-71.
- D. E. Smith, «Rabbi Ben Ezra and the Hindu Arabic Problem», *The American Mathematical Monthly*, 25 (1918), pp. 99-108.
- D. E. Smith, *History of Mathematics* (Boston, Ginn & company, 1923-25).
- P. Sobrino Vázquez, «La Escuela de Traductores de Toledo», *Hispanorama*, 56 (1990).
- F. Spagnolo, *Lo sviluppo del pensiero algebrico nel periodo federiciano: una disputa tra abacisti e algoritmisti* (Palermo, 1995).
- P. Speziali, «Luca Pacioli et son oeuvre», in *Sciences of the Renaissance* (Paris, Vrin, 1973), pp. 93-106.
- M. Spiesser, *Le Compendy de la pratique des nombres. Une Arithmétique du XVe siècle à mi-chemin entre théorie et pratique commerciale*, in *Commerce et Mathématiques du Moyen-Age à la Renaissance, autour de la Méditerranée – Actes du Colloque International du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes*, Beaumont de Lomagne, 1999a, (C.I.H.S.O., 2001).
- M. Spiesser, *Nombre et pratiques calculatoires dans la tradition commerciale du XVe siècle : L'exemple des arithmétiques marchandes du sud de la France*, in *Colloque «La Pensée numérique»*, Peyresq, 1999b, a cura di C. Alvarez, J. Dhombres e J.-C. Pont, (Association Peyresq Foyer d'Humanisme, 2003).
- M. Spiesser, «Problèmes linéaires dans le Compendy de la pratique des nombres de Barthélemy de Romans et Mathieu Préhoude (1476). Une approche nouvelle basée sur des sources proches du Liber abbaci de Léonard de Pise», *Historia Mathematica*, 27 (2000), pp. 136-157.
- M. Spiesser, «Les manuels d'arithmétique pour les marchands dans la France du XVe siècle», *Bulletin de l'APMEP* (2003), pp. 32-50.
- M. Spiesser, «Questions sur la diffusion du Liber abbaci en France au XV siècle à travers l'étude des traités commerciaux», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XXIV (2004).
- M. Spiesser, «L'algèbre de Nicolas Chuquet dans le contexte français de l'arithmétique commerciale», *Revue d'histoire des mathématiques*, 12 (2006), pp. 7-33.
- W. H. Stahl, «To a Better Understanding of Martianus Capella», *Speculum*, 40 (1965), pp. 102-115.
- W. H. Stahl, *Martianus Capella and the Seven Liberal Arts* (New York, Columbia University Press, 1992).

- R. Steele (a cura di), *The Earliest Arithmetics in English (Alexander de Villa Dei; Joannes de Sacro Bosco; Robert Record; Robert Steele)* (London, Oxford University Press, 1922).
- R. Steele, «The Earliest Arithmetics in English», *The Mathematical Gazette*, 12 (1924), pp. 128-129.
- M. Steinschneider, *Verzeichniss der Hebräischen Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Berlin. 1. Teil* (Berlin, 1897).
- M. Steinschneider, «Die Europäischen Übersetzungen aus dem Arabischen bis Mitte des 17. Jahrhunderts», *Sitzungsberichten der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, philosophisch-historische Klasse*, 57 (1904-1905).
- J. Stewart, *Galois Theory* (London, Chapman and Hall, 1973).
- W. E. Stone, «Abacists versus Algorists», *Journal of Accounting Research*, 10 (1972), pp. 345-350.
- C. Stornajolo, *Codices Urbinae Latini III* (Romae, Typis Vaticanis, 1921), pp. 268-269.
- D. J. Strijk, «The Prohibition of the Use of Arabic Numerals in Florence», *Archives internationales d'histoire des sciences*, 84-85 (1968), pp. 291-294; 293-295.
- W. Stubbs (a cura di), *William of Malmesbury. De Rebus Gestis Regum Anglorum* (London, Rolls Series, 1887), p. 195.
- K. Sudhoff, «Die kurze 'Vita' und das Verzeichnis der Arbeiten Gerhards von Cremona, von seinen Schülern und Studiengenossen kurz nach dem Tode des Meisters (1187) zu Toledo verabfaßt», *Archiv für Geschichte der Medizin*, VIII (1914).
- H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Amsterdam, APA – Oriental Press, 1900-1902).
- H. Suter, «Über die im 'Liber augmenti et diminutionis' vorkommenden Autoren», *Bibliotheca mathematica*, 3 (1902), p. 350.
- F. Swetz, *Capitalism and Arithmetic: The New Math of the 15th Century* (La Salle, Open Court, 1987).
- F. Swetz (a cura di), *From Five Finger to Infinity: a Journey through the History of Mathematics* (Chicago – Lasalle, Open court, 1994).
- P. G. Szabó, «Magyarországi György mester alakja a hazai matematikátörténetben», *Magyar Tudomány*, 7 (2002), pp. 961-965.
- M. Tangheroni, *Pisa e il Mediterraneo all'epoca di Fibonacci*, presentato a Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente, Pisa, 2002.
- P. Tannery, «Le Traité de Manuel Moschopoulos sur Les Carrés Magiques», *Annales de l'Association pour l'Encouragement des Etudes Grecques* (1886a), pp. 88-104.
- P. Tannery, *Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhodas (texte grec et traduction)* (Paris, Imprimerie nationale, 1886b).
- P. Tannery, «Sur le 'Liber augmenti et diminutionis' compilé par Abraham», *Bibliotheca Mathematica*, 3 (1901), pp. 45-47.
- P. Tannery, «Adelard of Bath», *English Historical Review*, XXVI (1911), pp. 491-498.

- P. Tannery, *Mémoires scientifiques. Tome IV, Sciences exactes chez les Byzantins* (Toulouse, Edouard Privat, 1920).
- P. Tannery, *Mémoires scientifiques. Tome V, Sciences exactes au Moyen Age* (Paris, Gauthier-Villars, 1922), pp. 343-345.
- L. Thorndike, «The Arithmetic of Jehan Adam, 1475, A.D.» *The American Mathematical Monthly*, 33 (1926), pp. 24-28.
- L. Thorndike, «Date of the Translation by Ermangard Blasius of the Work on the Quadrant by Profatius Iudaeus», *Isis*, 26 (1936), pp. 306-309.
- L. Thorndike, «Renaissance or Prenaissance?» *Journal of the History of Ideas*, IV (1943), pp. 65-74.
- L. Thorndike, *The Sphere of Sacrobosco and its commentators* (Chicago, University of Chicago Press, 1949).
- L. Thorndike, «John of Seville», *Speculum*, 34 (1959), pp. 20-38.
- A. Tihon, «La matematica bizantina», in S. Petruccioli (a cura di), *Storia della Scienza, IV: Medioevo, Rinascimento* (Roma, Istituto della Enciclopedia italiana, 2001), pp. 329-334.
- S. Toniato, *L'arithmétique du ms Cambridge Ul Li 4 14 et ses singularités dans le traitement des fractions*, presentato a Joint Meeting SISM-SFHST Paris, 2007.
- G. J. Toomer, «Khwarizmi (al-)», in C. C. Gillispie (a cura di), *Dictionary of Scientific Biography* (New York, Charles Scribner's Son, 1970-1990), pp. 358-365.
- L. Travaini, *Monete, Mercanti e Matematica. Le monete medievali nei trattati di aritmetica e nei libri di mercatura* (Roma, Jouvence, 2003).
- M. Treu, *Maximi monachi Planudis epistulae* (Roma, École française de Rome, 1890).
- W. Tronzo, *Intellectual Life at the Court of Frederick II Hohenstaufen* (Washington, Center for Advanced Study in the Visual Arts, 1994).
- J. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung, mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter* (Berlin und Leipzig, Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, 1921).
- E. Ulivi, «Luca Pacioli una biografia scientifica», in E. Giusti e C. Maccagni (a cura di), *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento* (Firenze, Giunti, 1994), pp. 21-78.
- E. Ulivi, «Per una biografia di Antonio Mazzinghi, maestro d'abaco del XIV secolo», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XVI (1996), pp. 101-150.
- E. Ulivi, «Benedetto da Firenze (1429-1479), un maestro d'abaco del XV secolo. Con documenti inediti e con un'appendice su abacisti e scuole d'abaco a Firenze nei secoli XIII-XVI», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XXII (2002a), pp. 5-242.
- E. Ulivi, *Scuole e maestri d'abaco in Italia tra Medioevo e Rinascimento*, presentato a Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita della matematica in Occidente, Pisa, 2002b.
- E. Ulivi, «Maestri e scuole d'abaco a Firenze: la Bottega di Santa Trinita», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XXIV (2004).

- E. Ulivi, «Un documento autografo ed altri documenti inediti su Benedetto da Firenze», *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XXVI (2006).
- A. Van de Vyver, «Les oeuvres inédites d'Abbon de Fleury», *Revue bénédictine*, 47 (1935), pp. 125-169.
- W. Van Egmond, «The earliest vernacular treatment of algebra: the Libro di ragioni di Paolo Gerardi (1328)», *Physis*, 20 (1978), pp. 155-189.
- W. Van Egmond, «Practical Mathematics in the Italian Renaissance. A catalog of Italian abacus manuscripts and printed books to 1600», *Supplemento agli Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze* (1980a).
- W. Van Egmond, «A second manuscript of Piero della Francesca's Trattato d'abaco», *Manuscripta*, 24 (1980b).
- W. Van Egmond, «The algebra of master Dardi of Pisa», *Historia Mathematica*, 10 (1983), p. 399.
- W. Van Egmond, «Della radice de' numeri e metodo di trovarla (Trattatello di Algebra e Geometria) dal Codice Ital. 578 della Biblioteca Estense di Modena. Parte Prima», *Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale*, 15 (1986).
- W. Van Egmond, «How algebra came to France», in C. Hay (a cura di), *Mathematics from Manuscript to Print (1300-1600)* (Oxford, Clarendon Press, 1988), pp. 127-143.
- H. Van Schoy, «Alfonso X as a lexicographer», *Hispanic Review*, 7 (1940).
- L. Vecchione, «L'Algorismus di Pietro Paolo Muscarello, codice di aritmetica pratica e mercantile in Nola del XV secolo», *Atti del Circolo Culturale B.G. Duns Scotto di Roccarainola*, 23-25 (1999), pp. 71-82.
- M. V. Veguín Casas, *Matemáticas y Camino de Santiago* (Madrid, Ediciones del Orto, 1998).
- P. Ver Eecke (a cura di), *Léonard de Pise (Fibonacci)*, «*Le livre des nombres carrée (Liber quadratorum)*», traduit pour la première fois du latin médiéval en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke (Bruges, Desclée de Brouwer & Cie, 1952).
- J. Verger, *Gentes del saber en la Europa de finales de la Edad Media* (Madrid, Complutense, 1999).
- J. Vernet, «Les ciències exactes a la Catalunya medieval», in J. M. Salrach Mares (a cura di), *L'època medieval a Catalunya. Cicle de conferències fet a la institució cultural del CIC de Terrassa* (Montserrat, Abadia de Montserrat, 1989).
- A. Vitale Brovarone, «Considérations sur la production de textes mathématiques en France et sur leur diffusion manuscrite et imprimée», *Le Moyen Français*, 24-25 (1989), pp. 23-53.
- K. Vogel, «Zur Geschichte der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten», *Deutsche Mathematik*, 5 (1940), pp. 217-240.
- K. Vogel (a cura di), *Die Practica des Algorismus Ratisbonensis. Ein Rechenbuch des Benediktinerklosters St. Emmeram aus der Mitte des 15. Jahrhunderts nach den Handschriften der Münchner Staatsbibliothek und der Stiftsbibliothek St. Florian* (München, Beck, 1954).
- K. Vogel, *Mohammed ibn Musa Alchwarizm's Algorithmus. Das frübeste Lehrbuch zum Rechnen mit Indischer Ziffern* (Aalen, Millaria Bd. III, 1963).

