LED ON LINE
SPAZIO TESI

Davide Bondoni

LA TEORIA DELLE RELAZIONI NELL'ALGEBRA DELLA LOGICA SCHROEDERIANA

LED
Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto

ISBN 88-7916-349-1
Published in *Led on Line* - Electronic Archive by

LED Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto

http: //www.ledonline.it - http://www.lededizioni.it

http://www.ledonline.it/spaziotesi/bondonischroeder.html
Marzo 2007

Stampa: Digital Print Service

Indice

All’affettuosa memoria
del nostro caro papà

Prefazione

1. Introduzione

Lo scopo del presente lavoro è stato quello di gettare luce su alcuni aspetti significativi del lavoro svolto da Ernst Schröder. In questo senso, esso si pone come ricerca propedeutica ad un'indagine schiettamente storica. Date le difficoltà intrinseche al calcolo delle relazioni come esposto dall'illustre matematico tedesco, è sembrato opportuno fissare con un certo margine di precisione gli apporti fondamentali dell'autore studiato, prima di arrischiare legami di paternità o confronti troppo disinvolti. Infatti, essendo ancora oggi lo Schröder del calcolo dei relativi un autore poco studiato, si incontrano spesso giudizi errati. Un caso fra i tanti: la Geraldine Brady sostiene che Schröder con l'Auflösungsproblem avrebbe introdotto una nuova classe di funzioni, preannunciando il lavoro di Thoralf Skolem. Di fatto, Schröder spianerà il cammino a Löwenheim e Skolem in un altro luogo delle *Lezioni*, quando, cioè, si tratterà di eliminare l'alternanza dei quantificatori dal prefisso equazionale di una formula in forma prenessa.

D'altra parte, il lettore, nel suo sforzo di comprensione, non è certo aiutato dal fatto che nelle *Vorlesungen* si passa sovente da intuizioni geniali ad osservazioni, talvolta, banali. Così come è d'ostacolo la mancanza nel terzo volume dell'opera in oggetto di un'introduzione che giustifichi l'interesse di Schröder verso i relativi. Anche l'articolo del 1895 nei *Matematischen Annalen* che annuncia l'imminente uscita dell'ultimo volume delle *Lezioni* si limita ad un riassunto molto compresso.

In questa situazione lo stabilire la portata ed i contenuti principali inerenti al calcolo delle relativi si è presentato come un'urgenza primaria. Ciò spiega i tentativi che sono stati fatti verso una ricostruzione il più possibile comprensibile al lettore moderno del dettato schröderiano.

2. Schröder

Il mio lavoro si è articolato idealmente in due parti: la prima, riguardante il calcolo dei relativi schröderiano; la seconda, l'eredità di Schröder nel pensiero di Löwenheim, Skolem e Tarski. Partiamo, quindi, dal calcolo schröderiano. Mi sono concentrato su due aspetti di particolare interesse: il *presunto* fondazionalismo e il problema della soluzione. Anzitutto, si è cercato di elucidare il significato di *tradurre* la teoria delle catene in termini di relativi. Per alcuni studiosi, fra cui la Brady e Lewis, si è trattato di una mera traduzione degli enunciati sulle catene di Dedekind nel calcolo dei relativi. Ad avvalorare questa posizione si trovano affermazioni dello stesso Schröder, secondo cui la teoria delle catene avrebbe *semplicemente* guadagnato in eleganza e perspicuità una volta tradotta in termini di relazioni. Benchè su valori estetici, come *bellezza* ed *eleganza*, abbiano spesso messo l'indice coloro che lavorarono con le relazioni, l'idea che Schröder si fosse limitato a tradurre la *Kettentheorie* è troppo restrittiva.

Quello che, infatti, vede Schröder è che una porzione non indifferente di enunciati sulle catene, tra cui la stessa definizione di catena, è *indipendente* dal concetto non solo di funzione *iniettiva*, ma da quello di funzione tout-court. Schröder mostra che questi enunciati mantegono la loro validità anche qualora vengano generalizzati a relazioni qualsiasi. E' questo il significato profondo del lavoro di Schröder sulla teoria delle catene: l'aver compreso che era indipendente dal concetto di funzione e di insieme.

Ma ciò non basta: Schröder si rende conto che il concetto di catena, tradotto in termini relativi, coincide con quello di *chiusura riflessivo - transitiva* di una relazione, concetto assai importante in vari contesti logici. Certamente, Schröder non usa l'espressione 'chiusura'; essa verrà introdotta successivamente dalla topologia, ma dal modo in cui definisce la traduzione relativa del concetto di catena è evidente che ha in mente proprio questo concetto.

2.1. Mentre da un lato Schröder ammira il lavoro svolto da Dedekind in *Was sind un was sollen die Zahlen?*, dall'altro se ne discosta nettamente, non credendo alla dimostrazione di almeno un insieme che contenga i naturali. Non ne è chiaro il motivo. Schröder non argomenta questa sua presa di distanza da Dedekind, malgrado affermi esplicitamente che scopo ultimo del suo lavoro fosse quello di giungere alla definizione di *numero - di*. Mi è sembrato che in ciò giocasse un ruolo cruciale il tentativo di Schröder di codificare un linguaggio in cui esprimere i principali concetti delle scienze esatte, la *pasigrafia*. In altre parole, non sembra essere in gioco lo stato *ontologico* del concetto di numero. A differenza di Dedekind, per Schröder i *singoli* naturali (e non un *insieme* di essi) sono un qualcosa di dato. Scopo della pasigrafia è quello di tradurli in termini relazionali. In particolare, un numero è rappresentato da un relativo *monoriga* nel calcolo delle relazioni.

Ciò facendo, ho articolato il fondazionalismo di Schröder per un verso nella constatazione che una serie di enunciati sulle catene sono indipendenti dal concetto di funzione e di insieme e nella messa a fuoco del concetto di catena come coincidente con quello della chiusura riflessivo - transitiva di una relazione; per un altro verso, invece, mi sono posizionato nell'alveo delle ricerche svolte da Peckhaus sulla pasigrafia dell'ultimo Schröder.

2.2. Questo per quanto riguarda il fondazionalismo. Passiamo, adesso all'*Auflösungsproblem*. Tale problema consiste nel trovare, data un'equazione, tutte le sue *possibili* soluzioni. Qui si trova il punto di rottura tra il pensiero di Peirce e quello di Schröder. Il punto è che le ricerche del tedesco approdano a stabilire, data un'equazione, una soluzione generalissima che nel caso non vi sia altra soluzione, semplicemente ci ridà la soluzione particolare posta per ipotesi. La soluzione generale, nel caso malaugurato che di un'equazione non si trovi nessuna soluzione, nonostante sia *risolubile*, ci indica almeno la *forma* sotto la quale cercarla.

Agli occhi di Peirce ciò non ha senso; non ha senso, cioè, cercare la formulazione più generale di qualsiasi problema e di qualsiasi soluzione. Questo perchè Peirce sposa una visione pragmatica, seconda la quale è un contesto specifico a determinare la problematicità di una situazione, per far fronte a cui si ha bisogno di soluzioni, risposte, altrattanto particolari. Il filosofo americano giustifica il ricorso a leggi generali solo in quanto sussumano sotto di sè i casi particolari. Lo scienziato ne fa uso solo se messo alle strette. Dal punto di vista algebrico, ciò si traduce nel prendere in considerazione le soluzioni generali solo quando indichino come trovare delle soluzioni particolari.

Non è la visione di Schröder. Egli non è il matematico dalle intuizioni geniali, ma isolate, come Peirce. Quello che fa Schröder è sistematizzare per benino il calcolo delle relazioni, non tacendo nessun aspetto; un po' come lo scopritore di nuove terre che non manca di segnare sul suo taccuino ogni cosa che incontra. Un lavoro del genere può sembrare astratto, in quanto non motivato da nessun bisogno particolare se non quello di una minuziosa classificazione, ma non per questo banale. Lo diventa solo se si adotta una concezione à la Peirce, in base a cui è un contesto determinato ad indirizzare lo scienziato.

Non si è trattato, in questa parte, di stabilire quale delle due posizioni, quella schröderiana o quella peirceana, sia la vincente, quanto situarle nel loro contesto.

3. Un'importante eredità

Passiamo al lascito di Schröder. Ho ritenuto opportuno fornire qualche cenno biografico su Löwenheim, in quanto ancora oggi la sua vita risulta avvolta dal mistero. Io stesso ho avuto modo di sentire che Löwenheim sarebbe morto in un campo di sterminio.

Per provare il suo celebre teorema, Löwenheim fa ricorso ad una tecnica schröderiana che permette l'eliminazione dell'alternanza dei quantificatori dal prefisso di una formula in forma prenessa. Questo artificio è cruciale per Löwenheim, dato che egli dimostra il teorema per formule della forma $\exists\forall A$, dove $\exists$ è una stringa di quantificatori esistenziali, $\forall$ una stringa di quantificatori universali ed A la matrica priva di quantificatori. Löwenheim deve così provare che ogni formula può essere riscritta in questo modo. Per far ciò si avvale della tecnica sopra citata di Schröder.

Quindi, Schröder non solo codifica il calcolo in cui Löwenheim dimostra il suo teorema, ma fornisce anche gli strumenti necessari alla sua dimostrazione. Skolem, invece, generalizzando il teorema di Löwenheim ad insiemi numerabili di formule, sceglie di sfruttare l'assioma di scelta al posto dell'artificio di Schröder, guadagnando in perspicuità. Fra l'altro, si noti anche che Skolem non trova solo un dominio numerabile in cui è soddifatta (soddisfatto) una formula (insieme numerabile di formule) del primo ordine, ma uno che oltre ad essere numerabile sia contenuto in quello in cui si assume che per ipotesi sia soddisfatta (soddisfatto) la formula (insieme di formule) di partenza. Questo è un ulteriore rafforzamento del teorema di Löwenheim nella cui dimostrazione si esibisce un dominio numerabile che non è detto sia contenuto in quello infinito assunto dall'ipotesi.

3.1. Ad ogni modo, si può definire il teorema di Löwenheim e il suo rafforzamento da parte di Skolem come uno dei risultati più importanti ottenuti nel calcolo dei relativi di Schröder. Schröderiano è, infatti, il calcolo in cui si prova tale teorema e schröderiani sono alcuni strumenti utilizzati da Löwenheim.

3.2. Löwenheim, fra l'altro, riprende da Schröder anche l'idea di fondare la matematica sul calcolo dei relativi. Se però in Löwenheim non si va oltre qualche accenno, in Tarski questo progetto assume pieno compimento. Dal 1941, anno di pubblicazione del suo primo articolo sulle relazioni, fino agli anni '80 del novecento, Tarski, infatti, non smetterà di rifletterci, fino a dimostrare che il calcolo dei relativi, opportunamente assiomatizzato, benchè povero deduttivamente ed espressivamente, sia equivalente a vari sistemi di assiomi per la teoria degli insiemi, fra cui ZF. Ciò significa che si può fare matematica in termini di relazioni, evitando anche l'uso di quantificatori su variabili individuali, in quanto non presenti nel calcolo dei relativi. Tarski fa, così, sue tre idee di Schröder:

(1) fondare la matematica sulle relazioni

(2) esprimere ogni enunciato del calcolo dei relativi in forma equazionale

(3) eliminare i quantificatori su variabili individuali

Ciò che mi ha colpito è stato l'interesse di Tarski per Schröder. Cosa vedeva il logico polacco in lui? Senza dubbio, l'algebra dei relativi schröderiana, facendo a meno del concetto di *individuo*, non poteva che incontrare il favore di Tarski, il quale dubitava fortemente della sua esistenza. Infatti, Tarski aveva alle spalle una visione mereologica della matematica, definendosi platonista solo per hobby.

D'altra parte, del concetto di individuo come qualcosa di *costruito* a partire da un tutto e non come qualcosa di dato, Schröder era debitore a Peirce. Ma allora, perchè volgersi a Schröder e non all'americano? Evidentemente, le simpatie mereologiche di Tarski non sono sufficienti. Abbiamo, così, argomentato che fossero delle ragioni estetiche a spingere Tarski ad occuparsi di Schröder. Infatti, chi si occupava del calcolo delle relazioni schröderiano, come Löwenheim, ne decantava la bellezza e la poeticità. Valori che verranno messi in rilievo da Tarski e Givant in *Foundations of Set Theory without Variables*.

3.3. Con ciò si conclude il presente volumetto, nel misurare l'effetto del lavoro di Schröder sui relativi, dopo averne enucleato i temi fondamentali. A questo punto, la strada è pronta per delle ricerche che mirino a giustificare storicamente i concetti presi in esame ed ad indagarne i legami di paternità e filiazione.

Ringraziamenti

Ringrazio di cuore la sollecita e premurosa guida di Ettore Casari, viva fonte di ispirazione, senza il cui appoggio tale lavoro non avrebbe mai visto la luce. Inoltre, desidero ringraziare per i loro suggerimenti e per il loro sostegno, Stefano Baratella, Carlo Cellucci, Albert C. Lewis, Roger D. Maddux, Volker Peckhaus e Christian Thiel. Infine, un vivo riconoscimento all'appoggio morale del dott. Gianluigi Nobili che mi ha sostenuto in questi difficili anni e a Valeria Passerini della Casa editrice LED di Milano che mi ha seguito nella pubblicazione di questo volume.

CAPITOLO 1

La Vita

1. Introduzione

Friedrich) Wilhelm Karl Schröder nasce a Manneheim il 25 novembre del 1841.[1] Il padre, Georg Friedrich Heinrich (1810 - 1855) insegnò fisica e matematica alla *Polytechnische Centralschule* di Monaco, ed anticipò il lavoro di Pasteur con le sue ricerche sulla filtrazione dell'aria. La madre, Karoline Walther, era figlia di Johann Gottfried Walther (1785 - 1852), pastore protestante e scrittore di fiabe. Nel periodo della prima giovinezza, il nostro soggiornò spesso dal nonno Johann, acquisendo da questi la capacità di memorizzare parole e vocaboli stranieri. Così, già a 8 anni, Schröder sapeva leggere il latino.

1.1. Questo amore per le lingue accompagnò Schröder per tutta la vita, dandogli l'opportunità di entrare in corrispondenza con Peirce, la Ladd-Franklin, il logico russo Poretskii (1846 - 1904), e gli italiani Padoa e Peano.[2] Anzi, Dipert arriva a sostenere che Schröder avesse pianificato i suoi luoghi di insegnamento con la mira di padroneggiare ogni volta una lingua diversa:

> Sembra che Schröder avesse di mira di migliorare o imparare una lingua in ogni tappa del suo cammino professionale (...).[3]

[1] Le informazioni più dettagliate sulla vita di Schröder si trovano in [**Schröder, 1901**]. In questo volume, si tova una breve autobiografia scritta in terza persona dallo stesso Schröder. Lüroth se ne servì nel 1903 per redarre un necrologio di Schröder [**Schröder, 1966**, pp. iii - xix] alla base di qualsiasi testo posteriore sulla vita di Schröder.