- K. Vogel, *Der Donaauraum, die Wiege mathematischer Studien in Deutschland. Mit drei bisher unveröffentlichten Texten des 15. Jahrhunderts* (München, Fritsch, 1973).
- K. Vogel, *Ein Italienisches Rechenbuch aus dem 14. Jahrhundert (Columbia x 511 A13)* (München Veröffentlichungen des Forschungsinstituts des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, 1977).
- K. Vogel, «Die erste deutsche Algebra aus dem Jahre 1481 Nach einer Handschrift aus C80 Dresdensis», *Bayerische Akademie der Wissenschaften Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klass Abhandlungen (Neue Folge)*, 160 (1981).
- K. Vogel, «Byzanz», in K. Vogel (a cura di), *Kleinere Schriften zur Geschichte der Mathematik* (Stuttgart, Steiner-Verl.-Wiesbaden, 1988), pp. 574-592.
- A. von Humboldt, *Kosmos. Entwurf einer physischen Weltbeschreibung. Band II* (Stuttgart, Gotta'scher Verlag, 1847), pp. 454-457.
- J. von Kopelevitch, «Über ein Werk des Abū Abdallah Muhammad ibn Mūs â al-Hawârizmî al Mâusî zur Arithmetik der Inder», *Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften Technik, Medizin* (1964).
- O. von Simson, *The Gothic Cathedral* (New York, Harper and Row, 1956).
- G. Waitz (a cura di), *Willelmi Malmesburiensis Gesta Regum Anglorum* (Hannover, MGH, 1852).
- H. Wäschke, *Das Rechenbuch des Maximus Planudes* (Halle, Schmidt, 1878).
- R. A. H. Waterfield, «Emendations of [Iamblichus], Theologoumena Arithmeticae (De Falco)», *The Classical Quarterly, New Series*, 38 (1988), pp. 215-227.
- E. G. R. Waters, «A Fifteenth Century French Algorithm from Liege», *Isis*, 12 (1929), pp. 194-236.
- M. Weidauer, *Über den Cossisten Heinrich Schreyber (Grammateus)*, in Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit, Annaberg-Buchholz, 1996, a cura di R. Gebhardt e H. Albrecht, (Adam-Ries-Bund e.V, 1996).
- J. Weinberg, *Die Algebra des Abu Kamil Soga' ben Aslam* (München, Selbstverlag, 1935).
- C. Wendel, «Planudea», *Byzantinische Zeitschrift*, XL (1940), pp. 406-445.
- C. W. Westfall, *In this Most Perfect Paradise. Alberti, Nicholas V and the Invention of Conscious Urban Planning of Rome, 1447-1455* (University Park, Pa, The Pennsylvania University Press, 1974).
- B. P. Williams e R. S. Williams, «Finger Numbers in the Greco-Roman World and the Early Middle Ages», *Isis*, 86 (1995), pp. 587-608.
- N. G. Wilson, *An Anthology of Byzantine Prose* (Berlin-New York, Walter de Gruyter, 1971), pp. 126-129.
- N. G. Wilson, *The Elements: the transmission of the Greek text*, in Euclid and His Heritage, Bernard Sunley Lecture Theatre – St. Catherine's College – Oxford University, 2005.
- C. Winterberg (a cura di), *Petrus pictor burgensis De prospectiva pingendi. Nach dem Codex der königlichen Bibliothek zu Parma nebst deutscher Übersetzung erstenmale veröffentlicht von Dr. C. Winterberg* (Strassburg, Heitz und Mundel, 1899).
- F. Woepke (a cura di), *L'algèbre d'Omar al-Kayyami* (Paris, Duprat, 1851).

- F. Woepke, *Extrait du Fakhri, traité d'Algèbre par Abou Bekr Mobammed Ben Albacan Alkarkhi* (Paris, Imprimerie nationale, 1853).
- F. Woepke, 'Mémoires sur la propagation des chiffres indiens', *Journal Asiatique*, 6 (1863), pp. 234-290; 442-529.
- A. P. Youshkevitch, *Les mathématiques arabes, VIIIe-XVe siècle* (Paris, Vrin, 1976).
- G. Zaccagnini, «L'insegnamento privato a Bologna e altrove nei secc. XIII e XIV», *Atti e Memorie della R. Deputazione di Storia Patria per le Province di Romagna*, XIV (1924), pp. 283-284.
- S. Zaimche, *Seville* (Manchester, Foundation for Science Technology and Civilization, 2005).
- G. Zarlino, *Dimostrazioni harmoniche* (Venezia, Francesco de' Franceschi, 1571).
- R. Zazzeri, *Sui codici e libri a stampa della Biblioteca Malatestiana di Cesena. Ricerche e osservazioni* (Cesena, Vignuzzi, 1887), pp. 483-485.
- E. Zinner, *Regiomontanus: his life and work* (Amsterdam, North-Holland, 1990).
- M. Zorzi, *La Libreria di San Marco. Libri, lettori, società nella Venezia dei dogi* (Milano, Mondadori, 1987).

ALLEGATO 1.

CENSIMENTO DEI MANOSCRITTI
DELL'ARITMETICA DI BOEZIO

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	SECOLO	TITOLO
Austria	St. Paul	Stiftsbibliothek	Cod.133/6	11-12	Arithmetica
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	55	10	Arithmetica
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	177	11	Arithmeticae libri 2
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	50	12	De Arithmetica libri II
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	297	12	De arithmetica libri duo
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	2269	13	Arithmetica
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	2463	13	Arithmetica cum prologo
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	83	14	De arithmetica libri 2
Belgio	Brugge	Stedelijke Openbare Bibliotheek	528	13	Arithmetica
Belgio	Bruxelles	Bibliothèque Royale	5444-5446	12	Arithmetica
Belgio	Bruxelles	Bibliothèque Royale	5444-5446	12	Arithmetica
Belgio	Bruxelles	Bibliothèque Royale	18397	12	Arithmetica
Francia	Cambrai	Centre Culturel	B 928	9	Arithmetica
Francia	Cambrai	Centre Culturel	B 928	10	Arithmetica
Francia	Charleville	Bibliothèque Municipale	184	12	Arithmetica
Francia	Chartres	Bibliothèque Municipale	45	11	Arithmetica
Francia	Chartres	Bibliothèque Municipale	46	11	Arithmetica

Francia	Chartres	Bibliothèque Municipale	498	12	arithmetica
Francia	Cluny	Bibliothèque de la Ville	279		Arithmetica
Francia	Metz	Bibliothèque Municipale	1250	11	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 10251	9	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 13009	9	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 14064	9	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	N. A. L. 1614	9	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 817	10	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 6639	10	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7181	10	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7182	10	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7359	10	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 11241	10	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 11242	10	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 14080	10	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 17858	10	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	N. A. L. 3044	11	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7185	11	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 6620	11	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7186	11	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Mazarine	4319	12	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 16201	12	Arithmetica

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	SECOLO	TITOLO
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7187	12	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	N. A. L. 3044	12	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7188	12	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 3011	13	De Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7189	13	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7360	13	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7215	14	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7221	15	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7183	10-11	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 14065	10-11	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 6401	11-12	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7039	13-14	Arithmetica
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7184		Arithmetica
Francia	Reims	Bibliothèque Municipale	976	12	Arithmetica
Francia	Reims	Bibliothèque Municipale	975	15	Arithmetica
Francia	Saumur	Bibliothèque Municipale	3	13	Arithmetica
Francia	Tours	Bibliothèque Municipale	803	10	Arithmetica
Francia	Verdun	Bibliothèque Municipale	24	10	Arithmetica
Francia	Verdun	Bibliothèque Municipale	87	11	Arithmetica
Francia	Verdun	Bibliothèque Municipale	279		Arithmetica
Germania	Bamberg	Staatsbibliothek	Ms. class. 5	9	Arithmetica
Germania	Bamberg	Staatsbibliothek	Ms. class. 6	10	Arithmetica

Germania	Bamberg	Staatsbibliothek	Ms. class. 7	10	Arithmetica
Germania	Berlin	Staatsbibliothek zu Berlin	Ms. lat. qu. 578	9	De arithmetica
Germania	Berlin	Staatsbibliothek zu Berlin	Ms. lat. fol. 601	11	De arithmetica
Germania	Berlin	Staatsbibliothek zu Berlin	Ms. lat. qu. 528	12	Arithmetica
Germania	Bonn	Universitätsbibliothek	S 218		De arithmetica
Germania	Darmstadt	Hessische Landes- und Hochschulbibliothek	2640	13-14	De arithmetica libri II
Germania	Dresden	Sächsische Landesbibliothek	Dc 181	12	Arithmetica
Germania	Dresden	Sächsische Landesbibliothek	C 80	15	Arithmetica
Germania	Dresden	Sächsische Landesbibliothek	C 99 ^{Aa}	15	De arithmetica
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 386	14	Arithmetica
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Fol. 395	14	Arithmetica
Germania	Freiburg	Universitätsbibliothek	55	11	De institutione arithmetica
Germania	Freiburg	Universitätsbibliothek	483, 31, 1	10-11	De institutione arithmetica
Germania	Gotha	Forschungs- und Landesbibliothek	Memb. I 103	10	De arithmetica
Germania	Hildesheim	Dombibliothek	Domschatz Nr. 31	11	De arithmetica
Germania	Hildesheim	Dombibliothek	743	12	De arithmetica
Germania	Köln	Erzbischöfliche Diözesan- und Dombibliothek	186	9	De arithmetica libri duo
Germania	Köln	Erzbischöfliche Diözesan- und Dombibliothek	83 (83a)	9	De arithmetica

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	SECOLO	TITOLO
Germania	Köln	Erzbischöfliche Diözesan- und Dombibliothek	83 (83a)	9	De arithmetica
Germania	Köln	Erzbischöfliche Diözesan- und Dombibliothek	185	10	De arithmetica libri duo
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 3517	10	Arithmetica
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14401	10	Arithmetica
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 18764	10	Arithmetica
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 6405	11	Arithmetica
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 18480	11	Arithmetica
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 6285	12	Arithmetica
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14601	12	Arithmetica
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 18208	12	Arithmetica
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 23512	12	Arithmetica
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 13021	12-13	De arte arithmetica libri II
Germania	Trier	Stadtbibliothek	Ms. 8 ^{vo} 1102/51	11	De arithmetica libri II
Germania	Trier	Seminarbibliothek	Hs. 118	13-14	Ars arithmetica
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	Cod. Guelf. 61. 2. Aug. oct.	12	Arithmetica
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	Cod. Guelf. 51. 9. Aug. quart	13	Arithmetica
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	Cod. Guelf. 87. 2. Aug. fol	11-12	Arithmetica
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	Cod. Guelf. 1027. Helmst.	13-14	De arithmetica libb. II

Inghilterra	Cambridge	Peterhouse College	248	11	Arithmetica
Inghilterra	Cambridge	University Library	Ii. III. 12	11	Arithmetica
Inghilterra	Cambridge	Pembroke College	269	12	Arithmetica
Inghilterra	Cambridge	University Library	Kk. V. 32	12	De arithmetica
Inghilterra	Cambridge	Fitzwilliam Museum	295	15	Arithmetica
Inghilterra	Cambridge	Corpus Christi College	352	09-10	Arithmetica
Inghilterra	Downside Abbey	Cathedral Library	48250	15	De arithmetica
Inghilterra	London	British Museum	Harley 3595	10	Arithmetica
Inghilterra	London	Lambeth Palace	67	12	Arithmetica
Inghilterra	London	British Museum	Harley 2510	13	Arithmetica
Inghilterra	London	British Museum	Burney 275	13	Arithmeticae libri duo
Inghilterra	London	British Museum	Arundel 339	14	De Arithmetica libri duo
Inghilterra	London	British Museum	Lansdowne 842 (a & b)	15	De Arithmetica
Inghilterra	London	British Museum	Harley 549		De arithmetica libri II
Inghilterra	Oxford	Balliol College	306	11	De arithmetica libri tres
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Bodley 309	11	Arithmetica
Inghilterra	Oxford	Trinity College	17	11	De arte arithmetica libri duo
Inghilterra	Oxford	Corpus Christi College	118	12	De Arithmetica libri duo
Inghilterra	Oxford	Corpus Christi College	224	12	De Arithmetica libri duo
Inghilterra	Oxford	St. John's College	17	12	De arte arithmetica
Inghilterra	Oxford	Trinity College	47	12	Arithmetica
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Laud. lat. 54	13	De arithmetica libri duo

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	SECOLO	TITOLO
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Digby 98	13-14	Pars Arithmeticae
Irlanda	Dublin	Trinity College Library	H.2. 12 # 7	14	De Re Arithmetica
Irlanda	Dublin	Trinity College Library	D.4. 27	14-15	Arithmetica
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Cod. 210	12	Arithmetica
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.6017	13	Arithmetica
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.6017	13	Eiusdem de Arithmetica libri duo
Italia	Città del Vaticano	O	Cod. 1551	13	Arithmetica
Italia	Città del Vaticano	O	Cod. 2069	14	De institutione arithmetica
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.3106	15	Arithmetica
Italia	Città del Vaticano	Codices Palatini Latini	Pal. Lat. 1341	09-10	De arithmetica
Italia	98145,451	98145,451	98145,451	16-17	98145,451
98145,451	Firenze	Biblioteca Riccardiana	Cod. 139	Italia12	De arithmetica
Italia	Milano	Biblioteca Ambrosiana	C 128 Inf	Italia10	De arithmetica libri II
Italia	Milano	Biblioteca Ambrosiana	N 258 Sup	Italia13	De arithmetica libri II
Italia	Milano	Biblioteca Ambrosiana	T 79 Sup	Italia13	De arithmetica libri II
Italia	Milano	Biblioteca Ambrosiana	I 253 Inf	Italia15	De arithmetica libri II
Italia	Torino	Biblioteca Nazionale	T - I - 6	16	Arithmetica
Italia	Venezia	Biblioteca Nazionale Marciana	f.a.332	Italia13	arithmeticae libri duo

Italia	Venezia	Biblioteca Nazionale Marciana	f.a.271	Italia15	De arithmetica libri duo
Italia	Venezia	Biblioteca Nazionale Marciana	f.a.333	Italia15	De arithmetica libri duo
Italia	Venezia	Biblioteca Nazionale Marciana	f.a.334	Italia15	arithmeticae libri duo
Lussemburgo	Luxembourg	Bibliothèque Nationale	60	Italia10	Arithmetica
Olanda	Groningen	Universitätsbibliothek	Cod. 103	16	Excerpta ex Boethii Arithmeticae libris I e II
Olanda	Leiden	Bibliotheek der Universiteit	Voss. Lat. o. 61	Italia12	Arithmetica
Polonia	Wrocław	Biblioteka Uniwersytecka	IVO 11	Italia12	De arithmetica Boethii
Rep. Ceca	Praha	Univer. Státní Knihovna	IX.C.6.(1717)	Italia10	Arithmetica
Rep. Ceca	Praha	Univer. Státní Knihovna	L.XXIX(1272)	Italia13	Arithmetica
Spagna	Barcelona	Archivo de la Corona di Aragon	Ripoll 168	Italia11	De arithmetica
Spagna	El Escorial	Real Biblioteca de San Lorenzo	A. IV. 13	Italia13	Arithmeticae libri II
Spagna	El Escorial	Real Biblioteca de San Lorenzo	G. II. 15	Italia13	Arithmetica
Spagna	Madrid	Biblioteca Nacional	9088	Italia12	De arithmetica
Stati Uniti	New Haven	Yale University Library, The Library of Thomas E. Marston	89	Italia13	Arithmetica
Stati Uniti	New York	The Library of George A. Plimpton, Columbia University	165	Italia10	Arithmetica
Stati Uniti	New York	The Library of George A. Plimpton, Columbia University	166	Italia13	Arithmetica
Stati Uniti	New York	The Library of George A. Plimpton, Columbia University	180	Italia15	Tractatus de arithmetica
Stati Uniti	Princeton	The Library of the Princeton University	Nr. 1698	Italia13	De arithmetica
Stati Uniti	San Juan Capistrano	The Library of Robert B. Honeyman Jr.	6	14-15	Arithmetica

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNATURA	SECOLO	TITOLO
Stati Uniti	San Juan Capistrano	The Library of Robert B. Honeyman Jr.	103		Arithmetica, II
Svezia	Lund	Universitetsbiblioteket	No. 1	10	Arithmetica
Swizzera	Basel	Universitätsbibliothek	AN.III.19	10	Arithmetica
Swizzera	Basel	Universitätsbibliothek	AN.III.18	13	Arithmetica liber II
Swizzera	Basel	Universitätsbibliothek	Inc. 657	14	Arithmetica
Swizzera	Bern	Burgerbibliothek	212	9	De arithmetica
Swizzera	Bern	Burgerbibliothek	299	10	Ars geometria et arithmetica, libri V
Swizzera	Bern	Burgerbibliothek	87	11	Libri artis Geometriae et Arithmeticae numero V
Swizzera	Bern	Burgerbibliothek	633	12	Ars arithmetica
Swizzera	Bern	Burgerbibliothek	538	11-12	Arithmetica
Swizzera	Bern	Burgerbibliothek	A 91		De arithmetica
Swizzera	Bern	Burgerbibliothek	F 219		De arithmetica
Swizzera	St. Gallen	Stiftsbibliothek	248	9	De arithmetica libri II
Swizzera	St. Gallen	Stiftsbibliothek	830	11	De geometria et arithmetica
Swizzera	St. Gallen	Vadiana	Ms. 296	12	De arithmetica

ALLEGATO 2.

CENSIMENTO DEI MANOSCRITTI
DEGLI ALGORISMI LATINI
O IN LINGUE VOLGARI

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Austria	Graz	Universitätsbibliothek	1000	1416-1420	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Austria	Klagenfurt	Bischöfliche Bibliothek	XXIX e 1	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Austria	Kremsmünster	Stiftsbibliothek	LXXXI, CC LXXXI	XIV	Latino	Villedieu	Algorismus
Austria	Kremsmünster	Stiftsbibliothek	LXXXIX, CC LXXXIX	XIV-XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Austria	Kremsmünster	Stiftsbibliothek	CCCI, CC CCCI	XV-XVI	Latino	Georg von Peurbach	Algorismus de integris
Austria	Kremsmünster	Stiftsbibliothek	CCCI, CC CCCI	XV-XVI	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minuciis
Austria	Lilienfeld	Stiftsbibliothek	144	XIII	Latino	Sacrobosco	Tractatus de algorismo
Austria	Melk	Stiftsbibliothek	873	XIV	Latino	Sacrobosco	Tractatus de arte calculandi seu Algorismus
Austria	Melk	Stiftsbibliothek	951	XIV	Latino	Sacrobosco	Arithmetica
Austria	Melk	Stiftsbibliothek	1221	1438	Latino	Sacrobosco	Tractatus de Algorismo seu arte numerandi
Austria	Salzburg	Stiftsbibliothek Sankt Peter	T IV 36	XV	Latino	Georg von Peurbach	Algorismus
Austria	Salzburg	Stiftsbibliothek Sankt Peter	b III 32	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus vulgaris
Austria	Salzburg	Stiftsbibliothek Sankt Peter	b IX 14	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Austria	Salzburg	Stiftsbibliothek Sankt Peter	b IV 16	XV	Latino	Sacrobosco	Algorithmus integrorum

Austria	Salzburg	Stiftsbibliothek Sankt Peter	b II 42	XV-XVI	Latino	Prosdocimus de Beldomandis	De ratione componendi tabulam calculatorium
Austria	St. Florian	Stiftsbibliothek	XI.619	1447	Latino	Fridericus Gerhart	Algorismus Ratisbonensis
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	2445	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	2445	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorithmus
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	5239*	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorithmus explicatus
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	3816	XV	Latino	Johannes de Werdea	Algorismus
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	5153	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	5166	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	2367	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	3502	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus latinus cum commentario
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	5003	XV	Latino	Sacrobosco	Tractatus de algorismo
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	5203	XV	Latino		Algorithmus demonstratus
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	5210	XV	Latino	Sacrobosco	Tractatus de algorithmo
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	Ser. n. 4265	1518	Latino	Georg von Peurbach	Institutiones in Arithmetica

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	4767	XVI	Latino	Sacrobosco	tractatus de arithmetica
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	4787	XVI	Latino		Algorithmi Enchiridion de integris et fractis
Austria	Wien	Österreichische Nationalbibliothek	5277	XVI	Latino		Algorithmus de surdis quadratorum
Austria	Wien	Schottenkloster	138	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Austria	Wien	Schottenkloster	225	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Austria	Wilhering	Stiftsbibliothek	IX.69	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Austria	Zwettl	Stiftsbibliothek	139	XIV	Latino	Sacrobosco	Tractatus arithmeticus
Belgio	Brugge	Stedelijke Openbare Bibliotheek	523	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Belgio	Brugge	Stedelijke Openbare Bibliotheek	530	XIV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutiis
Belgio	Brugge	Stedelijke Openbare Bibliotheek	530	XIV	Latino	Nicolaus Oresmius	Algorismus proportionum
Belgio	Brugge	Stedelijke Openbare Bibliotheek	521	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Belgio	Brugge	Stedelijke Openbare Bibliotheek	522	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Belgio	Bruxelles	Bibliothèque Royale	2910-2920	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Belgio	Bruxelles	Bibliothèque Royale	905-918	XIV	Latino	Villedieu	Algorismus
Belgio	Bruxelles	Bibliothèque Royale	10118	XIV-XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Belgio	Bruxelles	Bibliothèque Royale	10117-10126	XIV-XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus

Belgio	Bruxelles	Bibliothèque Royale	1022-1047	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutis
Belgio	Bruxelles	Bibliothèque Royale	1022-1047	XV	Latino	Nicolaus Oresmius	Algorismus proportionum
Belgio	Bruxelles	Bibliothèque Royale	1022-1047	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Belgio	Bruxelles	Bibliothèque Royale	10457-62	1445	Francese	Jean de Stavelot	Algorismus
Belgio	Tournai	Bibliothèque de la Ville	Ville Cod. 87	1268	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Danimarca	København	Kongelige Bibliotek	Nv kgl. S. 275 ^{Aa} 4 ^{to}	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus vulgaris
Danimarca	København	Kongelige Bibliotek	Nv kgl. S. 1723	XIII-XIV	Latino	Jordanus Nemorarius	Algorismus
Danimarca	København	Kongelige Bibliotek	Gl. kgl. S. 1810 4 ^{to}	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus prosaicus
Danimarca	København	Kongelige Bibliotek	Thott 825 4 ^{to}	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Danimarca	København	Universitet Amanger	AM 544, 4	XIV	Islandese		Hauks Buch
Danimarca	København	Universitet Amanger	AM 685 d, 4	XIV	Islandese		Algorismus
Danimarca	København	Universitet Amanger	AM 736 III, 4	XV	Islandese		Algorismus
Danimarca	København	Universitet Amanger	AM 252, 2	XVI-XVII	Islandese		Algorismus
Francia	Alençon	Bibliothèque Municipale	25	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Amiens	Bibliothèque Municipale	271	XIV	Latino	Bartholomeus de Pisis	Summa de casibus (con aggiunta sulle nove figure)
Francia	Arras	Bibliothèque Municipale	512	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Cambrai	Centre Culturel	A 931	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Francia	Cambrai	Centre Culturel	B 922	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutiis vulgaribus et phisicis
Francia	Colmar	Bibliothèque Municipale	365	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Colmar	Bibliothèque Municipale	22	1339	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Colmar	Bibliothèque Municipale	404	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Metz	Bibliothèque Municipale	1217	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Metz	Bibliothèque Municipale	284	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutiis vulgaribus et phisicis
Francia	Metz	Bibliothèque Municipale	284	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Metz	Bibliothèque Municipale	326	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Montpellier	Bibliothèque de la Faculté de Médecine	323	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque de la Sorbonne	595	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque de la Sorbonne	192	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque de l'Arsenal	1127	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque de l'Arsenal	522	XIV-XV	Latino	Nicolaus Oresmius	Algorismus proportionum

Francia	Paris	Bibliothèque Mazarine	3642	XIII	Latino	Johannes Hispalensis	Liber Algorismi de practica arithmetice
Francia	Paris	Bibliothèque Mazarine	3642	XIII	Latino	Jordanus Nemorarius	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Mazarine	3516	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 15461	XIII	Latino	Johannes Hispalensis	Liber alchorismi de practica arismetice
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 15121	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7416 B.	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 8429 B.	XV	Latino	Villedieu	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7420	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 14809	XIII	Latino	Villedieu	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7420	XIII	Latino	Villedieu	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7366	XIII	Latino	Sacrobosco	Tractatus de algorismo
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7420	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Franc. 2021	XIII	Francese		Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 15129	XIII	Latino		Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	N. A. L. 657	XIII	Latino	Villedieu	Algorismus metrificatus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	N. A. L. 657	XIII	Latino		Algorismus de integris abbreviatus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	N. A. L. 625	1348-50	Latino		Algorismus novus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 15171	XIV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutis
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7368	XIV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutis

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7378 A.	XIV	Latino	Johannes de Lincetiis	Algorismus de minutiis
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7359	XIV	Latino	Johannes Hispalensis	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7368	XIV	Latino	Nicolaus Oresmius	Algorismus proportionum
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Ital. 949	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 15118	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 15122	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7194	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7195	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7196	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7298	XIV	Latino	Sacrobosco	Tractatus de Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7363	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7421	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	N. A. L. 1893	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus de minutiis
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7420 A.	XIV	Latino	Villedieu	Algorismus metricus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7420 A.	XIV	Latino	Sacrobosco	Ars algorismi proiectiva
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7420 A.	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus prosaicus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Franç. Nouv. Acq. 4140	1446	Provenzale		Compendi de l'Art de l'Algorisme
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Franç. Nouv. Acq. 2050	1460	Francese		L'art d'arismetique

Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7287	1449	Francese	Sacrobosco	Traité d'arithmétique
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 10252	1476	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutiis
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 10252	1476	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 10252	1476	Latino		Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 10252	1476	Latino		Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7197	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutiis
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7215	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutiis
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7292	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutiis
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7197	XV	Latino	Nicolaus Oresmius	Algorismus proportionum
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7197	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus (retractatus)
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7352	XV	Francese		Livre d'algorisme
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7437	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7475	XV	Latino	Sacrobosco	Tractatus de algorismo
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 7477	XIV	Latino	Villedieu	Tractatus de algorismo
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 8445	XV	Latino	Villedieu	Algorismus metricus
Francia	Paris	Bibliothèque Nationale	Lat. 8247	XV	Latino	Villedieu	Tractatus de algorismo
Francia	Paris	Bibliothèque Ste. Geneviève	1043	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Paris	Bibliothèque Ste. Geneviève	2200	XIII	Francese		Algorismus