[2] [**Dipert, 1991b**, p. 120].

[3] [**Dipert, 1991b**, p. 122]. Le traduzioni da questo testo sono mie.

Tale precocità in Schröder aveva, però, anche dei risvolti spiacevoli, escludendolo dalla compagnia di ragazzi, forse meno dotati, ma, tuttavia, della sua stessa età. Egli, infatti, racconta di sé stesso, non senza una punta di amarezza:

> Questa precocità aveva, tuttavia, i suoi lati negativi, associando il ragazzo con compagni spesso molto più anziani, e privandolo, così, di compagni di giochi della stessa età, e preparando il terreno ad un comportamento talora bizzarro, e ad un'inclinazione alla solitudine.[4]

Quest'*inclinazione alla solitudine* venne da Schröder controbilanciata da una passione verso una molteplicità di sports. Fu questo entusiasmo per le discipline *corporali* a spingere Schröder ad iniziare a sciare nel 1901 - 1902, all'età di 60 anni. Fra i suoi hobbies si possono menzionare: alpinismo (che coltivò particolarmente nel soggiorno svizzero), pattinaggio sul ghiaccio bicicletta[5], equitazione, e giardinaggio.

2. Svizzera

Per quanto riguarda la carriera scolastica, il giovane Schröder non aveva dubbi, e si risolse, così, a studiare matematica e fisica. Ottenne il dottorato ad Heidelberg, dopo aver studiato con personalità insigni, quali Hesse, Kirchoff e Bunsen. Nel 1864, all'età di 22 anni, finì il suo percorso di studi. Seguendo le orme del padre, che aveva a suo tempo insegnato in Svizzera, tentò l'abilitazione a *Privatdozent* all'*eidgenössische Polytechnicum* di Zurigo con una dissertazione dal titolo: *Die Differenziation zur allgemeinen Index*. Dipert suggerisce, al solito, che dietro la scelta di andare in Svizzera ci fossero delle ulteriori motivazioni linguistiche:

> Non è da escludere che [Schröder] abbia scelto di andare in Svizzera non solo per ragioni accademiche; infatti, usò il periodo trascorso in Svizzera per perfezionare il suo francese, e compiere un certo numero di escursioni nelle Alpi.[6]

D'altra parte, siccome lo stipendio di Privatdozent non era sufficiente, Schröder si vide costretto ad insegnare contemporaneamente alla scuola

[4] [**Schröder, 1901**], citato in [**Peckhaus, 2004**, p. 4 della versione pre-print].

[5] Egli montava una sella di sua progettazione.

[6] [**Dipert, 1991b**, p. 121].

cantonale di Zurigo, sostituendo Greiffer, assente per malattia. Lì, insegnò algebra, trigonometria, geometria e meccanica.

3. Il periodo di Baden-Baden

Al suo ritorno in Germania, nel 1870, si arruolò come volontario nell'esercito prussiano, fin quando venne richiamato per insegnare al *Pro - und Realgymnasium* di Baden-Baden. In questo periodo (1870 - 1874), Schröder si concentra su ciò che poi assumerà una veste definitiva nel *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*[7] del 1873. In esso, fra le altre cose, si trova l'affermazione dal sapore squisitamente dedekindiano, che *il concetto di numero è indipendente dalla capacità di contare*[8].

Incidentalmente, Lüroth sottolinea anche la tendenza alla *generalizzazione* [Verallgemeinerung] presente nei primi scritti e nelle prime ricerche (non pubblicate) di Schröder.[9]

E' in questo testo, tra l'altro, che Schröder inizia ad usare i simboli $<$ e $\leq$[10], per l'inclusione *propria* e *impropria*, rispettivamente. Questo scritto è importante, non solo, per una certa impostazione *dedekindiana*, ma anche perché vi si trova formulato per la prima volta l'*Auflösungsproblem* [problema della soluzione], che tanta importanza avrà nel terzo volume delle *Lezioni*. In altre parole, nel *Lehrbuch* si trovano in nuce i due capisaldi del lavoro logico di Schröder: fondazione della matematica (o, quantomento, dell'aritmetica) e problema della soluzione.

Schröder enuncia esplicitamente quest'ultimo nel *Lehrbuch* quando afferma di voler trovare, data un'equazione, tutte le sue possibili conseguenze. A partire da ciò si definisce *calcolo* l'insieme di tutte le possibili conseguenze di un'identità. In questo modo, la creazione di un calcolo è strettamente dipendente dal trattamento dell'Auflösungsproblem. Questa visione verrà adottata, 20 anni più tardi, nel terzo volume delle *Lezioni*, all'interno dell'algebra dei relativi. Là, infatti, si potrà parlare di calcolo solo *attraverso* tale problema.

Per quanto riguarda, invece, la visione della logica di Schröder, essa muta col passare degli anni, fino a diventare modello dell'algebra dei

[7] [**Schröder, 1873**]. Da notare che nessun volume seguì la pubblicazione del primo.

[8] [**Schröder, 1966**, p. vii].

[9] [**Schröder, 1966**, pp. v - vi].

[10] I simboli $<$ e $\leq$ sostituiscono quelli originali di Schröder per esigenze tipografiche.

relativi. Si ptrebbero, pertanto, individuare tre componenti del pensiero schröderiano, a partire dal *Lehrbuch*:

(1) fondazione dell'aritmetica
(2) creazione di un calcolo
(3) rapporti tra logica e matematica

Noi affronteremo, nel seguito, solo le prime due direttrici, in quanto la teoria dei relativi si limitò, come vedremo, solo ad evidenziare la struttura algebrica del calcolo delle relazioni, rimandando la parte logica, che viene vista come modello di tale struttura, ad un volume sucessivo che, però, non vide mai la luce.

Da notare che Schröder si avvicinò alla logica con un approccio calcolistico, stimolato dalla lettura della *Formenlehre*[11] di Robert Grassmann. Sempre in quegli anni, Schröder pubblica *Über die formalen Elemente des absoluten Algebra*.[12] Seguendo una consuetudine stabilita, nel periodo di Baden-Baden, Schröder perfezionò il russo. Si sposta, quindi, nel 1864 a Darmstadt, per giungere, poi, nel 1876 al politecnico di Karlsruhe. A Karlsruhe, Schröder rimase fino alla morte.

4. A Karlsruhe

Karlsruhe, benchè fosse una piccola cittadina, nondimeno era molto viva dal punto di vista culturale, tanto che il suo politecnico, durante il rettorato di Schröder, accolse figure del calibro di Heinrich Hertz (1857 - 1894), che scoprì proprio a Karlsruhe nel 1885 le onde elettromagnetiche, e Carl Friedrich Benz (1844 - 1929).

Da ora in poi, Schröder inizia a tenere dei corsi di logica, iniziando nel 1876 con un corso dal titolo *La logica a partire dalla matematica*, dal cui titolo è già evidente come per il *primo* Schröder la logica derivasse dalla matematica, posizione, questa, che verrà capovolta nel *secondo* Schröder, quando, cioè, la logica, in particolare quella dedekindiana, verrà chiamata in causa a fondare la teoria dei naturali. Al proposito, è opinione diffusa che Schröder scrivesse i suoi testi di logica a partire dal materiale svolto in corsi precedenti. Di questa opinione è Volker Peckhaus quando afferma:

[11] [**Grassmann, 1872**], ora ristampato come [**Grassmann, 1966**].
[12] [**Schröder, 1874**].

> A differenza di Frege, Schröder usava i suoi corsi per *preparare* i suoi testi logici.[13]

Questa opinione è di certo rafforzata dal fatto che gli scritti logici di Schröder vennero pubblicati appena dopo la conclusione di corsi sullo stesso argomento. Si noti che ciò non implica affatto che dopo la loro *redazione* Schröder li usasse nell'insegnamento. Per usare la parole di Randall R. Dipert:

> L'impressione facilmente suscitabile che le possenti *Vorlesungen* fossero lezioni di corsi pluriannuali in logica, è quasi certamente falsa. Non esiste alcuna evidenza del loro utilizzo nell'insegnamento, se non in rare occasioni (...).[14]

I testi logici schröderiani sono il *frutto* di ricerche svolte durante i corsi, non dei manuali, anche se va sottilineata l'importanza pedagogica, *pace* Dipert, che Schröder attribuiva al suo lavoro.

Nel 1877 esce l'*Operationskreis des Logikkalkuls*.[15] In questo testo, Schröder porta a compimento il calcolo booleano emendandolo da alcune lacune:

> Lo studio dell'opera booleana mi faceva scorgere il motivo della sua dimenticanza, in parte almeno, in alcune imperfezioni di cui soffriva il metodo di G. Boole, e mi spinse a pubblicare un testo, già apparso presso Teubner, dal titolo: *La sfera operazionale del calcolo logico* [Der Operationskreis des Logikkalkuls], in cui (...) sia la fondazione che la tecnica del calcolo vengono portate ad un effettivo completamento.[16]

In altre parole, l'*Operationskreis* è dedicato al calcolo delle classi, in cui viene assunta come relazione primitiva quella d'*identità*. Qui, Schröder esprime per la prima volta in modo netto il concetto di *dualità*. L'autore condensa i motivi di interesse dell'*Operationskreis* in quattro punti:

(1) semplificazione dell'apparato calcolistico

(2) messa in luce del dualismo tra addizione e moltiplicazione e tra sottrazione e divisione

---

[13] [**Peckhaus, 2004**, p. 7 della versione pre-print]. Il corsivo è nel testo. La traduzione è mia.

[14] [**Dipert, 1991b**, p. 122].

[15] [**Schröder, 1877a**], ora ristampato come [**Schröder, 1966**].

[16] [**Schröder, 1877b**, p. 482]. La traduzione è mia.

(3) introduzione della *negazione*

(4) elaborazione di una teoria delle operazioni inverse (sottrazione e divisione)

Il testo si conclude con l'esposizione dell'Auflösungsproblem nel calcolo delle classi e con una sua applicazione ad un problema posto da Boole. Nel 1878 tiene un corso dal titolo *La logica considerata come una disciplina matematica*, ed inizia a tenere lezioni sull'*algebra della logica*.

4.1. Arriviamo, così, all'opera fondamentale di Schröder, le *Lezioni sull'algebra della logica*, il cui primo volume venne pubblicato nel 1890.[17] Come al solito, la logica usata da Schröder è estensionale. Questo primo volume ha di mira il calcolo dell'*inclusione* tra classi, e prosegue il lavoro svolto nell'*Operationskreis*. Non a caso, viene assunta come relazione primitiva quella di *sussunzione*. Qui, Schröder mostra come un reticolo non sia necessariamente *distributivo*. Infatti, viene dimostrato un *solo* verso della legge di distributività,

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \tag{1}$$

affermando l'impossibilità di dimostrare, in questo contesto, l'altro verso. Di più,

> (...) in un'appendice del volume, Schröder esibisce addirittura una dimostrazione rigorosa che ciò è impossibile (...).[18]

Altro limite di questo calcolo è che può trattare solo giudizi *universali*. Il secondo volume delle *Lezioni* uscirà nel 1891.[19] Questo testo espone, invece, il calcolo proposizionale. Ora, Schröder riesce a trattare anche i giudizi *particolari*, esprimendo *qualche* A *è* B, come

$$A \cap B \neq \emptyset \tag{2}$$

Il terzo ed ultimo volume delle *Lezioni* esce incompiuto nel 1895.[20] Qui, Schröder elabora la teoria dei relativi peirceani. Inizialmente, tale testo doveva essere di dimensioni contenute, ma ben presto assunse una forma gigantesca. Nella teoria dei relativi, accanto alle usuali operazioni del calcolo

[17] [**Schröder, 1890**], ora ristampato come [**Schröder, 1966**].

[18] [**Schröder, 1966**, p. xi].

[19] [**Schröder, 1891**], ora ristampato come [**Schröder, 1966**].

[20] [**Schröder, 1895b**], ora ristampato come [**Schröder, 1966**].

delle classi, cioè, $\cap$, $\cup$, e $-$, intersezione, unione e complemento, rispettivamente, abbiamo tre operazioni relative: il prodotto e la somma *peirceani*, e la *conversa*. Si distinguono, poi, quattro relazioni particolari: la relazione *totale*, la relazione *vuota*, la *diagonale* e l'*anti-diagonale* (da noi notate, rispettivamente, con V^2, Λ^2, Id e Di). In simboli, per R, S, relazioni:

(**Relazione totale**) $V^2 \leftrightarrow [\,\langle x, y\rangle \mid x \in V \wedge y \in V\,]$

(**Relazione vuota**) $\Lambda^2 \leftrightarrow -V^2$

(**Diagonale**) $\langle x, y\rangle \in \mathsf{Id} \leftrightarrow ((\langle x, y\rangle \in V^2 \wedge (x = y))$

(**Anti-diagonale**) $\langle x, y\rangle \in \mathsf{Di} \leftrightarrow ((\langle x, y\rangle \in V^2 \wedge (x \neq y))$

(**Prodotto peirceano**) $\langle x, y\rangle \in (R \circ S) \leftrightarrow \exists z(\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in S)$

(**Somma peirceana**) $\langle x, y\rangle \in (R \bullet S) \leftrightarrow \forall z(\langle x, z\rangle \in R \vee \langle z, y\rangle \in S)$

(**Conversa**) $\langle x, y\rangle \in R^{-1} \leftrightarrow \langle y, x\rangle \in -R$

Non è chiaro il motivo che fece sí che le *Lezioni* rimanessero incompIute. Lüroth sottolinea che negli ultimi anni Schröder era divenuto incapace di sopportare i suoi obblighi di insegnante, a causa di una forte depressione. Tale malattia avrebbe minato la salute vigorosa di Schröder, impedendogli il completamento della sua opera. Dipert, però, non accenna a nessuna forma di depressione, limitandosi ad osservare che gli hobbies di Schröder lo avrebbero distratto da impegni più importanti. In questo stesso senso avrebbero agito i suoi doveri di docente. Non bisogna, infatti, dimenticare che Schröder lavorava alle sue ricerche di notte, non avendo altro tempo disponibile.