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Francia	Paris	Bibliothèque Ste. Geneviève	3141	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Toulouse	Bibliothèque Municipale	872	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Francia	Valence	Bibliothèque Municipale	13	XV	Latino		Algorismus
Francia	Verdun	Bibliothèque Municipale	25	XIII-XIV	Latino	Sacrobosco	
Galles	Aberystwyth	National Library of Wales	Peniarth 359B	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Augsburg	Staats- und Stadtbibliothek	4° Cod. 55	XIV-XV	Latino		Algorismus
Germania	Augsburg	Staats- und Stadtbibliothek	III. 1. 4° 1	1400-05	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Augsburg	Staats- und Stadtbibliothek	II. 1. 4° 73	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus minutiarum
Germania	Augsburg	Staats- und Stadtbibliothek	8° Cod. 119	XVI	Latino		Algorismus
Germania	Bamberg	Staatsbibliothek	Ms. math. 1	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus (frammento)
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. fol. 610	1276/77	Latino	Sacrobosco	
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. oct. 157	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 560	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 561	XIV	Latino	Sacrobosco	

Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 579	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 898	XIV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 23	XIV-XV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. germ. fol. 1278	XIV-XV	Tedesco	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 577	1418	Latino	Sacrobosco	Algorismus vulgaris
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. fol. 438	1421	Latino	Sacrobosco	
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 587	1446	Latino	Sacrobosco	De radicibus (Algorismus, cap. 9 und 9b)
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 587	1446	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minuciis
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 587	1446	Latino	Ricardus Anglicus	Tractatus de minuciis
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. germ. fol. 59	1488	Tedesco		Algorismus
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. fol. 246	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de Minutijs
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. fol. 600	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minuciis
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ham. 213	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus vulgaris
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. fol. 192	XV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. oct. 267	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 181	XV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 183	XV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 382	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 46	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus de Integris
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 530	XV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 787	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus cum commentario
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. lat. qu. 926	XV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. theol. oct. 111	XV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Berlino	Staatsbibliothek	Ms. germ. fol. 642	XV	Latino	Villedieu	
Germania	Darmstadt	Hessische Landes- und Hochschulbibliothek	2661	XIII	Latino	Sacrobosco	
Germania	Darmstadt	Hessische Landes- und Hochschulbibliothek	1227	XIV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Darmstadt	Hessische Landes- und Hochschulbibliothek	2827	XIV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Darmstadt	Hessische Landes- und Hochschulbibliothek	1415	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus (frammento)
Germania	Darmstadt	Hessische Landes- und Hochschulbibliothek	2769	XV	Latino	Sacrobosco	

Germania	Dessau	Stadtbibliothek	Georg Hs. 866	XV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Donaueschingen	Fürstlich Fürstenbergische Hofbibliothek	Ms. 857	XIV	Latino		Algorismus, sive tractatus de numeris integris fractis
Germania	Dresden	Sächsische Landesbibliothek	C 80	XV	Latino		Minuciarum algorithmus
Germania	Dresden	Sächsische Landesbibliothek	C 80	XV	Latino		Algorithmi vari
Germania	Eichstätt	Universitätsbibliothek	Hs. 626 (Staat)	XIV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Eichstätt	Universitätsbibliothek	Hs. 626 (Staat)	XIV	Latino	Sacrobosco	
Germania	Eichstätt	Universitätsbibliothek	Hs. 626 (Staat)	XIV	Latino	Villedieu	
Germania	Eichstätt	Universitätsbibliothek	Hs. 735 (Staat)	1415	Latino	Villedieu	
Germania	Eichstätt	Universitätsbibliothek	Hs. 735 (Staat)	1416	Latino	Sacrobosco	
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Oct. 88	XIII	Latino	Sacrobosco	Quaedam de algorismo
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Oct. 88	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 357	XIII-XIV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutis
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 365	XIII-XIV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutis
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Duodez 19	XIII-XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 351	XIII-XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 345	1305	Latino	Villedieu	Algorismus metricus

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 345	1305	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 369	1325	Latino	Petrus Philomenus de Dacia	Expositio algorismi
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 369	1325	Latino	Sacrobosco	Algorismus de fractionibus
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 369	1325	Latino	Ricardus Anglicus	Algorismus minuciarum vulgarum
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Oct. 80	1340	Latino	Villedieu	Algorismus metricus
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Oct. 80	1340	Latino	Sacrobosco	Algorismus integrorum
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 387	1365	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 325	XIV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minuciis
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 234	XIV	Latino	Petrus Philomenus de Dacia	Algorismus de integris
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Fol. 394	XIV	Latino	sacrobosco	Algorismus
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Duodez 16	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 347	1411	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 385	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutis

Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Duodez 19	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Fol. 376	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 375	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismi
Germania	Erfurt	Wissenschaftliche Allgemeinbibliothek	Ampl. Quart. 65	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus integrorum
Germania	Erlangen	Universitätsbibliothek	436	XIII-XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Erlangen	Universitätsbibliothek	436	XIII-XIV	Latino	Villedieu	Algorismus
Germania	Erlangen	Universitätsbibliothek	394	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Erlangen	Universitätsbibliothek	664	1439	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Erlangen	Universitätsbibliothek	496	1457	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Frankfurt	Universitätsbibliothek	Carm. 19	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Freiburg	Universitätsbibliothek	57	1409	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutiis
Germania	Freiburg	Universitätsbibliothek	57	1409	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Goslar	Stadtarchiv	14 (fragmento)	XIV	Latino	Sacrobosco	(t)ransferatur digitus
Germania	Gotha	Forschungs- und Landesbibliothek	Chart. B 445	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Göttingen	Niedersächsische Staats- und Universitätsbibl.	2 ^{vo} Philos. 30	XVI	Latino	Jordanus Memorarius	Algorithmus de datis
Germania	Göttingen	Niedersächsische Staats- und Universitätsbibl.	2 ^{vo} Luneb. 1	XV-XVI	Latino	Sacrobosco	Algorismus

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Germania	Hannover	Niedersächsische Landesbibliothek	IV. 373	XIII	Latino		De arithmetica libellus, dictus Algorismus
Germania	Heidelberg	Universitätsbibliothek	Sal. Msc. Schr. IX N ^o . 23	XIII-XIV	Latino		Algorithmi liber
Germania	Heidelberg	Universitätsbibliothek	Pal. germ. 691	XV	Latino		Algorismus
Germania	Heidelberg	Universitätsbibliothek	Pal. germ. 843	XV	Latino		Algorithmi latini in lineis
Germania	Leiden	Bibliothek der Rijksuniversiteit	B.P.L. 191 D	XIV-XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1469	XIV-XV	Latino	Nicolaus Oresmius	Tractatus algorismi proportionum
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 328	XIII	Latino		Algorismus
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1486	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1461	1440	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutiis
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1470	1486	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1487	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1470	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorithmus minuciarum
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1470	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus in versu
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1470	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorithmus de minutiis
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1470	XV	Latino		Algorithmus minuciarum vulgatum tantum incipit
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1470	XV	Latino		Algorismus de applicatis
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1470	XV	Latino	Sacrobosco	Tractatus arithmeticus

Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1470	XV	Latino		Algorithmus de datis
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1470	XV	Latino		Algorithmus de duplici differencia
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1470	XV	Latino		Algorithmus mirabili ingenio
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1470	XV	Latino		Algorithmus de probis
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1470	XV	Latino	Villedieu	Algorithmus incipit metricus
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1346	XV	Latino	Soloneus	Algorismus
Germania	Leipzig	Universitätsbibliothek	Cod. 1296	XV-XVI	Latino		Algorithmus integrorum cum probis annexis
Germania	Lübeck	Stadtbibliothek	Ms. philos. 11	1424	Latino	Sacrobosco	Algorismus vulgaris
Germania	Lüneburg	Ratsbücherei Lüneburg	Misc. D 2° 13	1389	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutis vulgaribus et physicis
Germania	Lüneburg	Ratsbücherei Lüneburg	Misc. D 2° 13	1389	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Lüneburg	Ratsbücherei Lüneburg	Misc. D 4° 46	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Mainz	Stadtbibliothek	I 528	1410	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Mainz	Stadtbibliothek	I 532	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Mainz	Stadtbibliothek	I 535	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Mainz	Stadtbibliothek	I 471 a	XV	Latino		Algorismus
Germania	Michelstadt	Kirchenbibliothek	D 692 o D 692 / XV 3	1452	Latino	Sacrobosco	
Germania	Michelstadt	Kirchenbibliothek	D 692 o D 692 / XV 3	1452	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 17703	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 29760	XII-XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14706	1378	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14684	XIV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus minutiarum
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14401	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14684	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 3216	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 3843	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 4382	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 5538	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 7650	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 4162	XIV	Tedesco		Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 588	XIV	Latino		Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 19867	XIV-XV	Latino	Georg von Peurbach	Algorismus de minutiis

Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 19867	XIV-XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 19869	XIV-XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 11067	1445	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutiis
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 11067	1445	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 19608	1448	Latino	Johannes Keck	Algorismus de minutiis
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14783	1450	Latino	Fridericus Gerhart	Arithmetica
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 19608	1448	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 18780	1474	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Cgm. 739	XV	Latino	Johannes Keck	Algorismus de minutiis
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 19606	XV	Latino	Johannes Keck	Algorismus minutiarum
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 19638	XV	Latino	Johannes Keck	Algorismus de minutiis
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14908	XV	Latino	Nicolaus Oresmius	Algorismus proportionum
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 6006	XV	Latino	Nicolaus Oresmius	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Cgm. 739	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 10273	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 12553	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 13182	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14529	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14544	XV	Latino	Fridericus Gerhart	Algorismus Ratisbonensis
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14622	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus cum commentario
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14622	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus cum commentario
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 21107	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 5964	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 5964	XV	Latino	Fridericus Gerhart	Algorismus Ratisbonensis
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 7089	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 7614	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14504	XV	Latino		Algorismus

Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 21108	XV	Latino		Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 26291	XV	Latino		Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 4387	XV	Latino		Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 6038	XV	Latino		Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 7088	XV	Latino		Sacrobosco
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 7675	XV	Latino		Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 7688	XV	Latino		Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14111	XV	Tedesco		Algorismus de minuciis
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 14111	XV	Latino	Fridericus Gerhart	Algorismus Ratisbonensis
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Cgm. 821	1500-07	Latino	Adamus Werner de Themar	Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Cgm. 821	1500-07	Latino	Georg von Peurbach	Algorismus de integris
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 26639	XVI	Latino		Algorismus (de integris)
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 26640	XVI	Latino		Algorismus
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 18998	XV-XVI	Latino		Algorismus

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Germania	München	Bayerische Staatsbibliothek	Lat. 27444	XV-XVI	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Universitätsbibliothek	4 ^{vo} Cod. ms. 649	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	München	Universitätsbibliothek	4 ^{vo} Cod. ms. 743	XVI	Latino	Georg von Peurbach	Algorithmus
Germania	Nürnberg	Stadtbibliothek	Cent. V. 94	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Regensburg	Bischöfliche Zentralbibliothek, Musikbibliothek Proske	TH 98	XV	Latino	Fridericus Gerhart	Algorismus Ratisbonensis
Germania	Regensburg	Fürstlich Thurn und Taxis'sche Hofbibliothek	Cod. 85/1	XV	Latino	Georg von Peurbach	Algorismus: pars prima
Germania	Regensburg	Fürstlich Thurn und Taxis'sche Hofbibliothek	Cod. 85/2	XV	Latino	Georg von Peurbach	Algorismus: pars secunda
Germania	Stuttgart	Württembergische Landesbibliothek	HB XI 22	XV	Tedesco		Algorithmus deutsch
Germania	Trier	Stadtbibliothek	Ms. 8 ^{vo} 1077/1262	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Trier	Stadtbibliothek	Ms. 8 ^{vo} 1925/1482	XIV	Latino	sacrobosco	Algorismus
Germania	Trier	Stadtbibliothek	Ms. 8 ^{vo} 1077/1263	XIV	Latino	Villedieu	Algorismus
Germania	Trier	Stadtbibliothek	Ms. 8 ^{vo} 1074/1271	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus

Germania	Weimar	Bibliothek der Nationalen Gedenkstätten	Q 36	1420	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Wiesbaden	Nassauische Landesbibliothek	Ms. 79	XVI	Latino		Algorismus
Germania	Windsheim	Stadtbibliothek	105	1424	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	Cod. Guelf. 51. 9. Aug. quart	XIV	Latino	Villedieu	Algorismus
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	Cod. Guelf. 793. Novorum.	1455	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	16.1 Astronom. 4 ^{vo}	1486	Latino	Johannes Cuspianus	Algorismus
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	16.1 Astronom. 4 ^{vo}	1486	Latino	Sacrobosco	De radicū extractione et quaedam alia ad arith. spectantia
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	16.1 Astronom. 4 ^{vo}	1486	Latino	Villedieu	Carmen de algorismo
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	Cod. Guelf. 17.21. Aug. quart.	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minuciis
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	15	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	Cod. Guelf. 1198. Helmst.	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	Cod. Guelf. 696. Helmst.	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNATURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	Cod. Guelf. 78. 3. Aug. fol.	XV	Latino	Sacrobosco	Algi Algorismus de integris
Germania	Wolfenbüttel	Herzog August Bibliothek	Cod. Guelf. 874. Helmst.	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Germania	Zittau	Stadtbibliothek	B 101	XV	Latino	Georg von Peurbach	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	Corpus Christi College	37	XIV	Latino	Villedieu	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	Corpus Christi College	133	XIV	Latino		Algorismus
Inghilterra	Cambridge	Fitzwilliam Museum	McClean 166	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	Gonville and Caius College	537	XIII	Latino	Villedieu	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	Gonville and Caius College	605	XIII	Latino	Villedieu	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	Gonville and Caius College	635	XIII	Latino	Villedieu	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	Gonville and Caius College	411	1306	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	Magdalene College	Pepys 2329	XV	Latino	Jordanus Nemorarius	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	Magdalene College	Pepys 2329	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Inghilterra	Cambridge	Peterhouse College	277	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minuciis
Inghilterra	Cambridge	Peterhouse College	277	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Inghilterra	Cambridge	Peterhouse College	184	XV	Latino	Villedieu	Algorismus

Inghilterra	Cambridge	Trinity College	O.2.45	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	Trinity College	O.3.44	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	Trinity College	R.2.86	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	University Library	Ii. III. 3	1276	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	University Library	Addit. 6866	XIV	Latino	Jordanus Nemorarius	Algorismus Demonstratus
Inghilterra	Cambridge	University Library	Addit. 6860	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	University Library	Ii. I. 17	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Cambridge	University Library	Ii. II. 15	XIV	Latino		Algorithmus in Metro
Inghilterra	Cambridge	University Library	Ee. III. 61	XV	Latino	Johannes Kyllingworth	Algorismus
Inghilterra	Gloucester	Cathedral Library	28	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Lincoln	Cathedral Chapter Library	B.1.8	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Arundel 343	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Arundel 343	XIII	Latino	Sacrobosco	Johannis de Sacrobosco Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Add. 27589	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Harley 1350	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Harley 3647	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Harley 4350	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Add. 31046	XIII	Latino	Villedieu	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Arundel 332	XIII	Latino		De Algorismo Tractatus
Inghilterra	London	British Museum	Eg. 2261	XIII	Latino		

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Inghilterra	London	British Museum	Eg. 845	XIII	Latino		Tractatus arithmeticus
Inghilterra	London	British Museum	Eg. 3130	XIII-XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Add. 30380	XIII-XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Harley 3735	XIV	Latino	Ricardus Anglicus	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Harley 3353	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Royal 12 C XVII	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Add. 35179	XIV	Latino		Arabic numerals
Inghilterra	London	British Museum	Sloane 514	XIV	Latino		De Algorismo
Inghilterra	London	British Museum	Cotton Vespasianus E. VII.	XIV	Latino	Johannes Somur	Algorithmus et calendarium
Inghilterra	London	British Museum	Addit. 15108	1426-30	Latino	Sacrobosco	Algorismus prosaicus
Inghilterra	London	British Museum	Addit. 15108	1426-31	Latino	Villedieu	Algorismus metricus
Inghilterra	London	British Museum	Eg. 851	XV	Latino	Villedieu	Carmen de Algorismo cum commentario
Inghilterra	London	British Museum	Egerton 841	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus de minutiis
Inghilterra	London	British Museum	Egerton 844	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus de minutiis
Inghilterra	London	British Museum	Sloane 513	XV	Latino	Ricardus Dove	Algorismus cum commento
Inghilterra	London	British Museum	Eg. 2622	XV	Latino	Villedieu	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Add. 17716	XV	Latino	Villedieu	Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Add. 10363	XV	Italiano		Trattato di aritmetica
Inghilterra	London	British Museum	Eg. 2622	XV	Latino		

Inghilterra	London	British Museum	Harley 3843	XV	Latino		Algorismus
Inghilterra	London	British Museum	Sloane 282	XV	Latino		De algorismo
Inghilterra	London	British Museum	Sloane 3281	XV	Latino	Sacrobosco	Noticie algorismi
Inghilterra	London	British Museum	Sloane 513	XV	Latino	Ricardus Dove	Quaestiones et problemata arithmetica
Inghilterra	London	British Museum	Sloane 513	XV	Latino		De figuris et usu numerorum Arabicorum
Inghilterra	London	British Museum	Eg. 836	XVI	Francese		Traité d'arithmétique
Inghilterra	London	British Museum	Royal 12 C XVII	XIV	Latino	Ricardus Anglicus	Tractatus de minuiciis philosophicis
Inghilterra	London	Institution of Electrical Engineers	Thompson 4	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	University College	Lat. 4	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	University College	Lat. 15	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	London	University College	Graves 18	XV-XVI	Latino		Algorismus Novus de integris
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Savile 21	XIII	Latino	Jordanus Nemorarius	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Digby 166	XIII	Latino	Petrus Philomenus de Dacia	Expositio super algorismus prosaicum
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Ashmole 341	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Ashmole 399	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Canon. misc. 105	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Canon. misc. 161	XIII	Latino	Sacrobosco	De Algorismo libellus

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Digby 104	XIII	Latino	Villedieu	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Bodley 26	XIII-XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Douce 257	1381	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Digby 97	1395	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus minutiarum
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Digby 97	1395	Latino	Robertus Grosseteste	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Digby 97	1395	Latino		Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Digby 190	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Bodley 491	XIV	Latino	Petrus Philomenus de Dacia	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Add. C. 93	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Ashmole 1522	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Ashmole 360	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Ashmole 361	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Bodley 177	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Auct. F. 5. 23.	XIV	Latino		Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Digby 193	XIV	Latino	Sacrobosco	Expositio numerorum
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Digby 190	XIV	Latino	Villedieu	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Bodley 177	XIV	Latino	Villedieu	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Douce 129	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Savile 17	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	B.6.4	XV	Latino	Villedieu	Algorismus

Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Bodley 507	XV	Latino	Villedieu	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	4° D. 21 Jur.	XVI	Latino	Villedieu	Algorismus
Inghilterra	Oxford	Bodleian Library	Tanner 192	XIV	Latino		Tractatus minuciarum vulgarium
Inghilterra	Oxford	Corpus Christi College	41	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Oxford	University College	41	XIV	Latino	Sacrobosco	Libellus de Algorismo
Inghilterra	Oxford	University College	26	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Inghilterra	Worcester	Cathedral Library	Q. 53	XIV-XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Irlanda	Dublin	Trinity College Library	F.5. 3	XV	Latino		Algorismus
Italia	Bologna	Bibl. Conservatorio «G.B.Martini»	A 56	XV	Latino	Prosdocimus de Beldomandis	Algorismus de integris sive pratica arismetrice de integris
Italia	Bologna	Biblioteca Universitaria	154; 132	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Bologna	Biblioteca Universitaria	164; 153	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Catania	Biblioteche Riunite «Civica e A. Ursino-Rec.»	Cod. D. 39 Fondo Ursino-Recupero	XV	Latino	Villedieu	Algorismus
Italia	Cesena	Biblioteca Malatestiana	S.XXVI.6	XV	Francese		Traité de la pratique de l'algorithme
Italia	Cesena	Biblioteca Malatestiana	S.XXVI.6	XV	Francese	Barthélemy de Romans et Mathieu Préhoude	Compendy de la pratique des nombres
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.5335	1273	Latino	Sacrobosco	Algorismus, seu ars numerandi

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.3114	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.4385	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.4385	XIII	Latino	Villedieu	Algorismus metricus
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Cod. 1428	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus vulgaris
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Cod. 507	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.3127	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Cod. 1399	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.3113	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.3124	XIV	Latino	Villedieu	Algorismus in versu
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.1108	XIV-XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus vulgaris
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.4082	1401	Latino	Nicolaus Oresmius	Algorismus proportionum
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.4826	XV	Italiano	Jacopo da Firenze	Tractatus algorismi
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.4087	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus Prosaicus

Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.4087	XV	Latino	Villedieu	Algorismus metricus
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.3902	XVI	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	Biblioteca Apostolica Vaticana	Vat.lat.6431	XVI	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	Codices Palatini Latini	Pal. Lat. 1356	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	Codices Palatini Latini	Pal. Lat. 1377	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	Codices Palatini Latini	Pal. Lat. 1353	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	Codices Palatini Latini	Pal. Lat. 1381	XIV-XV	Latino		Algorismus
Italia	Città del Vaticano	Codices Palatini Latini	Pal. Lat. 1376	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutis vulgaribus et physicis
Italia	Città del Vaticano	Codices Palatini Latini	Pal. Lat. 1389	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutis
Italia	Città del Vaticano	Codices Palatini Latini	Pal. Lat. 1383	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus proscitus (?) de integris
Italia	Città del Vaticano	O	Cod. 309	XIII-XIV	Latino	Jordanus Nemorarius	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	O	Cod. 309	XIII-XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	O	Cod. 1809	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	O	Cod. 1430	XIV-XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Italia	Città del Vaticano	O	Cod. 1507	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Città del Vaticano	O	Cod. 1675	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Firenze	Biblioteca Medicea Laurenziana	Cod. Ash. 956	XV	Italiano		Tractatu di regula di quantitati
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale Centrale	Convent. soppr. J. I. 32	XIII	Latino	Jordanus Nemorarius	Algorismus
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale Centrale	Cod. Palat. 639, Fondo Palatino	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale Centrale	Convent. soppr. J. V. 18	XIV	Latino	Jordanus Nemorarius	Algorismus
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale Centrale	Cod. Magl. Cl. XI, 73	XIV	Italiano	Magistro a Florentia	
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale Centrale	Cod. II, III, 24, Fondo Principale	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale Centrale	Convent. soppr. J. V. 19	XIV	Latino		
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale Centrale	Convent. soppr. J. IX. 42	1500	Latino	Nicolaus Oresmius	Algorismus proportionum
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale Centrale	Cod. Palat. 1162, Fondo Palatino	1513	Italiano	Pseudo-Jacopo da Firenze	Tractatus algorismi

Italia	Firenze	Biblioteca Riccardiana	Cod. 2236	1307	Italiano	Jacopo da Firenze	Tractatus algorismi
Italia	Firenze	Biblioteca Riccardiana	Cod. 866	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Firenze	Biblioteca Riccardiana	Cod. 866	XIV	Latino	Villedieu	Algorismus
Italia	Firenze	Biblioteca Riccardiana	Cod. 2265	1490	Italiano	Raffaello di Giovanni Canacci	Ragionamenti d'algebra
Italia	Milano	Biblioteca Ambrosiana	B 163 Sup	1358	Latino	Villedieu	De algorismo, tractatus de metrico sermone
Italia	Milano	Biblioteca Ambrosiana	M 28 Sup.	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Milano	Biblioteca Ambrosiana	N 9 Sup.	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Milano	Biblioteca Ambrosiana	C 241 Inf.	1401	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus de minutiis
Italia	Milano	Biblioteca Ambrosiana	C 241 Inf.	1401	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Italia	Milano	Biblioteca Ambrosiana	H 44 Inf.	XVI	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus minuciarum (frammento)
Italia	Milano	Biblioteca Ambrosiana	A 183 Inf.	XVI	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Milano	Biblioteca Nazionale Braidense	AD. 12. 53	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorithmus. Sive ars supputandi
Italia	Nola?	Collezione privata		1478	Italiano		Algorismus
Italia	Torino	Biblioteca Nazionale	N. III. 53	XV	Italiano		Arte giamata arismeticha
Italia	Venezia	Biblioteca Nazionale Marciana	Marc.lat.VIII 1	XIII	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Italia	Venezia	Biblioteca Nazionale Marciana	Marc.lat.XIII 35	XIV	Latino	Villedieu	Algorismus
Italia	Venezia	Biblioteca Nazionale Marciana	Marc.lat.VIII 33	XV	Latino		Algorismus

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	AUTORE	TITOLO
Italia	Venezia	Biblioteca Nazionale Marciana	Marc.lat.VIII 74	XV	Latino		Algorismus
Italia	Venezia	Museo Civico Correr	Cicogna 3747	XV	Latino	Prosdocimus de Beldomandis	Inveni in pluribus libris
Italia	Venezia	Museo Civico Correr	Cicogna 3747	XV	Latino	Prosdocimus de Beldomandis	Quoniam operantibus circa artem calculatoriam
Olanda	Amsterdam	Bibliotheek der Universiteit	I H 40	XV	Latino	Johannes de Lineriis	Algorismus
Olanda	Groningen	Universitätsbibliothek	Cod. 104	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Olanda	Sint Agatha Cuyk	Klosterbibliothek	Cuik C 14	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Olanda	Sint Agatha Cuyk	Klosterbibliothek	Cuik C 14	XV	Latino		Algorismus
Olanda	Utrecht	Bibliotheek der Rijksuniversiteit	Cod. 722	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Olanda	Utrecht	Bibliotheek der Rijksuniversiteit	Cod. 725	XV	Latino	Nicolaus Oresmius	Algorithmus proportionum
Olanda	Utrecht	Bibliotheek der Rijksuniversiteit	Cod. 292	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Olanda	Utrecht	Bibliotheek der Rijksuniversiteit	Cod. 824	XV	Latino		Algorismus
Polonia	Gdansk	Biblioteka Polskiej Akademii Nauk	Mar.Q30	1422	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Polonia	Kraków	Biblioteka Jagiellonska	562	1385	Latino	Jacobus Styer	Algorismus
Polonia	Kraków	Biblioteka Jagiellonska	1860	XIV-XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus

Polonia	Kraków	Biblioteka Jagiellonska	2503	1428	Latino	Johannes Galandria	Incipit se Algorismus.
Polonia	Kraków	Biblioteka Jagiellonska	602	1428	Latino		
Polonia	Kraków	Biblioteka Jagiellonska	1838	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Polonia	Kraków	Biblioteka Jagiellonska	1851	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Polonia	Kraków	Biblioteka Jagiellonska	1840	XV-XVI	Latino	Georg von Peurbach	Algorismus novus de integris
Polonia	Kraków	Biblioteka Jagiellonska	1840	XV-XVI	Latino	Georg von Peurbach	Algorismus novus de integris
Polonia	Warszawa	Biblioteka Narodowa	5; 30	XV	Latino	Christianus de Prachaticz	Algorismus
Polonia	Wrocław	Biblioteka Uniwersytecka	IVQ 36	XV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Polonia	Wrocław	Biblioteka Uniwersytecka	IVQ 37	XV	Latino		Algorismus
Polonia	Wrocław	Biblioteka Uniwersytecka	IQ 14	XVI	Latino	Georg von Peurbach	Opus algorithmi iocundissium magistri Georgii Purbachi de Vienna
Rep. Ceca	Praga	Knihovna Metropolitní Kapituli	M.CIV.(1464)	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Rep. Ceca	Praga	Univer. Státní Knihovna	I.G.40.(316)	1383	Latino	Sacrobosco	Algorismus de integris
Rep. Ceca	Praga	Univer. Státní Knihovna	XIV.F.1.(2572)	1379-1396	Latino	Sacrobosco	Algorismus
Rep. Ceca	Praga	Univer. Státní Knihovna	IV.G.8.(740)	XIV	Latino	Sacrobosco	Compendium Algorismi prosaici de integris
Rep. Ceca	Praga	Univer. Státní Knihovna	XIV.E.32.(2566)	XIV	Latino	Sacrobosco	Algorismus

ALLEGATO 3.

CENSIMENTO DEI MANOSCRITTI
DI ALGEBRA IN VOLGARE

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNAURA	DATAZIONE	LINGUA	ORIGINE	AUTORE	TITOLO
Francia	Parigi	Bibliothèque Nationale	Ms. Heb. 1029		Ebraico		Magister Dardi e Mordecai Finzi	
Italia	Firenze	Biblioteca Mediceo-laurenziana	Plut.30,26	1370	Toscano		Giovanni de' Danti da Arezzo	Tractato dell'algorismo
Italia	Firenze	Biblioteca Mediceo-laurenziana	Plut.30,26	1370	Toscano			Per regola dell'argibra e per muodo de propositione
Italia	Firenze	Biblioteca Mediceo-laurenziana	Ash. 1199		Toscano		Magister Dardi	Aliaabra argibra
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Magl. Cl. XI.87	1328	Toscano	Montpellier	Paolo Gerardi	Libro di ragioni
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Magl. Cl. XI.87	1328	Toscano	Montpellier		Le regole della cosa
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Fond. Prin. II.III.198	1390	Toscano	Firenze		Libro d'insegnare arismeticha
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Fond. Prin. II.III.198	1390	Toscano	Firenze		Delle regole delle cose
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Fond. Prin. II.III.198	1390	Toscano	Firenze		Liber de algiebra e almuchabila
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Fond. Prin. II.V.152	1390	Toscano			Tratato sopra l'arte dell'arismetica

Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Fond. Prin. II.V.152	1390	Toscana				[problemi]
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Fond. Prin. II.V.152	1390	Toscana				[calcolo]
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Fond. Prin. II.V.152	1390	Toscana				Le reghole della cosa
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Fond. Prin. II.V.152	1390	Toscana				[problemi]
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Conv. Sopp. G.7.1137	1395	Toscana				Libro delle ragioni d'abaco
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Conv. Sopp. G.7.1137	1395	Toscana				[algebra]
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Conv. Sopp. G.7.1137	1395	Toscana				Reghole dell'alcibra mochaibile
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Magl. Cl.XI.120	1400	Toscana				[Capitoli]
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Magl. Cl.XI.120	1401	Toscana			Antonio da Firenze	Regole del arzibra
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Magl. Cl.XI.120	1402	Toscana				[Algebra]
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Pal.573	1460	Toscana				Trattato di pratica d'arismetricha

STATO	CITTÀ	BIBLIOTECA	SEGNATURA	DATAZIONE	LINGUA	ORIGINE	AUTORE	TITOLO
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Pal.573	1460	Toscano			El secondo capitolo
Italia	Firenze	Biblioteca Nazionale	Pal.573	1460	Toscano		Antonio da Firenze	Ragioni absolute
Italia	Firenze	Biblioteca Riccardiana	Ricc. 2252	1350	Toscano			Tractato dell'arismetricha
Italia	Firenze	Biblioteca Riccardiana	Ricc. 2252	1351	Toscano			Regole dell'algebre
Italia	Firenze	Biblioteca Riccardiana	Ricc. 2263	1365	Toscano			Trattato dell'alibra amuchabile
Italia	Firenze	Biblioteca Riccardiana	Ricc. 2252	1400	Toscano			Regole dell'algebre
Italia	Lucca	Biblioteca Statale	Ms. 1754	1330	Toscano			Libro di molte ragioni d'abaco
Italia	Lucca	Biblioteca Statale	Ms. 1754	1330	Toscano			Reghola della chosa
Italia	Lucca	Biblioteca Statale	Ms. 1754	1330	Toscano			Delle radici
Italia	Lucca	Biblioteca Statale	Ms. 1754	1331	Toscano			Algebra
Italia	Modena	Biblioteca Estense Universitaria	Camp. App.1537	1420			Francesco di Cortisi	Libro d'abacho
Italia	Modena	Biblioteca Estense Universitaria	Camp. App.1537	1421		Brescia		
Italia	Modena	Biblioteca Estense Universitaria	α .G.7.27	1485	Veneziano?			L'agibra
Italia	Modena	Biblioteca Estense Universitaria	Camp. App.1537	1446-1447			Altovita da Firenze	
Italia	Modena	Biblioteca Estense Universitaria	α .W.2.24	XVI	Toscano		Bastiano da Pisa	Tratato d'arismeticha pratica

Italia	Roma	Biblioteca Apostolica	Chigi M.VIII.170	1395	Veneziano		Magister Dardi	Aliaabra argibra
Italia	Roma	Biblioteca Apostolica	Ott. Lat.3307	1465	Toscano			Trattato di pratica d'arismetrica
Italia	Siena	Biblioteca Comunale	L.IX.28	1384	Toscano		Gilio	Aritmetica e Geometria
Italia	Siena	Biblioteca Comunale	L.IX.28	1384	Toscano			Trattato delle radici
Italia	Siena	Biblioteca Comunale	L.IX.28	1384	Toscano			Regole della cosa
Italia	Siena	Biblioteca Comunale	L.IV.21	1458	Toscano	Firenze	Benedetto da Firenze	Trattato di pratica d'arismetricha
Italia	Siena	Biblioteca Comunale	L.IV.21	1463	Toscano	Firenze	Biagio	Chasi esemplari
Italia	Siena	Biblioteca Comunale	L.IV.21	1463	Toscano	Firenze	Antonio da Firenze	Chasi scritti
Italia	Siena	Biblioteca Comunale	I.VII.17		Toscano		Magister Dardi	Aliaabra argibra
USA	New York	D.E. Smith Mathematical Library; Columbia University	27	1564	Veneziano			Libro de la adequation de li sei capituli, et altri tratti da quelli de Algebra Almuchabala

ALLEGATO 4.

TESTO IN FORMA SIMBOLICA
DEI 96 PROBLEMI DI ALGEBRA
DEL LIBER ABACI

NUMERO	EQUAZIONE CORRISPONDENTE	TIPOLOGIA	Fonte
1	$x(10 - x) = \frac{x^2}{4}$	10	Al-Khawarizmi (primo dei sei problemi)
2	$\frac{x^2}{x(10 - x)} = 1 + \frac{1}{2}$	10	Abu Kamil (n.1)
3	$\left(2 + \frac{7}{9}\right)x^2 = 100$	M	Al-Khawarizmi (secondo dei sei problemi)
4	$\frac{10 - x}{x} = 2 + \frac{1}{3}$	10	
5	$27(12 - x) = x^2$	12	
6	$\left(\frac{2}{3}x + 1\right)\left(\frac{3}{4}x + 1\right) = 73$	M	
7	$x^2 + (10 - x)^2 = 62 + \frac{1}{2}$	10	
8	$(10 - x)^2 - x^2 = 50$	10	
9	$\frac{x}{10 - x} + \frac{10 - x}{x} = 3 + \frac{1}{3}$	10	
10	$\frac{1}{3}\left(\frac{6x}{10 - x}\right) + 6x = 39$	10	
11	$\frac{60}{x} = \frac{60}{x + 2} + 2 + \frac{1}{2}$	D	
12	$\frac{20}{x} = \frac{30}{x + 2} + 4$	D	
13	$\frac{20}{x} = \frac{60}{x + 2} - 5$	D	
14	$\frac{60}{x} = \frac{20}{x + 3} + 26$	D	Abu Kamil (n.13)

NUMERO	EQUAZIONE CORRISPONDENTE	TIPOLOGIA	FORTE
15	$\frac{10}{x} = \frac{40}{x+6}$	D	Abu Kamil (n.15)
16	$x^2 = 32(10-x)$	10	
17	$\begin{cases} ax = 36 \\ (a+3)(10-x) = 36 \end{cases}$	10	
18	$\frac{(12-x)x}{x-(12-x)} = 4 + \frac{1}{2}$	12	
19	$10\left(\frac{x}{10-x} + 10\right) = 115$	10	
20	$\left(\frac{x}{10-x} + 10\right)\left(\frac{10-x}{x} + 10\right) = 122 + \frac{2}{3}$	10	Abu Kamil (n.35) Al-Karaji, al- Fakhri (III, 18)
21	$\left(\frac{x}{10-x} + 10\right)\left(10 - \frac{10-x}{x}\right) = 107 + \frac{1}{3}$	10	Abu Kamil (n.37) Al-Karaji, al- Fakhri (III, 19)
22	$\left(\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} + 10\right) = 114$	10	
23	$\frac{x}{10-x}(2x-10) = 24$	10	Abu Kamil (n.28) Al-Karaji, al- Fakhri (III, 16)
24	$\left(\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x}\right)x = 34$	10	Abu Kamil (n.29)
25	$\left(\frac{x}{10-x} - \frac{10-x}{x}\right)x = 5$	10	Abu Kamil (n.33)
26	$\frac{x}{10-x} + x = 5 + \frac{1}{2}$	10	Al-Karaji, al- Fakhri (III, 12)

NUMERO	EQUAZIONE CORRISPONDENTE	TIPOLOGIA	Fonte
27	$\left(\frac{x}{10-x} + x\right)(10-x) = 30$	10	Al-Karaji, al-Fakhri (III, 13)
28	$\frac{x}{10-x} x = 9$	10	Abu Kamil (n.4) Al-Karaji, al-Fakhri (III, 14)
29	$x^2 - 72 = x$	M	
30	$\frac{x}{x+6} = \frac{1}{3}$	M	
31	$\left(\frac{2x^2}{3} - 4\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{2x^2}{3} - 4\right) = x$	M	
32	$\left(\frac{2x^2}{3} - 4\right) 3x = x^2$	M	
33	$4\sqrt{x^2 - 3x} + 3x = 20$	M	
34	$3x + \sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4$	M	
35	$8x + 10\sqrt{x^2 - 8x} = x^2 + 21$	M	
36	$4x \cdot 5x = x^2 + 48$	M	
37	$\frac{x^2}{13} = \frac{x}{7}$	M	
38	$x^2 4x^2 = 20$	M	
39	$x^2 \frac{x^2}{3} = 10$	M	
40	$x^2 4x^2 = \frac{1}{3}$	M	
41	$x^2 x = 3x^2$	M	Al-Khawarizmi (n.16)
42	$\left(\frac{x^2}{3} + 1\right)\left(\frac{x^2}{4} + 2\right) = x^2 + 13$	M	

NUMERO	EQUAZIONE CORRISPONDENTE	TIPOLOGIA	FORTE
43	$\frac{5x^2}{12} - 4 = x$	M	
44	$\frac{5x^2}{12} - 4 = 12 + x$	M	
45	$x^2 4x = 7x^2$	M	
46	$\frac{3x^2}{4} 4x = 6x^2$	M	
47	$\frac{x^2 - 4x}{4} = 4x$	M	Al-Khawarizmi (n.32)
48	$x^2 - 3x = 2x$	M	
49	$x \cdot \frac{2}{3}x = 5$	M	
50	$\left(\frac{2}{3}x - 6\right)^2 = 2x$	M	
51	$\left(\frac{2}{3}x - 6\right)^2 - 18 = 1 + \frac{1}{2}$	M	
52	$5\left(\frac{2}{3}x - 6\right) = x$	M	
53	$(4dg + ab)bc = ab(gb + bc)$ noti ab, dg, gh+bc	Regola del 3	
54	$x^2 + \sqrt{10} = 9x$	M	Al-Karaji, al- Fakhri (II, 35)
55	$x^2 + \sqrt{10} = 9x^2$	M	
56	$(x + \sqrt{10})x = 20$	M	
57	$8x \cdot 3x + 20 = x^2$	M	
58	$\sqrt{8x} \cdot \sqrt{3x} + 20 = x^2$	M	Al-Karaji, al- Fakhri (II, 36)

NUMERO	EQUAZIONE CORRISPONDENTE	TIPOLOGIA	FORTE
59	$\sqrt{6x} \cdot \sqrt{5x} + 10x + 20 = x^2$	M	Al-Karaji, al-Fakhri (II, 37)
60	$\frac{x(10-x)}{2x-10} = \sqrt{6}$	10	Al-Karaji, al-Fakhri (II, 49)
61	$(10-x)^2 - \sqrt{8x} = 40$	M	Abu Kamil (n.36) Al-Karaji, al-Fakhri (II, 39)
62	$(10-x)\sqrt{8x^2} = \sqrt{800} - \sqrt{8x}$	M	
63	$\sqrt{10x} = (10-x)^2$	10	
64	$\sqrt{(x+10)\sqrt{5}} = x$	M	Abu Kamil (n.39)
65	$\sqrt{10x^2} = (x-5)^2$	M	Al-Karaji, al-Fakhri (II, 40)
66	$(x+5)\sqrt{8} = \sqrt{10x}$	M	
67	$\sqrt{2x} = \sqrt{8}(x-5)$	M	
68	$\left(\sqrt{2x^2} + 2\right)x = 30$	M	Abu Kamil (n.41) Al-Karaji, al-Fakhri (II, 41)
69	$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}$	10	Abu Kamil (n.42)
70	$\left(\frac{x}{12-x}\right)^2 + \left(\frac{12-x}{x}\right)^2 = 4$	12	
71	$\left(\frac{x}{10-x}\right)^2 - \left(\frac{10-x}{x}\right)^2 = 2$	10	Abu Kamil (n.45)
72	$\frac{10}{x} + \frac{10}{10-x} = 50$	10	
73	$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = 3$	10	

NUMERO	EQUAZIONE CORRISPONDENTE	TIPOLOGIA	Fonte
74	$\left[x^2 - (2x - 4)\right]^2 = 8x^2$	M	Abu Kamil (n.46)
75	$2x + \sqrt{\frac{x^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{3}} = x^2$	M	Abu Kamil (n.47) Al-Karaji, al- Fakhri (IV, 17)
76	$2x + \sqrt{\frac{x^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2}{3}} = 20$	M	Abu Kamil (n.48) Al-Karaji, al- Fakhri (IV, 18)
77	$x^2 - 2x - \sqrt{\frac{x^2}{2}} - \sqrt{\frac{x^2}{3}} = 20$	M	
78	$x^2 + 4x + \sqrt{\frac{x^2}{2}} + \sqrt{\frac{2x^2}{3}} = 10$	M	
79	$\left(x^2 + x + \sqrt{\frac{x^2}{2}}\right)^2 = 20$	M	
80	$\left(x^2 + \sqrt{\frac{x^2}{2}}\right)^2 = 4x^2$	M	
81	$(x + \sqrt{3})(x + \sqrt{2}) = 20$	M	Abu Kamil (n.53)
82	$(x + 7)\sqrt{3x} = 10x$	M	Abu Kamil (n.54) Al-Karaji, al- Fakhri (IV, 20)
83	$(x + \sqrt{x})(3x + \sqrt{3x}) = 30x$	M	Abu Kamil (n.58) Al-Karaji, al- Fakhri (IV, 21)
84	$x + \sqrt{x} + \sqrt{2x^2} + \sqrt{5x^2} = 10$	M	Abu Kamil (n.59) Al-Karaji, al- Fakhri (IV, 22)

NUMERO	EQUAZIONE CORRISPONDENTE	TIPOLOGIA	FORTE
85	$ \begin{cases} x < y < z \\ xz = y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 = 10 \end{cases} $	Terna pitagorica	Abu Kamil (n.60)
86	$ \begin{cases} x < y < z \\ x + y + z = 10 \\ xz = y^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} $	Terna pitagorica	Abu Kamil (n.61)
87	$(5 + x) - 2\sqrt{5 + x} = (5 - x) - 2\sqrt{5 - x}$	10	Abu Kamil (n.62) Al-Karaji, al- Fakhri (IV, 24)
88	$x^2 + 2x = x\sqrt{10 - x^2}$	10	
89	$\frac{10}{x} + \frac{10}{10 - x} = 6 + \frac{1}{4}$	10	
90	$\frac{20}{x} + \frac{20}{10 - x} = 12 + \frac{1}{2}$	10	
91	$\frac{20}{x} \cdot \frac{20}{10 - x} = 25$	10	
92	$\frac{40}{x} \cdot \frac{50}{10 - x} = 125$	10	Abu Kamil (n.66)
93	$\left(\frac{10}{x} + \frac{10}{10 - x}\right)^2 = 20 + \frac{1}{4}$	10	
94	$\left(\frac{40}{x} + \frac{40}{10 - x}\right)^2 = 625$	10	Abu Kamil (n.69)
95	$\frac{10}{x}(10 - x) = 20 + \frac{1}{4}$	10	
96	$30x^2 \cdot 30 = 30 + 30x^2$	M	

INDICE DEI NOMI

- Abbone di Fleury 98, 100
 Abraham ibn Ezra (Abenezra) 50, 109, 110, 276, 285, 286
 Abraham ibn Daud 203
 Abraham bar Hiyya. Vedi Savasorda
 Abu-l-Wafa, Mohammed al-Buzjani 41, 50, 85
 Abu Bakr 107, 113
 Abu Kamil 29, 92, 93, 108, 110, 128, 218, 225, 226, 228, 242, 252
 Abu-Tahir, Sayid 94
 Adam, Jehan 261
 Adelardo di Bath 51, 100, 105, 106, 116, 200, 201, 202, 203, 211, 212, 236, 273
 Agostino 9
 Ainhauser, Michael 278
 al-Baghdadi 49, 50
 al-Biruni 40
 al-Buni 283
 al-Farahidi 56
 al-Fazzari 40
 al-Hajjaj 41, 88
 al-Himsi, Abd al-Masih ibn an-Naimah 37, 38
 al-Husain 284
 al-Idrisi 217
 al-Jauhari 38
 al-Karabisi 85
 al-Karaji 41, 50, 85, 225, 242, 263
 al-Karkhi. Vedi al-Karaji
 al-Kayyam. Vedi Kayyam
 al-Khawarizmi, Muhammad ibn Musa abu Jafar 7, 47-94, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 113, 114, 117, 122, 131, 132, 133, 135, 136, 153, 197, 199, 200, 201, 203, 206, 207, 208, 209, 211, 212, 221, 224, 225, 226, 233, 236, 239, 240, 241, 242, 243, 249, 251, 252, 255, 256, 260, 267, 270, 276, 304, 305
 al-Maitham 225
 al-Majriti 51, 105
 al-Mamun 36, 48, 53
 al-Mansur 36, 39, 40, 49, 51
 al-Nayrizi 41
 al-Qurashi 218
 al-Rashid, Harun 30, 36, 39
 al-Safadi 37
 al-Tabari 48, 49
 al-Wathiq 48
 Alberti, Leon Battista 139, 140, 289, 293, 298, 299, 300
 Alcuino 28, 29, 223, 226, 253
 Alessandro di Afrodisia 37
 Alfonso II del Portogallo 202
 Alfonso II di Napoli 257
 Ali ibn al-Abbas 101, 104
 Amann, Fridericus. Vedi Gerhart, Fridericus

- Ammannati, Ippolito 290
Antonio d'Anghiari 292
Apollonio di Pergamo 40, 291
Apuleio 26
Archimede 40, 90, 101, 107, 138, 140, 288, 291, 293
Archita di Taranto 9
Aristotele 21, 36, 37, 95, 101, 104, 107, 110, 128, 272, 285, 289, 291
Artavasde, Nicola di Smirne 283
Aryabhata 39, 43, 44, 90
Auerbach, Heinrich. Vedi Stromer, Henricus
Avendauth 107, 201, 202, 203
Avicenna 102, 107, 108

Bacone, Ruggero 107
Baghdad 36, 37, 38, 39, 40, 47, 48, 51, 91, 94
Banu Musa 37, 48
Barlaam di Seminara 284
Barthélemy de Romans 262
Bate de Malines, Henri 109
Beda il Venerabile 27, 28, 234
Béjaia (Bugia) 217, 218, 219, 227
Bekhtyashu, Yuhanan 37
Beldomandi, Prodocimo de' 258, 259, 302
Benedetto da Firenze 129, 130, 251, 253, 255, 256
Bernard, Edward 306
Bernardo l'Arabo 110
Bernelinus 98
Bessarione, Giovanni 7, 140, 141, 153, 266, 288, 293, 295, 296, 297
Bhaskara I 43
Bhaskara II 45, 80, 84
Biagio da Parma. Vedi Pelacani, Biagio
Biagio "il vecchio" 253, 255
Bianchini, Giovanni 141, 266, 267
Bicci di Lorenzo 293
Boezio, Anicio Manlio Torquato Severino 11-24, 26, 27, 31, 33, 98, 116, 199, 213, 232, 235, 270, 279, 289, 302
Boncompagni, Baldassarre 49, 130, 201, 221, 227, 228, 231, 266, 306
Bonvesin de la Riva 233
Borel 96
Borghi, Pietro 259
Borgia, Cesare 300
Boysset, Bertrand 261
Bracciolini, Poggio 256
Bradwardine, Thomas 272, 279
Bragadin, Domenico 300
Brahmagupta 39, 40, 44, 45, 50, 84, 90, 225
Branellach, Bernard de 278
Burgundio da Pisa 101

Cambridge 49, 109, 272, 273, 289
Campano da Novara 116, 272, 301
Canacci, Raffaello 129, 251, 256, 289
Cardano, Gerolamo 65, 227, 232, 303, 304, 305
Carlo Magno 29, 30
Carlo Martello 36
Capocci, Ranieri 220, 231
Cassiodoro, Flavio Magno Aurelio 12, 24-25
Cataldi, Pietro Antonio 19
Certain, Jehan 261
Chasles, Michel 306
Ch'in Chiu-Shao 225
Chuquet, Nicolas 225, 261, 263-264, 267
Cicerone, Marco Tullio 9
Commandino, Federico 291
Comtino, Mordecai 109, 285-287
Constantinus 97
Costantinopoli 36, 101, 216, 217, 226, 253, 261, 279, 280, 285, 286, 287
Costantino l'Africano 101
Cristini, Bartolomeo 143
Cuspianus, Johannes 269