5. La morte

Schröder morì a Karlsruhe il 16 giugno 1902. Sempre secondo Lüroth, la causa del decesso fu una polmonite che Schröder contrasse dopo un avventato giro in bicicletta. Peckhaus contesta questa versione, adducendo la testimonianza di Voigt, che si addottorò peraltro con Lüroth, secondo il quale Schröder, affetto da depressione, si sarebbe avvelenato:

> (...) [Schröder] divenne completamente inavvicinabile (...), e alla fine giunse ad una triste morte suicidandosi (con del veleno).[21]

[21] Lettera di Andreas Heinrich Voigt a Andrew D. Osborn, Frankfurt, 23 ottobre 1932, cit. in [**Peckhaus, 2004**, p. 8 della versione pre-print].

La questione è difficilmente dirimibile, perché Lüroth (che sembra poter esser l'unico ad aver passato le informazioni a Voigt) è molto cauto sull'argomento. Egli si limita a constatare l'incapacità di Schröder di proseguire il suo lavoro, malgrado un'eccellente forma fisica, e a ringraziare il cielo che fece sí che un'improvvisa morte salvasse Schröder da una lunga malattia.[22] Accenna, sí, alla depressione, ma non le imputa la morte di Schröder. Io credo che tutto ciò che si possa dedurre è che una polmonite improvvisa fosse l'*unica* origine del decesso di uno Schröder già minato dalla depressione.

Da notare, infine, che il nostro non aveva nessuno che potesse condividere il suo fardello esistenziale, perché non si sposò mai.

[22] [**Schröder, 1966**, p. xvii].

CAPITOLO 2

L'enigma del fondazionalismo

1. Introduzione

Nella nona lezione delle *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Schröder traduce in termini di relativi la teoria delle catene dedekindiana. Dedekind, com'è noto, aveva introdotto il concetto di *catena* nel 1888 nel suo fondamentale *Was sind und was sollen die Zahlen?* per definire la nozione di numero naturale. L'idea di fondo di Dedekind era che, malgrado le apparenze, quello di numero non era un concetto *semplice*, bensí composto:

> (...) risulta così che alcuni concetti, in verità assai complicati (come per esempio quello di numero di cose), vengano ritenuti semplici.[1]

In realtà, il concetto di numero cardinale inizia a far parte del patrimonio esperienzale di un individuo, solo dopo che questi ha già appreso quello di numero *ordinale*. Infatti, l'uomo è capace di mettere in relazione gli oggetti molto prima di saperli misurare con certezza.

> Fin dalla nostra nascita, costantemente e in misura sempre crescente, siamo messi nella condizione di mettere in relazione cose con cose, e di esercitare quella facoltà dello spirito su cui si fonda anche la creazione dei numeri (...).[2]

La ragione che porta l'uomo a considerare erroneamente i numeri come delle entità semplici e intuitive deriva, così dalla *familiarità* con essi acquisita mediante questo continuo esercitarsi a paragonare oggetti con oggetti. Da questa attività l'individuo apprende le sue prime verità matematiche a cui farà appello il suo futuro insegnante come a qualcosa di *dato*

[1] [**Dedekind, 1888**, p. v]. Le traduzioni da questo testo sono mie.
[2] [**Dedekind, 1888**, ivi].

e di intuitivo. Dedekind, tuttavia, con lo scritto del 1888, non si limita a dimostrare questa sua tesi; in questo contesto egli vuole anche provare l'assoluta indipendenza del concetto di numero dalle nostre intuizioni spazio-temporali:

> (. . .) io ritengo che il concetto di numero sia completamente *indipendente* dalle rappresentazioni o intuizioni di spazio e tempo, anzi che sia un immediato prodotto delle pure leggi del pensiero. [3]

Affermare l'origine dalle *pure leggi del pensiero* [reine Denkgesetze] del concetto di numero significa sostenere la sua origine logica. Non a caso, Dedekind considerava la matematica come una parte di essa:

> (. . .) considero l'aritmetica (l'algebra, l'analisi) solo una parte della logica. [4]

Si noti, incidentalmente, come Dedekind insisti coll'affermare che ogni enunciato dell'algebra e dell'analisi sia riformulabile aritmeticamente, quando tutto ciò è in netto contrasto con il suo lavoro. Infatti le *sezioni* con le quali Dedekind definisce gli irrazionali non appertengono certo al dominio dell'aritmetica. Non è, quindi, per nulla chiaro il motivo che spinse Dedekind ad evidenziare che

> (. . .) sembra qualcosa di evidente e non nuovo, che ogni enunciato . . . dell'algebra e dell'analisi superiore si lasci esprimere come un enunciato sui numeri naturali, un'affermazione che ho udito ripetutamente dalla bocca di Dirichelet.[5]

Sembra di assistere ad una spaccatura tra ciò che Dedekind avrebbe voluto fare e ciò che in realtà fece. Comunque, Dedekind può affermare che i numeri sono *libere creazioni dello spirito umano*, dipendendo solo dalle leggi pure del suo pensiero:

> (. . .) i numeri sono libere creazioni dello spirito umano, essi servono come un mezzo per afferrare con maggior facilità e precisione la diversità delle cose. [6]

Altro aspetto importante del testo di Dedekind, è che vi si trova per la prima volta dimostrato il principio di induzione, senza cadere in un circolo vizioso, come, invece, era accaduto per altri matematici. Formalmente, per una qualsiasi proprietà $\wp$:

---

[3] [**Dedekind, 1888**, p. iii]. Il corsivo mio.

[4] [**Dedekind, 1888**, ivi].

[5] [**Dedekind, 1888**, p. 5].

[6] [**Dedekind, 1888**, p. iii].

PRINCIPIO DI INDUZIONE. *Ipotesi: vale* $\wp(0)$*, e ogni volta che vale* $\wp(n)$*, vale anche* $\wp(n+1)$*; Tesi: per ogni naturale* n*, vale* $\wp(n)$*.*

Quello che fa Dedekind è dimostrare questa tesi senza far riferimento alla capacità di contare. Infine, non va dimenticata la distinzione tra *finito* e *infinito*, fondamentale nel lavoro di Dedekind.

1.1. Ma vediamo le cose un po' più da vicino. Anzitutto, per *sistema* (S), Dedekind intende una collezione di *cose*. Dove una *cosa* è semplicemente un qualsiasi oggetto del nostro pensiero. Da notare come per Dedekind anche un sistema sia un oggetto:

> Un tale sistema S (...) è esso stesso, in quanto oggetto del nostro pensiero, una cosa (...). [7]

Valgono tra i sistemi alcune importanti relazioni sulle quali non ci soffermiamo.

Per *rappresentazione* [Abbildung] di un sistema, Dedekind intende una qualsiasi legge[8] che permetta di associare ad ogni elemento di un sistema un dato oggetto, o immagine; se s è un elemento di un sistema S, e f tale legge, indicheremo con $f(s)$ l'immagine di s. Dedekind indica l'immagine di s, semplicemente con s', poiché presuppone come *data* una specifica rappresentazione. Detto meglio, tutte le volte che Dedekind scrive s' presuppone una particolare rappresentazione, che applicata ad s associ ad s un'immagine. In questo modo, Dedekind non ha *affatto* bisogno ogni volta di indicare nel suo simbolismo la rappresentazione in questione, poiché in ogni contesto essa viene *univocamente* presupposta.

1.1.1. Qualche parola sul simbolismo usato da Dedekind; egli utilizza il segno '$\prec$' per indicare la relazione di inclusione, oggi scritta prevalentemente con '$\subseteq$'. Unione ($\cup$), ed intersezione ($\cap$) vengono da lui notate, rispettivamente con '$\mathcal{S}$' e '$\mathcal{G}$'. Noi utilizzeremo anche i connettivi '$\neg$', '$\wedge$', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$' per indicare la negazione, la congiunzione, la disgiunzione, l'implicazione, e l'equivalenza logica, invece delle corrispondenti espressioni verbali usate in *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Introdurremo anche il simbolo '$\equiv$' per l'equipotenza insiemistica. Infine, laddove Dedekind usa lo '0' in pedice per indicare che un sistema è catena, noi useremo l'asterisco '*' in indice.

---

[7] [**Dedekind, 1888**, p. 1].

[8] Dedekind usa qui l'espressione *Gesetz*, da noi tradotta con *legge*.

1.2. Ricordo che una funzione f si dice *iniettiva* quando associa immagini diverse ad argomenti diversi; ossia, se $f(x) = f(y)$, allora $x = y$. Dedekind usa, in questo caso, l'espressione *distinta* [deutlich], o *simile* [änlich]. [9] Noi ci atterremo alla consuetudine moderna, e parleremo di rappresentazione, o funzione, iniettiva.

1.2.1. Dedekind definisce l'insieme dei naturali come il più piccolo insieme contenente lo 0 e chiuso rispetto alla funzione successore. Per far ciò ha bisogno del concetto di *catena*. Una catena, semplicemente, è un insieme chiuso rispetto ad una data funzione iniettiva; in particolare, un insieme A è chiuso rispetto alla funzione iniettiva f sse se $a \in A$, allora $f(a) \in A$.[10] A questo punto, si tratta di definire il più piccolo insieme chiuso rispetto ad una data funzione iniettiva f e contenente un insieme dato. Dedekind non usa l'espressione 'chiusura', essa verrà introdotta più tardi dalla topologia, ma è evidente che caratterizza in maniera adeguata il concetto della *più piccola catena contenente un dato insieme* così come viene introdotto qui.

Dedekind parla dell'intersezione di tutti gli insiemi f-chiusi contenenti un insieme A come della più piccola catena rispetto ad f contenente A.

A questo punto si può introdurre il concetto di *induzione completa* sfruttando quanto acquisito a proposito delle catene; sia dato un generico insieme S,

> **Enunciato di induzione completa**. Per dimostrare che la catena A^* è inclusa in un dato insieme Σ – sia questo o no sottoinsieme di S – è sufficiente mostrare,
>
> ρ**:** che $A \subseteq \Sigma$, e
>
> σ**:** che l'immagine di ogni elemento comune ad A^* e Σ è in ogni caso elemento di Σ. [11]
>
> Per dimostrare che tutti gli elementi della catena A^* soddisfano una certa proprietà $\wp\,(\ldots)$, è sufficiente mostrare
>
> ρ**:** che tutti gli elementi a dell'insieme A soddisfano $\wp\,(\ldots)$, e
>
> σ**:** che ogni immagine $f(n)$ di ogni elemento n di A^*, che soddisfa $\wp$, soddisfa questa stessa proprietà $\wp\,(\ldots)$. [12]

Cioè, tutti gli elementi di una catena A^* soddisfano una data proprietà $\wp$, quando

---

[9] [**Dedekind, 1888**, p. 7].

[10] [**Dedekind, 1888**, p. 9].

[11] [**Dedekind, 1888**, p. 12].

[12] [**Dedekind, 1888**, p. 12].

(1) ogni elemento di A soddisfa $\wp$,
(2) e, se un elemento n di A^* soddisfa questa proprietà, allora la soddisfa anche $f(n)$.

Dedekind formula, così, il *suo* concetto di insieme *infinito*[13]: un insieme S si dice *infinito* quando è rappresentabile iniettivamente in un suo sottoinsieme *proprio*; in caso contrario, si dirà *finito*. Un insieme S_1, a sua volta, è equipotente ad un insieme S_2 sse esiste un'iniezione f t.c. per ogni $s \in S_1$, $f(s) \in S_2$ e per ogni $s \in S_2$ esiste un $s' \in S_1$ tale che $f(s') = s$. Il fatto, invece, che $S_1 \equiv S_2$ sse S_1 è rappresentabile iniettivamente in S_2, e viceversa costituisce il teorema di Cantor - Schröder - Bernstein e richiede un'opportuna dimostrazione. Un insieme $\mathbb{N}$ si dirà, invece, *semplicemente infinito* quando esisterà una funzione f di $\mathbb{N}$ in sé stesso, tale che $\mathbb{N}$ è la catena di uno ed uno sol elemento non contenuto in $f(\mathbb{N})$. Chiamiamo quest'elemento *elemento fondamentale* [Grundelement] di $\mathbb{N}$. Come si vede facilmente, questo è l'elemento che *genera* la catena. Indichiamolo con '1'; allora,

> (...) l'essenza di un insieme semplicemente infinito N consisterà nell'esistenza di una funzione f di $\mathbb{N}$, e in un elemento 1, che soddisfano le condizioni α, β, γ, δ seguenti:
> α**:** $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$
> β**:** $\mathbb{N} = 1^*$
> γ**:** l'elemento 1 non è contenuto in $f(\mathbb{N})$
> δ**:** la funzione f è iniettiva [14]

In questo modo, Dedekind non ha definito il concetto di numero naturale, bensì quello di *sistema di numeri naturali*. Mentre Frege sarà interessato a sapere cos'è il numero 3, il 4, ecc., Dedekind si preoccupa di definire un *sistema* di numeri naturali come un insieme *chiuso* rispetto ad una data funzione, cioè come una *catena*. La prospettiva dedekindiana, pur essendo molto simile a quella di Giuseppe Peano, se ne discosta per un aspetto fondamentale. Anche Peano non definisce i *singoli* numeri, ma introduce due importanti nozioni rispetto a Dedekind: quella di *linguaggio* per gli assiomi e quella di *modello*. In questo modo, benchè Peano considerasse la struttura dei naturali come *l'unica* struttura dei suoi assiomi, si è poi visto che esistono altri modelli, che pur soddisfacendo gli assiomi in questione, non coincidono con quello dei naturali. In altre parole, Peano rende *possibile* la ricerca di modelli che soddisfino gli assiomi e non siano isomorfi al

---

[13] E' importante sottolineare che questa definizione di insieme infinito è puramente dedekindiana. Esistono, infatti, definizioni alternative.

[14] [**Dedekind, 1888**, p. 16].

modello inteso. Vale a dire, i cosiddetti modelli *non standard*. Ciò non è possibile all'interno della prospettiva dedekindiana. Va detto, in ogni caso, che Peano pensava di fare più o meno la *stessa* cosa di Dedekind e, cioè, di caratterizzare il sistema dei numeri naturali in maniera univoca. Siamo noi, dopo un'attenta ricognizione del lavoro peaniano, ad aver visto che gli assiomi di Peano erano soddisfatti anche da modelli non strandard.