Dagomari, Paolo. Vedi Paolo dell'Abaco

- Daniele di Morley 107
dell'Abaco, Paolo 252, 253, 254, 255, 289
de la Roche, Estienne 264
Diofanto 40, 41, 83, 85, 86, 87, 90, 121, 230, 232, 280, 291, 292, 304, 305
Dionisio Trace 9
Dioscoride 37
Domenicho d'Aghostino 255, 256
Domenico Veneziano 292
Dominicus de Clavasio 135
Dove, Ricardus 272, 274
- Edoardo III Plantageneto 272
Enrico I Plantageneto 105
Enrico II Plantageneto 105
Erlendsson, Haukr 275
Erone 81, 86, 90, 227, 228, 285, 291
Ermanno Tedesco. Vedi Hermann il Dalmata
Estienne de la Roche 264
Euclide 12, 19, 37, 40, 41, 55, 64, 66, 67, 80, 83, 85, 87, 90, 92, 93, 101, 105, 106, 107, 109, 116, 129, 132, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 202, 219, 220, 224, 227, 231, 232, 237, 240, 272, 279, 280, 284, 285, 288, 289, 291, 298, 301, 302
- Federico da Montefeltro 139, 294, 300
Federico Guidubaldo da Montefeltro 297, 300
Federico II 102, 103, 108, 110, 220, 228, 231
Fernandes, Bento 277
Ferrari, Ludovico 254, 303
Ferro, Scipione del 301, 303
Fibonacci, Leonardo 24, 72, 92, 93, 103, 108, 109, 113, 114, 132, 133, 136, 199, 210, 213, 215-232, 236, 239, 242, 247, 249, 251, 252, 253, 255, 257, 260, 262, 263, 264, 265, 267, 275, 277, 282, 285, 286, 302, 303, 304, 306
- Filippo da Tripoli 105
Firenze 102, 138, 213, 226, 247, 248, 250, 251, 254, 255, 256, 258, 261, 289, 292, 293, 296, 300, 301
Flor, Antonio Maria 304
Fournival, Richard de 129, 201, 236
fra' Carnevale 299
Francesco da Borgo San Sepolcro 7, 137, 138, 139, 140, 141, 293
Francesco di Giorgio Martini 299
Fulberto 99
Fusoris, Jean 261, 262
- Galandria, Johannes de 278
Galeno 37, 101, 103, 110
Gemisto Pletone, Georgios 288
Gérard d'Abbeville 201
Georgius de Hungaria 278, 279
Gerardi, Paolo 252, 255, 256, 260, 295
Gerardo da Cremona 7, 50, 51, 52, 54, 56, 62, 107, 113, 114, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132, 135, 136, 137, 153, 200, 211, 224, 251, 266
Gerardo da Sabbioneta 266
Gerberto d'Aurillac 23, 95-100, 104, 106, 210, 221
Gerhart, Fridericus 267-268
Gerlandus di Besançon 98
Geroldo d'Aurillac 96
Ghaligai, Francesco di Leonardo 129, 248
Giacomo da Venezia 101
Giamblico 37, 86, 280
Giano della Bella 251
Giordano da Rivalto 213
Giordano di Sassonia 237
Giorgio da Trebisonda (Trapezunzio) 285

- Giovanni da Palermo 103, 220, 228, 229, 231
 Giovanni da Siviglia. Vedi Johannes Hispalensis
 Giovanni di Bartolo 255
 Giovanni di Gorze 104
 Giustiniano 44
 Gmunden, Johannes von 116, 265
 Gmundis, Johannes de. Vedi Gmunden
 Grammateus, Henricus 271
 Guglielmo dei Bonacci 218
 Guglielmo de Lunis 50, 108, 113, 115, 127, 129, 132, 136, 251, 256
 Guglielmo di Moerbeke 101, 293
 Gundisalvi. Vedi Gundissalinus
 Gundissalinus 107

 Hagin 109
 Hageccius, Thaddaeus 117
 Hasdeu 104
 Hatto 96
 Herigerus di Lobbes 98
 Hermann di Carinzia 106, 107, 211
 Hermann il Dalmata. Vedi Hermann di Carinzia
 Herrade di Landsberg 30
 Hoecke, Gielis van den 271
 Hudalricus Regius 19
 Hunayn ibn Ishaq 37, 38, 101

 Ibn Haldun 283
 ibn Tibbon (famiglia) 110
 Il Cairo 50, 52, 217
 Ippocrate 95, 101
 Ishaq ibn Hunayn 37, 41
 Ishaq ben Sid 110
 Isidoro di Siviglia 26-27, 29, 96, 276
 Isocrate 9

 Jacopo da Cremona 138, 291, 293
 Jacopo da Firenze 233, 252, 256, 260
 Jacopo da S. Cassiano. Vedi Jacopo da Cremona
 Johannes de Galandria 278
 Johannes de Lineriis 233, 242, 244, 256, 264, 274
 Johannes de Muris 114, 116, 260, 267
 Johannes Hispalensis 106, 201, 202, 203, 270
 Juan d'Aspa 110
 Jundishapur 35, 36, 37, 40
 Jurjis ibn Jibril ibn Bakhtishu 36

 Kayyam, Omar 92, 93-94, 225, 231
 Keck, Johannes 265
 Kyllyngworth, Johannes 272, 273

 Landino, Cristoforo 290
 Laurana, Luciano 299
 Leonardo da Besozzo, 257
 Leonardo da Pistoia, fra' 289
 Leonardo da Vinci 139, 140, 289, 300, 301
 Libri, Guillaume 306
 Londra 109, 272, 274
 Lotto da Firenze 250
 Lucha di Matteo 256

 Maestro Biagio 248, 256
 Maestro Dardi da Pisa 108, 123, 144, 152, 254
 Maestro Guglielmo di Lucca 31
 Magister A 201, 202, 203, 212,
 Magister Gernandus 274
 Magister Johannes 113, 201, 203
 Mahavira 226
 Marziano Capella 9, 10-12, 24, 27, 29, 100, 203
 Masolino da Panicale 139
 Mattia Corvino 266
 Maurolico, Francesco 230, 288, 291
 Mazzinghi, Antonio de' 254-255, 303
 Meliteniotes, Theodoros 284

- Metochites, Theodoros 284
Michele Scoto 102, 103, 107, 108
Moamyn 103
Mondsee, Hieronimus von. Vedi Wer-
dea, Johannes de
Moschopoulos, Manuel 282
Mosè da Brescia 101
Mosé Sepharadi. Vedi Petrus Alfonsi
Müller, Johannes. Vedi Regiomonta-
nus
Muscarello, Pietro Paolo 257
- Napoli 128, 257, 300,
Nemorario, Giordano 116, 225, 233,
236-242, 256, 270, 271, 302
Niccolò V 7, 138, 139, 291, 293, 299
Nicolas, Gaspar 276
Nicomaco di Gerasa 11, 12, 26, 199,
225, 228, 280, 284, 285, 289, 302
Nidhamu'l-Mulk 94
Nuñez, Pedro 277
- Ocreat, Johannes 236
Oddi, Muzio 306
Omar II 40
Oresme, Nicola 116, 256, 260, 264
Ottone III 23
Oxford 33, 272, 273, 289
- Pachymeres, Georgios 284
Pacioli, Luca 6, 256, 289, 297, 300-
303, 304
Padova 103, 226, 247, 258, 259, 266,
289, 292
Palamas, Gregorios 288
Palermo 102, 226
Pandolfo di Capua 257
Paolo Uccello 294
Parigi 29, 33, 110, 234, 235, 260, 262,
289, 305
Pegolotti, Francesco di Balduccio 218,
261, 265
- Pelacani, Biagio (Biagio da Parma) 258,
302
Petrus Alfonsi 105, 200, 202, 203
Peurbach, Georg von 265, 266
Peyraut, Guillaume 213
Piero della Francesca 7, 139, 140, 256,
289, 291, 292-299, 301
Pietro da Bologna 250
Pietro de Penis 251
Pietro Diacono 101
Pisa 109, 215, 216, 217, 218, 220, 226,
228, 231, 247, 258, 261, 300
Pitagora 9, 14, 21, 26, 80, 213, 219
Planude, Massimo 280-282
Platone 9, 11, 13, 21, 31, 37, 80, 101,
285, 289
Platone da Tivoli 106, 109, 113
Pontio 21
Porfirio 37, 104
Préhoude, Mathieu 261, 262
Prachaticz, Christianus de 278, 279
Profatius Iudaeus 110
Pruthudakaswarni 44
Psellus, Michael 284
Pseudo-Aristotele 105
Pseudo-Boezio 12, 98
- Qin Jiushao. Vedi Ch'in Chiu-Shao
Quata ibn Luqa 37, 41, 85
- Radulph di Laon 98
Ramée, Pierre de la 305
Recemundus 104
Reorde, Robert 271
Regiomontanus, Johannes 7, 116, 135,
136, 137, 140, 141, 152, 153, 227,
230, 231, 232, 238, 266-267, 282,
285, 288, 289, 291, 292, 295, 296,
297, 305
Reisch, Gregor 213
Remigio di Auxerre 10, 11, 29
Rhabdas. Vedi Artavasde

- Ricardus Anglicus 272, 273, 274
 Riccardo III Plantageneto 274
 Richerus 95, 97
 Ries, Adam 122, 270
 Roberto di Chester 50, 52, 54, 66, 106, 113, 114, 115-122, 128, 130, 131, 132, 211, 239, 270, 273
 Rolando da Lisbona 260
 Roma 10, 24, 26, 49, 96, 108, 109, 137, 138, 139, 140, 153, 253, 254, 256, 258, 265, 266, 267, 285, 293, 295, 296, 297, 299, 300, 301
 Romans, Barthélemy de 262
 Roomen, Adriaan van 116, 117
 Rudolff, Christoff 267, 270

 Sacrobosco, Johannes de 116, 200, 201, 209, 233, 234, 235-236, 244, 249, 256, 258, 260, 261, 262, 264, 265, 268, 269, 272, 273, 274, 275, 276, 302
 Samarcanda 48, 94
 Sanctcliment, Francisc de 278
 Savasorda 89, 106, 107, 109, 110, 113, 212, 228, 276, 285
 Scheubel, Johann 19, 66, 115, 128
 Schreiber, Heinrich. Vedi Grammateus, Henricus
 Scoto Eriugena, Giovanni 10, 29
 Scott, Walter 103
 Severus Sebokht 44, 279
 Sforza, Ippolita 257
 Sforza, Ludovico Maria, detto il Moro 300, 301
 Siddhanta 39, 40, 44
 Sigisboto di Prüfening 212
 Somur, Johannes 272, 274
 Stavelot, Jean de 264
 Stefano Chierico, 279
 Stefano di Antiochia 104
 Stifel, Michael 270
 Stromer, Henricus 271

 Tartaglia, Nicolò 303, 304, 305
 Tebaldis, Egidio de 110
 Teodorico 12
 Teodorico di Chartres 30, 99
 Teodoro di Antiochia (Maestro Teodoro) 103, 231
 Teone di Alessandria 41, 140, 284, 302
 Thabit ibn Qurra 37, 40, 41, 64, 199
 Toledo 50, 94, 104, 106, 107, 108, 109, 113, 128, 201, 203, 208, 276
 Tolomeo 12, 21, 37, 39, 40, 51, 95, 99, 102, 106, 107, 138, 141, 142, 235, 266, 284, 285
 Torino 142, 226
 Trapezunzio. Vedi Giorgio da Trebisonda
 Trivet, Nicholas 237
 Turchillus 100
 Twinger, Jacobus 265

 Ugo da san Vittore 31
 Ugo di Santalla 106

 Valla, Lorenzo 256
 Varahamihisa 39
 Varrone 10
 Venezia 216, 218, 226, 259, 285, 288, 300, 301
 Vernazza, Giuseppe 142
 Victorius 98
 Viète, François 238, 267
 Villani, Giovanni 233
 Villedieu, Alexandre de 209, 233, 234, 235, 244, 256, 260, 261, 264, 272, 274, 275, 276
 Vivarium 24

 Wagner, Ulrich 259
 Walcher of Malvern 100
 Weyden, Rogier van der 293
 Werdea, Johannes de 268
 Widmann, Johannes (von Eger) 116, 270

William of Malmesbury 99

Zhang Qiuqian 226

Yehuda ben Mose 110

Zarlino 20, 21

Yuhanna ibn al-Bitriq 38

Yuhanna ibn Masawaih 37

Libri dal catalogo LED:

I luoghi del Sublime moderno – Percorso antologico-critico • A cura di P. Giordanetti e M. Mazzocut-Mis

F. Marelli • *Lo sguardo da Oriente. Simbolo, mito e greicità in F. Crenzer*

F. E. Beneke • *Filosofia e psicologia. A proposito della riforma recentemente introdotta in psicologia e delle sue conseguenze per la vita pratica* • Introduzione, testo e traduzione italiana a cura di R. Pettoello

F. Marietti • *Icona e diagramma. Il segno matematico in Charles Sanders Peirce*

Forma e contenuto. Aspetti di teoria della conoscenza, della mente e della morale • A cura di R. Lanfredini

Forma dat esse rei. Studi su razionalità e ontologia • A cura di P. Valore

Etica analitica. Analisi, teorie, applicazioni • A cura di P. Donatelli e E. Lecaldano

C. Bagnoli • *Il dilemma morale e i limiti della teoria etica*

M. Franchella • *Come l'amor platonico. Kantismo e Platonismo nella filosofia della matematica del XX secolo*

Lecture di logica. Fondamenti della matematica. Linee di ricerca attuali • A cura di M. Franchella e C. Mangione

M. Negri • *Logica. La teoria classica dell'inferenza*

E. Ruffaldi - M. Trombino • *L'Officina del pensiero. Insegnare e apprendere filosofia. Manuale-laboratorio didattico per le scuole superiori e per le scuole di specializzazione universitaria* • 2 voll. Con CD rom

RIVISTE

Leitmotiv • E-journal • www.ledonline.it/leitmotiv

Problemata. Quaderni di Filosofia

Il catalogo aggiornato di LED - Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto è consultabile all'indirizzo web <http://www.lededizioni.com>, dove si possono trovare anche informazioni dettagliate sui volumi sopra citati: di tutti è disponibile il sommario, di alcuni vengono date un certo numero di pagine in lettura. Tutti i volumi possono essere ordinati on line.