Possiamo leggere in maniera *peaniana* le condizioni $\alpha - \delta$, assumendo come rappresentazione f la funzione successore $\mathfrak{S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Avremo così:

α': il successore di un numero naturale è ancora un numero naturale
β': l'insieme dei numeri naturali coincide con la catena generata dall'elemento fondamentale 1 rispetto alla funzione successore
γ': 1 *non* è successore di alcun numero
δ': se il successore di n coincide con quello di m, allora $n = m$ (cioè, la funzione successore è iniettiva)

Si confrontino questi assiomi con quelli dati da Peano:

(1) 1 è un numero
(2) il successore di un numero è un numero
(3) due numeri aventi successori uguali sono a loro volta uguali
(4) 1 non è il successore di alcun numero
(5) se k è una classe tale che 1 appartiene a k e inoltre per ogni numero x se x appartiene a k allora anche $x + 1$ appartiene a k, allora k contiene la classe $\mathbb{N}$ [15]

Come si vede facilmente, 2 corrisponde ad α', 3 a δ', 4 a γ', e 1 e 5 a β'. Tornando a Dedekind, l'essenziale delle condizioni $\alpha - \delta$ è che qui si fa completa *astrazione* dalla specificità degli elementi di $\mathbb{N}$, e dalla funzione f. E' per questo motivo che Dedekind può rivendicare l'origine logica del concetto di numero, la sua nascita dalle *pure leggi del pensiero*:

> Se, considerando un sistema semplicemente infinito, ordinato dalla funzione f, *prescindiamo completamente dalle peculiari caratteristiche degli elementi*, limitandoci alla loro distinguibilità, e prendiamo in considerazione *solo i rapporti in cui si trovano l'un l'altro in virtù della funzione d'ordine* f, questi elementi si chiamano **numeri naturali**, o **numeri ordinali**, o semplicemente **numeri**, e l'elemento fondamentale 1 si dice **numero fondamentale** della **serie numerica** $\mathbb{N}$. In rapporto a questa *liberazione degli elementi da ogni*

[15] Citati in [**Mangione e Bozzi, 1993**, p. 300].

> *altro contenuto (astrazione)* si possono definire i numeri, a ragione, una libera creazione della spirito umano. [16]

E' evidente, come giustamente è stato sottolineato da Mangione e Bozzi, da queste parole, il tentativo di Dedekind di sganciare l'atto *creativo* che sottostà all'introduzione dei numeri naturali da ogni residuo psicologistico.[17] Anche se rimane nel concetto di *astrazione* ancora un che di ingenuo ed intuitivo e, quindi, in ultima anlisi, di *soggettivo*.[18] Sarà, infatti, Frege com'è noto ad adoperarsi per dare una *rigorosa sistemazione* al concetto di astrazione, aliena da qualsiasi forma di psicologismo. [19]

2. La ricezione di Schröder delle idee dedekindiane

Prima di occuparci del testo schröderiano, è bene soffermarsi un attimo a dare alcune convenzioni simboliche. Al solito, adotteremo una rappresentazione moderna onde rendere più accessibile il dettato schröderiano. Anzitutto, indicheremo le classi con le lettere maiuscole 'A', 'B', 'C', $\ldots$, e le relazioni con 'R', 'S', 'T', ecc., riservando le lettere minuscole 'x', 'y', 'z', $\ldots$ per le variabili individuali, e 'a', 'b', 'c', $\ldots$ per le costanti individuali (nella terminologia di Schröder, *individui*). Schröder, invece, utilizza le lettere minuscole 'a', 'b', 'c', $\ldots$ tanto per le classi quanto per le relazioni, e 'i', 'j', 'k', $\ldots$ tanto per le costanti quanto per le variabili individuali.

L'autore delle *Lezioni* usa il simbolo ';' per notare la composizione delle relazioni, in quanto segno *non*-simmetrico; infatti, a differenza del prodotto tra classi, quello tra relazioni non è *in generale* commutativo. Per la stessa ragione, Schröder usa per la somma peirceana il simbolo '†'. [20] Noi useremo, rispettivamente, i segni '$\circ$' e '$\bullet$'. L'inclusione tra classi o relazioni

[16] [**Dedekind, 1888**, p. 17]. Il corsivo è mio.

[17] Vedi, [**Mangione e Bozzi, 1993**, pp. 296 – 297].

[18] [**Mangione e Bozzi, 1993**, p. 297].

[19] [**Mangione e Bozzi, 1993**, p. 351].

[20] Schröder rimprovera a Peirce di aver scelto dei simboli simmetrici per queste operazioni non sempre commutative. Vedi, [**Schröder, 1966**, p. 33]. I simboli scelti da Schröder per la composizione di relazioni, e per l'inclusione *im*propria vengono qui sostituiti, per esigenze tipografiche, da '†', e '$\leq$', rispettivamente, seguendo R. Maddux (vedi [**Maddux, 2001**]).

viene simbolizzata da Schröder con '$\leq$'. Tale simbolo, sulla scia di Peirce,[21] , viene introdotto come segno primitivo da cui si deduce, poi, quello di uguaglianza. Infatti, due classi (relazioni) vengono definite *identiche* quando sono incluse l'una nell'altra. Noi sostituiremo al segno '$\leq$' il più familiare '$\subseteq$'. Come è noto, Schröder usa il simbolo '$\leq$' anche per indicare l'implicazione; noi cercheremo di eliminare questa ambiguità, introducendo il simbolo '$\rightarrow$' per il '*se* ... *allora* ...'

I simboli schröderiani per la quantificazione esistenziale ed universale sono, rispettivamente, '$\sum$' e '$\prod$'. Ciò si spiega con il fatto che Schröder intende la quantificazione esistenziale come una somma (in)finita di funzioni proposizionali, e il simbolo '$\sum$' viene introdotto espressamente per abbreviare tale somma. Cioè,

$$\sum xA(x) = A(a) + A(b) + A(c) + \cdots \tag{3}$$

Allo stesso modo, $\prod$ abbrevia un prodotto di funzioni proposizionali potenzialmente infinito:

$$\prod xA(x) = A(a) \cdot A(b) \cdot A(c) \cdots \tag{4}$$

L'autore tedesco ammette la necessità di introdurre i quantificatori in maniera autonoma, ossia, non come semplici abbreviazioni, solo nel caso in cui il loro campo abbia la cardinalità dei reali, cioè sia più che numerabile. [22] Questo fatto, cioè che in tal caso i segni dei quantificatori debbano essere introdotti come segni primitivi, è degno di nota. Schröder, infatti, prende in considerazione somme e prodotti infiniti e quantifica anche su insiemi continui. Con questa precisazione, Schröder mostra di aver capito la vera natura dei quantificatori e la differenza tra quantificare un insieme infinito ma *numerabile* ed uno infinito ma *non numerabile*. In breve, il campo dei quantificatori può essere

(1) finito
(2) infinito

[21] Al proposito vedi le osservazioni del filosofo americano in [**Peirce, 1870**], ora in [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 28]:

> Ora, qualsiasi identità è un inclusione, ma non è vero il viceversa; pertanto, l'inclusione è un concetto più ampio dell'uguaglianza, e, dal punto di vista logico, più *semplice* [la traduzione e il corsivo sono miei].

[22] [**Schröder, 1966**, p. 41]: In tali casi [cioè, quando il campo ha la cardinalità di $\Re$] i simboli '$\prod$' e '$\sum$' rimangono definitivamente ineliminabili, poiché non sarebbe più possibile, per esempio, indicare come un *effettivo* [aktuelles] prodotto, con tutti i suoi fattori, in maniera esplicita, il prodotto proposizionale "simbolicamente" rappresentato come '$\prod$' [le traduzioni da questo testo sono mie].

Nel primo caso $\sum$ e $\prod$ vengono introdotti come semplici abbreviazioni. Nel secondo caso bisogna precisare se la cardinalità del campo è *numerabile* o *più che numerabile*. Nel caso che essa sia *numerabile*, i quantificatori sono ancora delle pure abbreviazioni;[23]; nel caso che essa sia, invece, *più che numerabile* i quantificatori vanno introdotti come segni primitivi. Noi denoteremo $\sum$ e $\prod$, al solito, come '$\exists$' e '$\forall$'.

Schröder indica, poi, il complemento di una classe o relazione, apponendovi sopra un trattino. Così, data una classe A, $\bar{A}$ sarà il suo complemento. Noi indicheremo il complemento con '$-$'.

Ancora, prodotto e somma identici[24] vengono da Schröder simbolizzati, rispettivamente, con un puntino o con la semplice giustapposizione di simboli, e con il segno '$+$'. Noi adotteremo nel primo caso il segno di intersezione '$\cap$', e nel secondo quello di unione '$\cup$'.

Schröder sottolinea quattro relazioni particolari, da lui chiamate *moduli*. [25] Egli le indica con '1', '0', '$1'$', '$0'$'. 1 è la relazione *universale*, cioè la relazione soddisfatta da qualsiasi coppia di costanti. Essa coincide con l'universo di discorso del calcolo dei relativi. [26] 0 è la relazione *vuota*; essa viene introdotta come la negazione di 1, ed infatti, a differenza di questa, *non* viene soddisfatta da nessuna coppia di elementi appartenenti al dominio. [27]

$1'$ è la relazione detta *diagonale* che include tutte quelle coppie di elementi appartenenti al dominio in cui il relato *coincide* con il correlato. In

---

[23] In questo caso, però, sono una *sorta* di *limite* di una successione infinita di addendi o fattori:

> (...) per un campo composto da una successione "semplicemente infinita" [cioè, numerabile] di oggetti discreti u, si ottiene il nostro $\prod xA(x)$, per così dire, come "valore limite" [Grenzwert] mediante un numero infinito di successive moltiplicazioni di fattori proposizionali [**Schröder, 1966**, p. 39].

[24] Si parla di somma e prodotto *identici*, in quanto operazioni appartenenti al calcolo *identico*, o calcolo delle classi [Gebietekalkül]. Schröder definisce tale calcolo *identico*, in quanto *presupposto* dalla logica e appartenente alla matematica:

> Il momento logico fondamentale (...) per Schröder (...) è il calcolo delle classi (*Gebietekalkül*); egli lo chiama "calcolo identico" (...) perché lo riguarda come una "disciplina ausiliaria che precede la logica (...) ed è di natura puramente matematica" ([**Mangione e Bozzi, 1993**, p. 190]).

[25] [**Schröder, 1966**, p. 27].

[26] [**Schröder, 1966**, pp. 25–26]:

> [1] è l'*universo*, la *somma totale*, il *tutto* o la *totalità* dell'universo di discorso, la somma di *tutti* i suoi individui o coppie di elementi.

[27] [**Schröder, 1966**, p. 26]:

> [Lo 0] *non* contiene *proprio* nessuna coppia di elementi del nostro universo di discorso (...).

altre parole, $1'$ è la relazione d'identità. $0'$, la relazione *anti*-diagonale, è la negazione di $1'$ e contiene tutte quelle coppie di elementi del dominio in cui il relato è *diverso* dal correlato. Essa costituisce la relazione di diversità.

Come 1 e 0 costituiscono l'elemento neutro, rispettivamente, del prodotto (identico) e della somma (identica), così $1'$ e $0'$ costituiscono l'elemento neutro, rispettivamente, del prodotto e della somma relativi. [28] Noi indicheremo tali moduli, rispettivamente, con i simboli 'V^2', 'Λ^2', 'Id' e 'Di'.

Schröder indica la conversa di una relazione apponendovi sopra il simbolo '$\smile$'; noi useremo '$^{-1}$'. La catena viene indicata nelle *Lezioni*, seguendo Dedekind, con uno '0' in pedice; noi la indicheremo, come in precedenza, con un asterisco '*'. Laddove per simbolizzare l'immagine di una catena Schröder fa ricorso a due '00' in pedice, noi useremo il segno '$^+$' in apice. Il problema sorge per la duale della catena (Gekett) e per la duale della sua immagine; Schröder le indica, rispettivamente, con un '1' e un doppio '1' in pedice. Dato che nella letteratura moderna non ci sono segni per rappresentare queste operazioni, [29] noi aggiungeremo semplicemente alla notazione della catena e della sua immagine una 'g' in pedice. Infine, faremo ricorso agli usuali connettivi $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ per tradurre le corrispondenti locuzioni linguistiche delle *Vorlesungen* e al segno d'appartenenza '$\in$'.

2.0.2. Passiamo, adesso, a dare qualche definizione ed importante equivalenza. Per ognuna di esse daremo la traduzione nel simbolismo moderno, e un'esemplificazione linguistica.

$$a = \sum_{i,j} a_{i,j} \quad \text{(relazione)} \tag{5}$$

Da cui si ottiene,

$$R = [\,\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in V^2 \wedge \langle x, y\rangle \in R\,]$$

$$(ab)_{ij} = a_{ij}b_{ij} \quad \text{(prodotto identico)} \tag{6}$$

$$\langle x, y\rangle \in (R \cap S) \leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in S$$

$$(a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{(somma identica)} \tag{7}$$

$$\langle x, y\rangle \in (R \cup S) \leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R \vee \langle x, y\rangle \in S$$

$$\bar{a}_{ij} \quad \text{(complemento)} \tag{8}$$

$$-R \leftrightarrow [\,\langle x, y\rangle \mid x \in V \wedge y \in V \wedge \langle x, y\rangle \in -R\,]$$

[28] [**Schröder, 1966**, p. 120]. Vedi le formule $11_{;}$ e $11_{+,}$.

[29] Vedi [**Pratt,**][p. 1 della versione online].

(9) $$(a;b)_{ij} = \sum_h a_{ih}b_{hj} \quad \text{(prodotto peirceano)}$$

$$\langle x,y\rangle \in (R\circ S) \leftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in R \wedge \langle z,y\rangle \in S)$$

(10) $$(a\dagger b)_{ij} = \prod_h (a_{ih} + b_{hj}) \quad \text{(somma peirceana)}$$

$$\langle x,y\rangle \in (R\bullet S) \leftrightarrow \forall z(\langle x,z\rangle \in R \vee \langle z,y\rangle \in S)$$

(11) $$\breve{a}_{ij} = a_{ji} \quad \text{(conversa)}$$

$$\langle x,y\rangle \in R^{-1} \leftrightarrow \langle y,x\rangle \in -R$$

(12) $$1_{ij} = 1 \quad \text{(relazione totale)}$$

$$V^2 \leftrightarrow [\,\langle x,y\rangle \mid x\in V \wedge y \in V\,]$$

(13) $$0_{ij} = 0 \quad \text{(relazione vuota)}$$

$$\Lambda^2 \leftrightarrow -V^2$$

(14) $$1'_{ij} = (i=j) \quad \text{(diagonale)}$$

$$\langle x,y\rangle \in \mathsf{Id} \leftrightarrow (\langle x,y\rangle \in V^2 \wedge (x=y))$$

(15) $$0'_{ij} = (i\neq j) \quad \text{(anti-diagonale)}$$

$$\langle x,y\rangle \in \mathsf{Di} \leftrightarrow (\langle x,y\rangle \in V^2 \wedge (x\neq y))$$

Dalle definizioni precendenti seguono alcuni teoremi:

(16)
$$R\circ R^{-1} \subseteq \mathsf{Id} \leftrightarrow \forall xyz(\langle x,z\rangle \in R \wedge$$
$$\wedge\, \langle y,z\rangle \in R \rightarrow x=y) \quad \text{(rel. univoca a sinistra)}$$

(17)
$$\mathsf{Id} \subseteq R \leftrightarrow \forall x(\langle x,x\rangle \in R) \quad \text{(riflessività)}$$

(18)
$$R = R^{-1} \leftrightarrow \forall xy(\langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R) \quad \text{(simmetria)}$$

(19)
$$R\circ R \subseteq R \leftrightarrow \forall xyz(\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \rightarrow \langle x,z\rangle \in R) \quad \text{(transitività)}$$

A proposito di (5), Schröder scrive:

> Definiamo *relativo binario* una *somma di coppie* di elementi appartenenti all'universo di discorso 1^2 [composto da tutte le possibili coppie di elementi] (...). [30]

[30] [**Schröder, 1966**, p. 22].

E, a proposito di (8):

> La negazione $\bar{a}$, o *non-a-di*, di un relativo binario a contiene (...) tutte quelle coppie di elementi dell'universo di discorso 1^2, *che non sono presenti in* a.[31]

Diamo, ora, un'esemplificazione linguistica di alcune definizioni precedenti. Siano R, S i relativi *amante-di*, e *servo-di*, rispettivamente.

i: amante e servo-di (6)
ii: amante o servo-di (7)
iii: non-amante-di (8)
iv: amante di un servo-di (9)
v: amante di tutti tranne, al massimo, i servi-di [32] (10)
vi: essere amato-da (11)

2.1. Detto questo, passiamo a trattare la teoria delle catene come sviluppata da Schröder nella lezione nona delle sue *Vorlesungen*.[33] Schröder nota come la materia di *Was sind und was sollen die Zahlen* sia in realtà divisibile in tre parti. La prima riguarda semplicemente il calcolo dei sistemi,

---

[31] [**Schröder, 1966**, p. 30]. Per quanto riguarda i riferimenti testuali delle formule schröderiane le coordinate sono le seguenti:

(5)**:** [**Schröder, 1966**, p. 22]
(6)**:** [**Schröder, 1966**, p. 29]
(7)**:** [**Schröder, 1966**, ivi]
(8)**:** [**Schröder, 1966**, ivi]
(9)**:** [**Schröder, 1966**, ivi]
(10)**:** [**Schröder, 1966**, ivi]
(11)**:** [**Schröder, 1966**, ivi]
(12)**:** [**Schröder, 1966**, p. 25]
(13)**:** [**Schröder, 1966**, ivi]
(14)**:** [**Schröder, 1966**, ivi]
(15)**:** [**Schröder, 1966**, ivi]

[32] A proposito della somma peirceana, Schröder osserva che nella lingua tedesca essa ammette due letture: una *inclusiva*, e l'altra *esclusiva*. Con la prima s'intenderebbe *amante di tutti tranne, al massimo,* [ausser] *i servi-di*, lasciando in sospeso se i servi-di vengano o meno amati; con la seconda, *amante di tutti con l'eccezione* [mit Ausnahme] *dei servi-di*. In questo secondo caso i servi-di non vengono amati. Il nostro osserva:

> Noi dovremmo sempre accuratamente distinguere nella nostra disciplina tra la particella "*ausser*" (in inglese, *but?*, *save?*, *besides?*), e "*ausgenommen*" (in inglese: *excepting*) [**Schröder, 1966**, p. 65].

Di fatto, noi con la (14) abbiamo assunto nella teoria la lettura inclusiva, parallelamente a quanto si fa di solito con la *disgiunzione*.

[33] [**Schröder, 1966**, pp. 346 – 404].

e comprende gli enunciati di Dedekind 1 – 20. [34] Questa sezione corrisponde né più né meno a il calcolo identico (o calcolo delle classi) schröderiano. Poiché il primo gruppo di *convenzioni* [Festsetzungen] alla base del calcolo dei relativi è sufficiente per sviluppare il calcolo delle classi, non c'è bisogno di tradurre gli enunciati dedekindiani in questione nell'impianto delle *Vorlesungen*. La terza parte (enunciati 21, 25, 26 – 35, 64 – 168) [35] del testo di Dedekind comprende tutti quegli enunciati sulle catene la cui validità dipende dal fatto che le rappresentazioni in questione siano univoche.

La seconda parte (enunciati 22 – 24, 36 – 63)[36], invece, comprende una serie di enunciati sulle catene che *conservano* la loro validità anche qualora si faccia riferimento a rappresentazioni non necessariamente univoche:

> [Questi enunciati] valgono non solo per la "rappresentazione" intesa nel senso di Dedekind come corrispondenza "*univoca*" [eindeutige Zuordnung], ma conservano la loro validità anche quando si usi l'espressione *rappresentazione* nel senso più ampio di cui è capace: cioè, quello che comprende una corrispondenza *talvolta anche polivoca* [mehrdeutige], o, addirittura, una corrispondenza *eventualmente anche* indefinita [unterbleibende, versagende] (...) – nei quali casi l'espressione [rappresentazione] è sinonima del concetto generale di *relativo binario*. [37]

L'intuizione di Schröder fu, appunto, quella di capire che gli enunciati di questa parte erano *indipendenti* dal concetto di funzione, e che potevano essere generalizzati sfruttando il concetto di relazione. Non solo la Kettentheorie risulta così indipendente dal concetto di funzione, ma anche da quello di *insieme*:

> Gli enunciati che questa seconda parte in sé racchiude *valgono non solo rispetto* a quei relativi definiti da Dedekind, come nella nostra teoria, *insiemi*, *ma valgono rispetto a qualsiasi tipo di relativo* (...). [38]

Ciò spiega come mai Schröder non sviluppi in questa sezione la teoria degli insiemi, rimandando l'argomento ad una lezione successiva.

---

[34] [**Dedekind, 1888**, pp. 1 – 4].

[35] [**Dedekind, 1888**, pp. 5, 6, 7 – 8, 13 – 45, rispettivamente]. Per una svista Schröder non indica l'enunciato 168 [**Schröder, 1966**, p. 352].

[36] [**Dedekind, 1888**, pp. 5 – 6, 8 – 13, rispettivamente].

[37] [**Schröder, 1966**, p. 352].

[38] [**Schröder, 1966**, ivi].

2.1.1. Mentre è innegabile riconoscere l'importanza di aver sganciato *alcuni* enunciati fondamentali sulle catene (tra cui la stessa definizione di catena) dal concetto di funzione, non è invece facile situare il contributo di Schröder alla fondazione dell'aritmetica. Ora, come sottolineato in precedenza, Dedekind non era interessato a definire il concetto di un numero particolare, bensì a trovare quegli insiemi che secondo lui coincidessero con *l'* insieme dei naturali.[39] Per questo ebbe bisogno del concetto di catena e di quello di insieme semplicemente infinito. Schröder, invece, accetta come data l'esistenza dei numeri naturali, poiché la sua teoria permette di definire in maniera naturale ogni numero singolarmente preso. Questo vuol dire che Schröder non ha a che fare con *sistemi* di numeri, come Dedekind, ma con numeri particolari. Vedremo in seguito questo aspetto in dettaglio. Adesso, quello che ci preme sottolineare è che Schröder non motiva questa scelta. Cosa lo spinse a disassociarsi da Dedekind? Forse non credeva nella dimostrazione di esistenza di almeno un insieme di naturali data in *Was sind und was sollen die Zahlen*?

2.2. Tuttavia, tornando alla teoria delle catene, è anche giusto sottolineare quei luoghi delle *Lezioni* in cui Schröder insiste sulla maggior funzionalità del suo linguaggio rispetto a quello dedekindiano, in quanto più elegante e perspicuo:

> (...) nonostante tutto, la nostra rappresentazione della teoria delle catene non è seconda a nessun'altra per la sua *perspicuità* [Übersichtlichkeit] (...).[40]

Schröder aveva insistito sugli aspetti linguistici della sua teoria già in un breve scritto sui *Mathematische Annalen*, in cui annunciava l'imminente uscita del terzo volume delle *Lezioni*:

> (...) la nostra disciplina è in grado di *comprimere* ulteriormente gli enunciati di un tale maestro della concisione [i.e. Dedekind]. [41]

Questa prospettiva si situa all'interno del progetto schröderiano di elaborare con la teoria dei relativi un potente strumento pasigrafico per la codifica dei concetti dell'aritmetica:

> Con ciò si deve dar vita ad un linguaggio scientifico universale che, profondamente diverso dagli sforzi linguistici à

[39] Fu Frege, come è noto, ad adoperarsi per definire il concetto di numero n mediante il ricorso alle classi di equivalenza.

[40] [**Schröder, 1966**, ivi].

[41] [**Schröder, 1895a**, p. 157]. La traduzione è mia.

> la Volapük, [42] si presenti più come lingua segnica [Zeichensprache] che lingua parlata.[43]

Tale lingua avrebbe, appunto, dovuto servire per la *rappresentazione dei concetti fondamentali della matematica*.[44] Si noti, al proposito, come il progetto che animava Schröder era lo stesso che animava Peano. Non è un caso, quindi, che il nostro autore cercasse nei suoi ultimi scritti di mostrare la superiorità del suo calcolo dei relativi rispetto al linguaggio peaniano. Questo modo di presentare le cose da parte di Schröder ha indotto a vedere nella lezione nona solo la prova della possibilità di tradurre il concetto di catena nel linguaggio della teoria dei relativi. In questo errore sono caduti Clarence I. Lewis nel *Survery*,[45] e recentemente la Geraldine Brady.[46] Il punto è che la prospettiva linguistica non deve oscurare il grande merito di Schröder, cioè quello di aver capito che il concetto della *più piccola catena contenente un dato insieme* coincideva con quello della *chiusura riflessivo - transitiva di una relazione*. Esattamente come una catena, per Schröder, è una relazione transitivo - riflessiva, così, la più piccola catena contenente una data relazione è la chiusura riflessivo - transitiva di quella relazione. Anche se, ovviamente, una relazione transitivo - riflessiva è la chiusura riflessivo - transitiva di sé stessa, in quanto coincide con la più piccola relazione riflessivo - transitiva che la estende, tuttavia, i concetti di relazione riflessivo - transitiva e quello di chiusura riflessivo - transitiva vanno tenuti accuratamente distinti.

2.2.1. Il punto essenziale della trattazione della teoria delle catene da parte di Schröder riguarda l'insistenza sulla proprietà riflessivo-transitiva di una catena. Infatti, come si avrà modo di vedere, il concetto di catena viene a coincidere con quello di *chiusura riflessivo-transitiva* di una relazione. Come ha osservato giustamente Casari:

> (...) le chiusure transitiva e riflessivo-transitiva di una relazione (...) risultano essere di grande importanza in molti

[42] Una lingua artificiale in voga ai tempi di Schröder, affine all'esperanto.

[43] [**Schröder, 1901**], citato in [**Peckhaus, 1991**, p. 18 della versione online]. Le traduzioni da questo testo sono mie.

[44] [**Peckhaus, 1991**, p. 13].

[45] [**Lewis, 1969**, p. 114].

[46] [**Brady, 2000**, p. 296]: Sembra probabile che lo scopo di questa lezione [i.e. la nona] fosse quello di mostrare che il più delicato pezzo di lavoro fondazionale della storia della matematica poteva essere realizzato in maniera pulita nel calcolo dei relativi [la traduzione è mia].

contesti logici.[47]

Uno di questi contesti è rappresentato dalle algebre di Kleene, strutture dotate di un operatore unario * che corrisponde alla chiusura riflessivo-transitiva di una relazione.[48] Il professor Avron dell'università di Tel Aviv, in una conferenza tenuta presso la Gödel Society di Vienna, ha, invece, insistito sulla sua importanza in contesti informatici:

> L'abilità di definire la chiusura transitiva di una relazione e di fare appropriate inferenze con essa (...) dovrebbe costituire uno degli aspetti più importanti di un qualsiasi sistema computerizzato per fare matematica, e di qualsiasi struttura logica.

3. La teoria delle catene

Come si ricorderà, per Dedekind un insieme A è una catena quando è chiuso rispetto ad una data funzione; per esempio, $f(A) \subseteq A$. Schröder per prima cosa traduce tale definizione nel calcolo dei relativi, dove una funzione iniettiva è una relazione *univoca a sinistra*,[49] e un insieme una relazione composta con la relazione totale. Avremo così che

(20)
$S \circ V$ è catena rispetto ad R sse $R \circ (S \circ V) \subseteq S \circ V$, dove $R \circ R^{-1} \subseteq \mathsf{Id}$

La (20) è né più né meno l'enunciato 37 di Dedekind.[50] Quello che vede Schröder è che la (20) vale anche quando ad R si sostituisca una relazione (binaria) qualsiasi, e all'insieme $S \circ V$ un qualsiasi relativo. In altre parole, è possibile prescindere dall'univocità della rappresentazione di Dedekind, e dalla teoria degli insiemi. In questo modo la teoria delle catene viene generalizzata, e si comprende che è indipendente dal concetto di insieme.

3.1. Introduciamo, quindi, la definizione di R-catena di S come l'intersezione di tutte le R-catene contenenti S, cioè come la più piccola R-catena

---

[47] [**Casari,** , p. 15].
[48] Vedi [**Jónsson, 1991**, p. 283].
[49] Vedi sopra, (16).
[50] [**Dedekind, 1888**, p. 9].

contenente S; in simboli:

$$R^* \circ S = \bigcap[T \mid (R \circ T) \cup S \subseteq T]^{51} \tag{21}$$

L'espressione dentro alla parentesi può essere scomposta in due parti: la prima, $R \circ T \subseteq T$, equivale alla generalizzazione della (20) di cui s'è detto sopra, e indica che T è catena;[52] la seconda, $S \subseteq T$, che T include S. In conformità al testo di Dedekind, possiamo anche nel calcolo dei relativi introdurre la R-catena di S come l'unione di S più l'immagine della sua R-catena:

$$R^* \circ \S = S \cup (R^+ \circ S)^{53} \tag{22}$$

A questo punto, sostituiamo la diagonale Id ad S nella definizione di catena data sopra:

$$R^* \circ \mathsf{Id} = \mathsf{Id} \cup (R^+ \circ \mathsf{Id}) \tag{23}$$

Siccome $R \circ \mathsf{Id} = R$,[54] per qualsiasi R, otteniamo:

$$R^* = \mathsf{Id} \cup R^+ \tag{24}$$

Cioè, la più piccola relazione rilfessivo - transitiva R^* contenente R non è altro che la sua chiusura riflessivo - transitiva.

3.1.1. L'immagine di una catena R^+ coincide, invece, come detto sopra, con la chiusura *transitiva* di una relazione. L'immagine di una catena è semplicemente una catena *senza* l'identità; non a caso R^* viene definita come l'unione di Id e R^+. L'immagine di una catena è inclusa nella catena di cui è immagine:

$$R^+ \subseteq R^{*55} \tag{25}$$

Ovviamente, si ha che

$$R \subseteq R^+ \subseteq R^{*56} \tag{26}$$

---

[51] [**Schröder, 1966**, p. 355].

[52] Si ricordi l'enunciato di Dedekind: K si dice catena se $f(K) \subseteq K$ [**Dedekind, 1888**, p. 9].

[53] [**Schröder, 1966**, p. 475]. Ricordo che R^+ è la chiusura *transitiva* di R. Come si vedrà in seguito, si ottiene la chiusura riflessivo-transitiva di una relazione R semplicemente aggiungendo la diagonale Id alla sua chiusura transitiva.

[54] [**Schröder, 1966**, p. 121].

[55] [**Schröder, 1966**, p. 326].

[56] [**Schröder, 1966**, p.361].

Da questo enunciato segue, per transitività, che $R \subseteq R^*$; cioè, $()^*$ è *crescente*.

(27) $$R \circ R^+ = R^+ \circ R^+ = R^+ \circ R \subseteq R^+$$ [57]

Come abbiamo più volte sottolineato, R^+ è l'immmagine di R^* rispetto al principio di associazione R; in simboli:

(28) $$R \circ R^* = R^+ = R^* \circ R \subseteq R^*$$ [58]

Inoltre, la R-catena di una R-catena è ancora una R-catena, e viceversa:

(29) $$R^* \circ R^* = R^*$$ [59]

(29) afferma che * è idempotente rispetto alla *composizione*. L'enunciato seguente esprime l'*idempotenza* di $()^*$:

(30) $$(R^*)^* = R^*$$ [60]

Abbiamo mostrato che $()^*$ è crescente ed idempotente; ci resta da sottolineare che è anche *monotono*:

(31) $$(S \subseteq T) \rightarrow (R^* \circ S \subseteq R^* \circ T)$$ [61]

Siccome l'operatore $()^*$ soddisfa le tre condizioni seguenti:

Crescenza: $R \subseteq R^*$
Idempotenza: $(R^*)^* = R^*$
Monotonia: $(S \subseteq T) \rightarrow (R^* \circ S \subseteq R^* \circ T)$

è un operatore di chiusura (cosa che del resto indicava *già* la definizione di catena).

Vediamo, adesso, il rapporto tra una catena e la conversione:

(32) $$(R^*)^{-1} = (R^{-1})^*$$ [62]

Cioè, la conversa di una catena è la catena della conversa. Sfruttando il concetto di catena e la negazione possiamo ottenere il duale della catena, cioè la *Gekett*:

(33) $$R_g^* = -((-R)^*)$$ [63]

[57] [**Schröder, 1966**, ivi].
[58] [**Schröder, 1966**, ivi].
[59] [**Schröder, 1966**, ivi].
[60] [**Schröder, 1966**, p. 362].
[61] [**Schröder, 1966**, p. 355].
[62] [**Schröder, 1966**, p. 388].
[63] [**Schröder, 1966**, p. 326].

L'*immagine di una Gekett* l'otterremo allo stesso modo dall'immagine della catena corrispondente:

$$R_g^+ = -((-R)^+)^{64} \tag{34}$$

4. Induzione completa e concetto di numero

Questo per quanto riguarda il concetto di catena. Ricordo che l'importanza del lavoro svolto da Schröder consiste nell'averlo definito in termini di chiusura riflessivo-transitiva, e nell'averlo reso *indipendente* dalle nozioni di insieme e di rappresentazione univoca. Non ci resta che introdurre l'enunciato di induzione completa:

ENUNCIATO DI INDUZIONE COMPLETA.

$$[R \circ \{(R^* \circ S) \cap T\} \cup S \subseteq T] \rightarrow (R^* \circ S \subseteq T)^{65}$$

Per la sua interpretazione si richiami alla mente l'originale formulazione di
Dedekind:

> **Enunciato di induzione completa**. Per dimostrare che la catena A^* è inclusa in un dato insieme Σ – sia questo o no sottoinsieme di S – è sufficiente mostrare,
> ρ**:** che $A \subseteq \Sigma$, e
> σ**:** che l'immagine di ogni elemento comune ad A^* e Σ è in ogni caso elemento di Σ.[66]

Espressa a parole, la traduzione di Schröder suona:

> Per dimostrare che l'R-catena di S è parte di un dato relativo T, è sufficiente indicare
> ρ**:** che $S \subseteq T$ e
> σ**:** che l'R-immagine di ogni coppia di elementi comune ad $R^* \circ S$ e T è ancora inclusa in T.

[64] [**Schröder, 1966**, ivi].
[65] [**Schröder, 1966**, ivi].
[66] [**Dedekind, 1888**, p. 12].

4.1. Per completare l'esposizione, non ci resta che definire il concetto di numero, e qui Schröder si discosta nettamente dall'impostazione di Dedekind. Quest'ultimo, come già ricordato, non definisce il concetto di numero, bensì quello di *un* insieme di numeri. L'autore di *Was sind und was sollen die Zahlen* era partito dalla teoria degli insiemi, aveva introdotto il concetto di funzione iniettiva, sviluppato la teoria delle catene, per approdare poi alla nozione di insieme semplicemente infinito, e di insieme di numeri. Schröder, da un lato, rileggendo in maniera nuova la Kettentheorie, riesce ad isolarla dalla nozione di insieme, e dall'altro, non credendo nella dimostrazione di Dedekind dell'esistenza di *un* insieme che contenga i naturali, introduce i numeri in maniera autonoma rispetto sia alla teoria degli insiemi, che a quella delle catene. Ogni numero, infatti, è un particolare relativo che egli accetta intuitivamente come dato. Schröder non ha di fronte a sé un insieme generico che contenga i naturali; ha quello che crede essere l'*unico* insieme dei naturali.

4.1.1. E' opportuno, qui, soffermarsi un attimo. Peirce in *Description of a Notation for the Logic of Relatives* divide i termini in tre catgorie:

(1) termini assoluti
(2) relativi semplici
(3) termini coniugativi [conjugative terms][67]

I primi denoterebbero delle classi di oggetti, i secondi delle relazioni binarie come *amante-di*, *servo-di*, ecc.;[68] i terzi, infine, delle relazioni con più di due correlati. Ricordo che una relazione richiede almendo due *membri*, il primo dei quali viene detto *relato*, ed il secondo *correlato*. Così, nella relazione *Antonio ama Maria*, *Antonio* è il relato, e *Maria* il correlato; una relazione a tre membri potrebbe essere la seguente: *Antonio dà a Maria il giornale*, dove *Maria* e *giornale* sono i due correlati.

Come è facile vedere, la suddivisione sopramenzionata di Peirce corrisponde alla seguente classificazione:

(1) proprietà
(2) relazioni binarie
(3) relazioni n-arie (per $n > 2$)

Tralasciamo, qui, di considerare il rapporto tra relazioni n-arie e relazioni binarie, occupandoci di quello tra termini assoluti (proprietà) e relativi semplici (relazioni binarie). Peirce mostra che si può sempre trasformare

[67] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, pp. 33 – 34].
[68] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 33].

un termine assoluto in uno relativo (semplice). E' sufficiente aggiungere la locuzione "che è–":

> (...) il termine assoluto "uomo" è perfettamente equivalente al termine relativo "uomo che è–".[69]

In altre parole, si ottiene un termine relativo da un termine assoluto, aggiungendo a questo un correlato indefinito. Schröder, come è noto, ha una lettura matriciale delle relazioni, e si avvale di essa per definire una relazione unaria. Come si ricorderà, una relazione è l'unione di tutte quelle coppie di elementi del dominio che la soddisfano; cioè:

$$R = [\,\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in V^2 \wedge \langle x, y\rangle \in R\,] \tag{35}$$ [70]

Ora, noi possiamo disporre tutte quelle coppie $\langle x, y\rangle \in R$ in una matrice costruita nel modo seguente: le *righe* indicheranno tutti i possibili relati, e le *colonne* tutti i possibili correlati. Facciamo un esempio: sia data una relazione R, soddisfatta dalle coppie $\langle a, b\rangle$, $\langle a, d\rangle$, $\langle b, a\rangle$, $\langle b, b\rangle$, $\langle c, a\rangle$, $\langle c, b\rangle$, $\langle c, c\rangle$, $\langle d, b\rangle$. Allora, la matrice di R sarà così costituita:

$$R = \begin{bmatrix} \ldots & \cup & \langle a, b\rangle & \cup & \ldots & \cup & \langle a, d\rangle & \cup \\ \langle b, a\rangle & \cup & \langle b, b\rangle & \cup & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \langle c, a\rangle & \cup & \langle c, b\rangle & \cup & \langle c, c\rangle & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \ldots & \cup & \langle d, b\rangle & \cup & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \end{bmatrix}$$ [71]

I posti [Stellen][72] della matrice si dicono *occupati* [besetz] da una coppia di elementi, qualora tale coppia soddisfi la relazione corrispondente. Nell'esempio precedente i posti occupati erano $\langle a, b\rangle$, $\langle a, d\rangle$, $\langle b, a\rangle$, $\langle b, b\rangle$, $\langle c, a\rangle$, $\langle c, b\rangle$, $\langle c, c\rangle$, $\langle d, b\rangle$. Tali posti vengono chiamati da Schröder anche posti *pieni* [Vollstellen][73], o *occhi* (o punti) [Augen].[74] Il motivo è molto semplice. Infatti, in un sistema di assi cartesiani, una coppia ordinata indica un punto.[75] Qualora un posto non contenga nessuna coppia di elementi, si dice posto *vuoto* [Leerstelle],[76] o semplicemente *lacuna* [Lücke].[77]

---

[69] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 41]. La traduzione è mia.

[70] Vedi sopra (5).

[71] [**Schröder, 1966**, p. 43].

[72] [**Schröder, 1966**, p. 44].

[73] [**Schröder, 1966**, ivi]. Ovviamente, se un posto è occupato è anche completo, e viceversa.

[74] [**Schröder, 1966**, ivi].

[75] Per l'interpretazione geometrica della teoria delle relazioni, vedi [**Schröder, 1966**, pp. 53–56].

[76] [**Schröder, 1966**, p. 44].

[77] [**Schröder, 1966**, ivi].

A questo punto si presentano quattro casi: una riga (colonna) può essere:

(1) *completa* [Vollreihe][78] quando *tutti* i suoi posti sono occupati
(2) *vuota* [Leerreihe][79] quando *tutti* i suoi posti sono vuoti
(3) *occupata* [besetze Reihe][80] quando *almeno uno* dei suoi posti è occupato
(4) *lacunosa* [Lückreihe][81] quando *almeno uno* dei suoi posti è vuoto

Ora, Schröder tende a *leggere* qualsiasi relazione in termini della matrice corrispondente, in quanto la matrice caratterizza in modo esaustivo ed *univoco* una relazione. In altre parole, esiste una corrispondenza *biunivoca* tra una relazione e la sua matrice.[82] Questa lettura è all'origine di tutti i nomi di relazione presenti nelle *Lezioni*. Per esempio, la relazione *totale* viene chiamata in questo modo, in quanto la matrice corrispondente ha tutte le righe e colonne complete (cioè, questa relazione è soddisfatta da qualsiasi coppia di elementi di V); il nome della relazione *vuota* trae origine dal fatto che la sua matrice ha, per l'appunto, tutte le righe e colonne vuote (Λ^2 non è soddisfatta da nessuna coppia $\langle x, y\rangle$ di V^2); ancora, la relazione *diagonale* si chiama così in quanto la sua matrice ha una ed una sola coppia di elementi per riga, cioè quelli della forma $\langle x, x\rangle$, presentandosi nel modo seguente:

$$\mathsf{Id} = \begin{bmatrix} \langle a,a\rangle & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \ldots & \langle b,b\rangle & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \langle c,c\rangle & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \langle d,d\rangle & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \end{bmatrix}$$ [83]

Come si vede, tali coppie costituiscono la diagonale della matrice. E così via. A questo punto, siamo in grado di rappresentare un relativo unario in termini matriciali: la sua matrice sarà composta da un'unica riga completa, per il resto sarà vuota:

> In base a ciò, R ha un'unica riga completa, e cioè la x-esima, e tutte le restanti vuote. Il relativo R è perciò un relativo con

[78] [**Schröder, 1966**, p. 140].
[79] [**Schröder, 1966**, ivi].
[80] [**Schröder, 1966**, ivi].
[81] [**Schröder, 1966**, ivi].
[82] [**Stjažkin, 1980**, p. 225].
[83] [**Schröder, 1966**, p.50].

> *un'unica riga completa, e con tutte le altre vuote* [sonst leerer Einvollzeiler], ciò che noi indicheremo brevemente con *monoriga*.[84]

Bene, un relativo monoriga è ciò che Schröder intende per relativo unario. L'idea di fondo è che dato un elemento x è sufficiente *tirare* la riga nella matrice corrispondente. In termini geometrici è come fissare un punto sull'ordinata, e tracciare una retta *infinita* parallela all'asse delle x. Possiamo applicare tale procedura ai numeri e fare di essi degli *Einzeler*. Il punto essenziale, però, è che per trasformare i numeri in monoriga bisogna prima averli! Schröder sembra dare per scontata la loro esistenza, insistendo sulla procedura matriciale per tradurli nel calcolo dei relativi. Da una parte, come più volte sottolineato, Schröder sembra non credere nella dimostrazione di esistenza di un sistema di naturali data da Dedekind,[85] e dall'altra entra in gioco la componente pasigrafica della filosofia schröderiana. Schröder voleva costruire un linguaggio in cui tradurre ed analizzare i concetti aritmetici.[86] In questa prospettiva non era compito suo giustificare tali concetti; il che, in ogni caso, non esclude il rifiuto schröderiano del lavoro sui naturali di Dedekind.

4.1.2. Credo che a questo punto sia chiaro il motivo per cui Schröder si disinteressi della formulazione del concetto di insieme numerabile. Dedekind ne ha bisogno perché solo attraverso di esso riesce a trovare quegli insiemi contenenti i naturali, ma non Schröder, perché per lui i naturali ci

[84] [**Schröder, 1966**, p. 405].

[85] Quello che colpisce è come mai non argomenti questo punto nelle *Lezioni*. Dato lo scopo fondazionale sotteso al calcolo dei relativi, sembra quantomeno sconcertante che dia per scontato proprio ciò che dovrebbe discutere e fondare. E, tuttavia, si leggano con attenzione le seguenti parole di Schröder:

Scopo *ultimo* del presente lavoro [i.e. il terzo volume delle *Lezioni*] è: giungere ad una rigorosa *definizione* logica del concetto "numero di–" (...)[**Schröder, 1966**, p. 350].

Schröder, usando l'espressione '*numero di–*', sembra suggerire che la sua meta non fosse fondare l'aritmetica sul calcolo dei relativi, ma *tradurla* in quest'ultimo. Non si tratta, pertanto, di definire i concetti di numero (Frege), di sistema di numeri (Dedekind e Peano), ma di definire il concetto di una *relazione* numero di–. Per far questo non deve destare scalpore la supina accettazione dell'esistenza dei naturali; in discussione non è la loro esistenza, bensì il loro *status* nella teoria dei relativi.

[86] (...) negli scritti logici di Schröder degli anni 1895–1901 (...) si trova una *esposizione* [Darstellung] e un'*analisi* [Analyse] della matematica con i mezzi della logica [**Peckhaus, 1991**, p. 1 della versione online]. Meglio sarebbe parlare, tuttavia, di *rappresentazione ed analisi dell'aritmetica*, perché i concetti presi in esame nelle *Lezioni* (funzione, insieme, catena, numero naturale) non esauriscono certo il patrimonio della matematica!

sono già.

4.1.3. Vale la pena di notare alcuni enunciati che, sebbene *non* si trovino nelle *Lezioni*, sono, tuttavia, facilmente deducibili nella teoria schröderiana:

(36) $$\Lambda^{2*} = \mathsf{Id}^* = \mathsf{Id}$$

La catena di Λ^2 coincide con quella dell'identità; entrambe sono uguali a Id.

(37) $$(R \circ S)^* = \mathsf{Id} \cup R \circ (S \circ R)^* \circ S$$

La catena di $R \circ S$ è uguale all'identità riunita alla R-immagine della catena di $S \circ R$ post-moltiplicata relativamente per S.

(38) $$(R \circ S)^+ = R \circ (S \circ R)^* \circ S$$

L'immagine della catena di $R \circ S$ è uguale alla R-immagine della catena del prodotto relativo di S per R moltiplicata relativamente per S.

4.1.4. In questo contesto è interessante sottolineare l'affermazione di Peirce, seconda la quale ogni relazione riflessivo-transitiva R è riscrivibile come $R \bullet (-R)^{-1}$. Egli, infatti, scrive:

> E' (...) dimostrabile che *ogni* relazione transitiva che include l'identità è della forma:
>
> $$R \bullet (-R)^{-1}$$[87]

Peirce afferma qui l'equivalenza dei due enunciati seguenti:

(1) R è transitiva e $\mathsf{Id} \subseteq R$

(2) $R = R \bullet (-R)^{-1}$

Ricordo che (1) viene assunto da Schröder come coincidente con $R = R^*$. Noi dimostreremo questo fatto sfruttando in maniera essenziale quello che Schröder chiama *primo teorema d'inversione* [Inversionstheoreme]:

TEOREMA K. [88]

$$R \circ S \subseteq T \Leftrightarrow R^{-1} \circ -T \subseteq -S$$
$$\Leftrightarrow -T \circ S^{-1} \subseteq -R$$

Come è facile vedere, si tratta del ben noto demorganiano teorema K:

---

[87] [**Hartshorne and Weiss, 1933**, p. 65]. La traduzione è mia.

[88] [**Schröder, 1966**, p. 243].

> Se una relazione composta [i.e. un prodotto peirceano di due relazioni R, S] è contenuta in un'altra relazione [T] per la natura delle relazioni, e non per la scelta del predicato, lo stesso si potrà dire qualora uno dei due componenti sia invertito [i.e. quando si assuma che R^{-1} o S^{-1}], e le contrarie [i complementi] dell'altro componente [cioè T] e di quello del composto [S, R, rispettivamente] cambino posto.[89]

E' interessante notare come l'utilizzo di tale teorema porti ad una considerevole semplificazione della dimostrazione dell'ipotesi di Peirce. Schröder nelle *Lezioni* generalizza il teorema K, mostrando come uno qualsiasi dei bi-condizionali contenuto in esso sia equivalente all'enunciato seguente:

TEOREMA 1. [90]

$$R \subseteq T \bullet (-S)^{-1}$$

DIMOSTRAZIONE. Da (2) a (1). Sia,

$$R = R \bullet (-R)^{-1} \tag{39}$$

Allora, poiché da (39) scende che

$$R \subseteq R \bullet (-R)^{-1} \tag{40}$$

Applicando il teorema K, si ottiene

$$R \circ R \subseteq R \tag{41}$$

Cioè R è transitiva.[91] D'altra parte,

$$\mathsf{Id} \subseteq R \bullet (-R)^{-1} \tag{42}$$ [92]

Ma $R = R \bullet (-R)^{-1}$, per ipotesi; quindi da (39) e (42) otteniamo

$$\mathsf{Id} \subseteq R \tag{43}$$

(1) risulta così da (41) e (43).
Da (1) a (2). Per ipotesi,

$$R \circ R \subseteq R \quad \text{e} \quad \mathsf{Id} \subseteq R \tag{44}$$

$R \circ R \subseteq R$ può essere riscritto, ancora per il teorema K, nel modo seguente:

$$R \subseteq R \bullet (-R)^{-1} \tag{45}$$

---

[89] [**Morgan, 1860**], ora in [**Heath, 1966**, p.224]. La traduzione è mia.
[90] [**Schröder, 1966**, p. 243].
[91] Vedi (19).
[92] [**Schröder, 1966**, p. 118].

Post-moltiplichiamo relativamente entrambi i lati del secondo dato, $\mathsf{Id} \subseteq R$, per R:

(46) $$\mathsf{Id} \circ R \subseteq R \circ R$$

D'altra parte,

(47) $$\mathsf{Id} \circ R = R$$ [93]

Quindi,

(48) $$R \subseteq R \circ R \qquad \text{da (46) e (47)}$$

(49) $$R \bullet (-R)^{-1} \subseteq R \qquad \text{da (48) per il teorema } K$$

(45) e (49) forniscono il risultato richiesto:

(50) $$R = R \bullet (-R)^{-1}$$ [94]

□

5. Epilogo

Con ciò siamo giunti al termine della trattazione della Kettentheorie come esposta nella lezione nona delle *Vorlesungen*. A questo punto, è lecito domandarsi il significato del lavoro schröderiano. I punti di interesse sono due: da un lato Schröder realizza che la teoria delle catene, essendo indipendente dal concetto di funzione iniettiva e poi da quello di insieme, può essere generalizzata a relativi qualsiasi, non necessariamente univoci a sinistra o composti con la relazione totale; dall'altro lato, mette in evidenza il legame con la transitività soggiacente a tale teoria. Non solo, si è anche visto come Schröder dia per scontata l'esistenza dei naturali, spostando l'interesse da questioni sulla loro definibilità e natura, a problemi legati alla loro traducibilità nel calcolo dei relativi. Qui ha giocato un ruolo essenziale il fatto che Schröder leggesse le relazioni in termini matriciali. Tale cambiamento di prospettiva è sembrato giustificato dalle intenzioni pasigrafiche dell'ultimo Schröder.[95]

[93] Infatti, come detto sopra, Id è l'elemento neutro della composizione di relazioni.

[94] Per una dimostrazione diversa e più *peirceana* di questo teorema vedi [**Maddux, 2001**, p. 43 della versione online].

[95] Si veda per esempio [**Schröder, 1898**]. Dove il *movimento pasigrafico in Italia* del titolo allude principalmente a Peano. Per la storia del congresso a cui appartiene questo contributo schröderiano, vedi [**Peckhaus, 1991**, pp. 2–5 della versione online]. Del testo sulla pasigrafia l'autore fece una traduzione poi pubblicata sul *Monist*: [**Schröder, 1899**].

5.1. Tutto ciò, però, non deve adombrare il cuore significativo dell'interpretazione schröderiana della teoria delle catene. Egli, per la prima volta, vede che come il concetto di catena coincide con quello di relazione riflessivo - transitiva, allo stesso modo il concetto della più piccola catena contenente un dato insieme coincide con quello della chiusura riflessivo - transitiva di una relazione. Data l'importanza che ha oggi quest'ultimo concetto, particolarmente in informatica e nel ragionamento automatico, non si può non rammaricarsi che autorevoli storici della logica non siano stati in grado di metterlo in evidenza.

CAPITOLO 3

Peirce e Schröder sull'Auflösungsproblem

1. Il problema della soluzione

Questo capitolo sarà dedicato al cosiddetto *problema della soluzione* [Auflösungsproblem]; esporremo prima la concezione schröderiana al proposito, per discuterla, poi, in un secondo tempo, alla luce delle considerazioni peirceane esposte in *The Logic of Relatives*.[1] Come in precedenza, faremo uso di una notazione moderna.

Per il *teorema di Schröder*[2] sappiamo che ogni insieme *finito* di proposizioni appertenenti al calcolo dei relativi (ognuna della quali è formulabile in termini equazionali) è equivalente ad un'unica identità $f = 0$, per f, polinomio; cioè, per f costruita mediante le sei operazioni del calcolo relativo (unione, intersezione, complemento, somma e prodotto peirceani, e conversa) a partire da costanti (relativi determinati, tra cui i quattro moduli V^2, Λ^2, Id, Di) e variabili relazionali (cioè, variabili il cui campo è l'insieme dei relativi). A questo punto, si presentano due casi:

(51) $\qquad f$ *non* contiene *variabili*; quindi, o è vera, o è falsa

(52) $\qquad f$ *contiene* delle variabili

Ricordo, anche, che una *soluzione* di $f = 0$ è un *sistema* di relativi, che sostituiti come valori alle incognite occorrenti in f la soddisfano. Nel caso che f contenga una sola variabile, sia cioè della forma $g(x) = 0$, una sua soluzione sarà semplicemente un relativo t t.c. $g(t) = 0$; se f contiene n

[1] [**Peirce, 1897**, pp. 161 – 217], ora ristampato in [**Hartshorne and Weiss, 1960**, pp. 288 – 345]. Edizione italiana, *La Logica dei Relativi*, in [**Bonfantini, 2003**, pp. 921 – 969].

[2] [**Schröder, 1966**, p. 151].

variabili, cioè è della forma $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, allora una sua soluzione sarà un sistema di relativi $t_1, \ldots, t_n$ tali che $g(t_1, \ldots, t_n) = 0$.

Ovviamente, il caso interessante è (52). Esso ammette tre ulteriori sottocasi:

(52a) $f = 0$ *non* ammette nessuna soluzione; cioè,

$$\neg\exists x_1, \ldots, x_n[\, f(x_1, \ldots, x_n) = 0\,]$$

(52b) *Qualsiasi* sistema di relativi soddisfa $f = 0$; cioè,

$$\forall x_1, \ldots, x_n[\, f(x_1, \ldots, x_n) = 0\,]$$

(52c)
Qualche sistema, ma *non* tutti, di relativi è una soluzione per $f = 0$;
cioè, $\exists x_1, \ldots, x_n[\, f(x_1, \ldots, x_n) = 0\,] \wedge \neg\forall x_1, \ldots, x_n[\, f(x_1, \ldots, x_n) = 0\,]$

Ancora, 52a e 52b sono banalmente casi limite, in cui l'equazione è o *sempre vera*, o *sempre falsa*. L'autentico Auflösungsproblem, pertanto, è dato da 52c. Concentriamoci, quindi, su di esso.
Sia $f = 0$, della forma $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$; allora:

(52c.1) $$\forall x_1, \ldots, x_n \exists y[\, g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\,]$$

Oppure,

(52c.2) $\neg\forall x_1, \ldots, x_n \exists y[\, g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\,]$; cioè,

$$\exists x_1, \ldots, x_n \forall y[\, g(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0\,]$$

Nel caso 52c.2, per ogni sistema di valori per $x_1, \ldots, x_n$ t.c. $\forall y g(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0$, esiste una funzione h, per cui

(53) $$h(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{sse} \quad \forall y g(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0$$

Chiamiamo tale $h(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *risultante* dell'eliminazione di y in $g(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0$. In altre parole, la h è la relazione che sussiste tra tutti quei relativi $t_1, \ldots, t_n$ che *non* soddisfano la $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$, ossia $f = 0$. Il risultante risponde alla domanda: data un'equzione $f = 0$, qual'è la relazione che sussiste fra tutti quei relativi che non sono sue soluzioni?

Definiamo *risultante completo* l'equazione totale, ottenuta, sempre tramite il teorema di Schröder, dall'unione di tutti i risultanti, che come appena visto, si presentano in forma equazionale. Sia $H(x_1, \ldots, x_n) = 0$, il risultante completo dell'eliminazione di y in $g(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0$.

Il problema di trovare il risultante completo costituisce il *problema dell'eliminazione* [Eliminationsproblem]:

> Egli [cioè, Schröder] giustamente nota che tale problema [della soluzione] spesso implica problemi di eliminazione.[3]

Ciò è evidente. Un problema di soluzione implica un problema di eliminazione tutte le volte che ci troviamo in un caso come 52c.2, cioè ogni qualvolta ci sia almeno un sistema di relativi che *non* soddisfa l'equazione che vogliamo risolvere. Se un sistema di relativi è una soluzione, o radice, per $f = 0$, una soluzione *generale* è un *insieme* di sistemi di relativi per quella equazione, cioè è l'insieme di tutti quei sistemi di relazioni che sono soluzioni di $f = 0$. Ora, la radice generale di $f(x) = 0$, è sempre riformulabile come $x = g(u)$, per g polinomio relativo, e u relativo indeterminato. In altre parole, se x è una radice di $f(x) = 0$, allora esiste *sempre* un relativo u t.c. $x = g(u)$. In simboli,

$$(f(x) = 0) \leftrightarrow \exists u(x = g(u)) \tag{54}$$

La g di 54 deve sottostare ad un'importante condizione:

PRIMA RICHIESTA AGGIUNTIVA. $f(x) = 0 \leftrightarrow (g(x) = x)$

Cioè, la g è tale che se applicata ad x, che noi sappiamo essere una soluzione di $f(x) = 0$ la riproduce. A questo punto, supponiamo che a sia una soluzione di $f(x) = 0$; ovvero, $f(a) = 0$. In base a quanto detto sopra, esisterà un relativo qualsiasi u t.c. $a = g(u)$. Bene, preso un relativo generico u, si pone

$$g(u) = (a \cap [\, V^2 \circ f(u) \circ V^2 \,]) \cup (u \cap [\, \Lambda^2 \bullet -f(u) \bullet \Lambda^2 \,]) \tag{55}$$

55 rappresenta la *soluzione generale* di $f(x) = 0$. Per usare le parole di Schröder:

[3] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 321]. Le traduzioni da questo testo sono mie.

> [la formulazione della soluzione generale] (...) indica la forma sotto la quale cercare la soluzione generale dell'equazione; ovvero, ci dice, prima di tutto, che la soluzione generale dell'identità $f(x) = 0$ esiste nella forma $x = g(u)$. [4]

Si tratta, ora, di calcolare il valore del membro destro di 55; per far questo, abbiamo bisogno della seguente importantissima legge:

LEGGE DI SCHRÖDER. [5]

$$V^2 \circ R \circ V^2 = \begin{cases} V^2 \textit{ se } R \neq \Lambda^2 \\ \Lambda^2, \textit{ altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

$$\Lambda^2 \bullet R \bullet \Lambda^2 = \begin{cases} \Lambda^2 \textit{ se } R \neq V^2 \\ V^2, \textit{ altrimenti} \end{cases} \tag{2}$$

Applicando la legge di Schröder a 55, otteniamo:

$$V^2 \circ f(u) \circ V^2 = \begin{cases} V^2 \text{ se } f(u) \neq 0 \\ \Lambda^2, \text{ altrimenti} \end{cases} \tag{55'}$$

$$\Lambda^2 \bullet -f(u) \bullet \Lambda^2 = \begin{cases} V^2 \text{ se } f(u) \neq \Lambda^2 \\ \Lambda^2, \text{ altrimenti} \end{cases} \tag{55''}$$

Quindi, se $f(u) = V^2$, 55 diventa:

$$g(u) = (a \cap V^2) \cup (u \cap \Lambda^2) = a \tag{55'''}$$

Mentre, se $f(u) = \Lambda^2$, abbiamo:

$$g(u) = (a \cap \Lambda^2) \cup (u \cap V^2) = u \tag{55''''}$$

Perciò, se u è una radice di $f(x) = 0$, allora $g(u) = u$ (il che soddisfa la legge di Schröder); altrimenti, $g(u) = a$.

2. Interpretazione

Qui sorge il problema: se u non è una soluzione, la $g(u)$ ci ridà sempre la nota a. Si noti, anche, come Schröder faccia leva sull'esistenza di una soluzione *particolare* (in questo caso, a) per trovare la soluzione generale.

---

[4] [**Schröder, 1966**, p. 168]. Le traduzioni da questo testo sono mie.

[5] [**Schröder, 1966**, p. 147].

> La soluzione rigorosa viene completamente determinata attraverso il rinvio ad una particolare soluzione a del problema (...).[6]

Infatti, più sopra nel testo, Schröder, nel *problema 3* aveva assunto allo scopo Id e Di.[7] Di fatto, come giustamente osserva Peirce:

> Questa [soluzione particolare] solo raramente è difficile da trovare. Di solito, infatti, si assume Λ^2, o V^2, o qualche altra soluzione banale.[8]

Io credo che per l'interpretazione del lavoro schröderiano sul problema della soluzione si debbano valutare *separatamente* due aspetti:

(1) Il significato dell'Auflösungsproblem

(2) Il suo utilizzo per la creazione di un calcolo

2.1. Peirce, in *The Logic of Relatives*, riassume in questo modo la posizione di Schröder:

> Il professor Schröder si occupa principalmente di ciò che egli definisce "problema della soluzione", in cui viene richiesto di dedurre da una data proposizione un'*equazione* di cui un membro contiene un relativo determinato in anticipo, non contenunto nell'altro membro.[9]

Peirce si riferisce, qui, alla soluzione generale:

$$g(u) = (a \cap [\, V^2 \circ f(u) \circ V^2\,]) \cup (u \cap [\, \Lambda^2 \bullet -f(u) \bullet \Lambda^2\,]) \tag{56}$$

dove il *relativo determinato in anticipo* è a. Anche Peirce si era occupato di tale problema in precedenza, senza dargli, però, la centralità che occupa nella *Vorlesungen*. E' tale centralità che il filosofo americano rimprovera a Schröder. Peirce, infatti, *non* nega l'importanza dell'Auflösungsproblem, rifiutandosi solo di ridurre tutta la logica ad esso:

> Malgrado io non sia affatto propenso a negare che i cosiddetti "problemi della soluzione" (...) rivestano spesso una *considerevole importanza*, non posso, tuttavia, ammettere che l'interesse di qualsivoglia studio logico si limiti ad esso.[10]

Ancora,

---

[6] [**Schröder, 1966**, p. 195].
[7] [**Schröder, 1966**, p. 194].
[8] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 325].
[9] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 321].
[10] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, ivi]. Il corsivo è mio.

> Io non posso accettare che tutto l'interesse della logica consista in ciò [nel problema della soluzione].[11]

E' evidente che Peirce ha sullo sfondo della sua logica una visione ben diversa e più articolata di quella schröderiana. Come abbiamo notato nel primo capitolo, l'Auflösungsproblem è strettamente connesso alla costruzione di un calcolo. Peirce può essere d'accordo anche su questo punto; ciò che non accetta è l'estrema generalità che Schröder associa alla sua tecnica di soluzione:

> Il professor Schröder dà grande importanza alla *generalità* delle soluzioni. Secondo me, questo è un errore.[12]

E' un errore, secondo Peirce, anzitutto perché nella maggior parte dei casi le soluzioni generali, appunto perché tali, sono banali, nel senso che non contengono un'informazione specifica, sono astratte:

> Per quanto riguarda, poi, le soluzioni generali, esse sono nella maggior parte dei casi banali.[13]

Qui, Peirce sembra mettere l'accento su una procedura che secondo la sua visione sembra portare ad un puro e gratuito gioco formale. Non a caso, poco prima, si era rifiutato di ammettere l'importanza di riscrivere, via la legge di Schröder, *ogni* enunciato in termini equazionali:

> Se l'informazione contenuta in una proposizione non ha la struttura di un'equazione, perché dovremmo (...) insistere nell'esprimerla in forma equzionale?[14]

Si noti che Peirce, anche in questo luogo, non sta deprezzando il lavoro schröderiano: è giusto esprimere *certe* proposizioni come identità, ma non *tutte*. Per Peirce è puramente gratuito e senza necessità voler esprimere *ogni* proposizione come un'equazione, quando ciò non venga implicato direttamente dall'informazione in essa contenuta.

2.2. Siamo, così, arrivati al cuore della critica peirceana. Esattamente come è la *natura specifica* di una proposizione ad implicare la sua riformulazione equazionale, così è un *contesto specifico* a determinare un problema o una questione. Schröder, agli occhi di Peirce, sembra essersi scordato di queste relazioni e di aver isolato un problema dalla sua urgenza specifica.

Se ci limitiamo a considerare il significato del trovare una soluzione

---

[11] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, ivi].
[12] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, ivi]. Il corsivo è mio.
[13] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 322].
[14] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 321].

generalissima che contenga tutte le possibili soluzioni, non si può non essere d'accordo con Peirce che tale generalità, portata ad un grado limite di astrazione, venga a mancare di un reale significato epistemologico. In altre parole, ha senso nella scienza parlare di un problema generalissimo (e perciò anche astratto), quando nella pratica di tutti i giorni si ha a che fare solo con problemi *specifici*, cioè ben contestualizzati? E' un *preciso contesto* scientifico a determinare la problematicità di una domanda:

> (...) qualsiasi interrogativo è suscitato da qualche necessità – cioè, da un qualche stato di cose insoddisfacente (...).[15]

Il modo in cui affronta l'Auflösungsproblem Schröder è, invece, tale che sposta l'interesse dalla necessità di trovare un rimedio (soluzione) ad uno stato di cose problematico, alla possibilità di trovare la formulazione più generale di un qualsiasi problema:

> Il professor Schröder si sforza di fornire la formulazione più generale di un problema logico. (...) [Ma] Cercare una formulazione per tutti i problemi logici è domandarsi (...) cosa l'uomo indaghi (...), in cosa consista l'essenza di una questione in generale.[16]

Detto in un altro modo, mentre Peirce si aspetta dalla soluzione di un problema la risposta ad una necessità particolare, Schröder indaga, invece, il significato in sé e per sé dell'aspettarsi una soluzione di un problema.

E' qui il discrimine tra Peirce e Schröder: entrambi si occupano del problema della soluzione, ma mentre il primo lo riconduce ad una situazione specifica e, quindi, si aspetta delle risposte altrettanto specifiche (delle soluzioni *particolari*), il secondo lo estrae da qualsiasi contesto, dando valore solo a delle risposte che siano il più generali possibili (soluzioni *generali*). Peirce, ovviamente, non nega l'interesse delle soluzioni generali, ma solo in quanto spianino la strada al ritrovamento di soluzioni particolari; un po' come uno scienziato che sfrutta una legge *universale* per rendere conto di un accadimento specifico. Si potrebbe sostenere che tale evento è spiegabile solo in quanto è riconducibile ad una legge generale, ma, in ogni caso, il focus resta nella situazione di partenza, per un epistemologo *à la Peirce*:

> Solo in quei casi in cui una soluzione generale indica il modo con cui trovare una soluzione particolare ha un certo valore; perché sono solo le soluzioni particolari a rappresentare per

[15] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 323].

[16] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 322].

> la mente l'autentica soluzione di un problema; un'espressione che manchi di esercitare nella mente tale rappresentazione è senza senso.[17]

Ovviamente, solo per Peirce non ha senso.

2.2.1. A difesa di Schröder, si può osservare che la sua soluzione generale, anche nel caso sfortunato che riproduca la soluzione particolare di partenza, *in ogni caso* indica la forma sotto la quale cercare una possibile soluzione generale. Quindi, permette di poter parlare di una soluzione solo riferendosi alla sua struttura formale, anche nel caso che una soluzione concreta non si sia trovata. Quello che sfugge a Peirce è l'analisi delle varie forme di relazione che Schröder riesce ad ottenere, spostandosi su un piano più astratto. E' solo grazie all'impiego della sua soluzione, per esempio, che riesce a dimostrare che ogni relativo *riflessivo* R è tale che $R \subseteq \mathsf{Id}$.[18] Inoltre, tale soluzione esibendo la *forma* generale di una soluzione, permette di classificare i problemi in termini delle loro soluzioni formali.

2.2.2. Ma in cosa consiste propriamente un problema per Peirce?

> (...) una domanda è solo un espediente o un artificio razionale, e per capire tale espediente l'esperienza ci dice che il modo migliore è quello di iniziare considerando le circostanze che suscitarono questa domanda e, quindi, su quale azione di un principio generale far leva per soddisfare tale necessità.[19]

In altre parole, un problema richiede per la sua soluzione l'esame di quelle condizioni che lo determinarono, cioè la sua contestualizzazione, la risposta alla domanda, *perché proprio questo problema?*. In un secondo tempo, una risposta soddisfacente è ottenibile solo con riferimento ad una legge *generale*; il che impone di considerare tutte le possibili leggi sotto le quali potremmo sussumere il nostro caso, cioè il vedere la nostra situazione problematica come caso particolare di una situazione generale risolvibile mediante un apposito principio. In questo senso, una soluzione generale, o un principio generale, non sono fini a sé stessi, ma funzionali alla risoluzione di un problema ben specifico:

[17] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, ivi].
[18] [**Schröder, 1966**, p. 199].
[19] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, pp. 322 – 323].

> (. . .) le soluzioni particolari sono le sole a significare direttamente qualcosa, o a comportare della [*autentica*] conoscenza; (. . .) le soluzioni generali sono utili solo se possono suggerire quali saranno le soluzioni particolari.[20]

Peirce riconosce l'indubbio valore delle soluzioni generali, ma solo in quanto non siano fini a sé stesse. E' quanto non fa Schröder. Per Schröder l'importanza di una soluzione generale non consiste nel fatto che possa aiutare a risolvere un problema specifico, ma, appunto, nella sua generalità. Questo isolare le soluzioni generali da un contesto specifico è ciò che Peirce non *vuole* accettare:

> (. . .) io non trovo molto interesse nelle formule generali.[21]

Insisto sul fatto che Peirce non nega valore alle soluzioni generali, ma solo all'uso *de*-contestualizzato che ne fa Schröder. Peirce, infatti, rileva che ogni problema ci impone di ricercare le cause che lo determinarono e su quale principio fare affidamento per risolverlo. Si tratta, qui, di immergere una questione in un dominio specifico ben definito. Infatti, il principio su cui far leva, pur essendo *generale*, è al servizio della *particolarità* del problema. Il filosofo americano non contesta la generalità del discorso schröderiano, ma l'uso che ne viene fatto.

2.2.3. Per Peirce,

> Una domanda è un'indicazione suggestiva (nel senso ipnotico del termine) di ciò che deve essere pensato per soddisfare qualche mancanza più o meno pressante.[22]

Un problema realmente significativo per Peirce è solo quello che nasce a partire da un disagio mentale, determinato dall'imbarazzo di fronte ad una situazione a cui non si sa dare ancora risposta. Questo imbarazzo spinge, poi, la mente a cercare delle soluzioni. Nel caso fortunato, esse risolveranno direttamente il suo cruccio: saranno delle soluzioni *particolari*, come il problema di partenza. Tuttavia, in molti casi sarà necessario passare al vaglio varie leggi, fino a quando troveremo quella sotto la quale potrà essere sussunto il nostro problema. Così facendo, scarteremo tutte le leggi eccetto quella che implica una soluzione (particolare) al nostro problema. E' in questo senso che Peirce può affermare che *solo in quei casi in cui una soluzione generale indica il modo con cui trovare una soluzione particolare*

[20] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 325].
[21] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 323].
[22] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, ivi].

ha un certo valore.[23]

Solo una legge che ci possa *concretamente* aiutare è d'aiuto. Ma è d'aiuto solo se ci si mette nei panni di Peirce e si accetta la sua personale definizione di problema. Peirce riguardava la questione da un punto di vista squisitamente epistemologico. In quest'ottica, formulare una domanda prescindendo da qualsiasi riferimento contestuale contraddice l'esperienza quotidiana dello scienziato, che elabora algoritmi ad hoc per risolvere problemi particolari; cioè, è l'urgenza di una situazione sfuggente a spingere lo scienziato a cercare una strategia, e quindi una soluzione, per dominarla. Va da sé, che non esiste nessuna strategia a-priori valida per ogni situazione. Al massimo, si può riflettere sul significato di strategia; ma questo è un altro discorso. Se adottiamo questo ordine di idee, cioè la visione di uno scienziato medio, quanto scrive Peirce risulta facilmente accettabile, nonostante tutti i possibili pregi delle fatiche di Schröder. Il punto è che quest'ultimo non si metteva certo nei panni dell'epistemologo medio. Osservare che Schröder fece un grande *passo avanti verso il teorema di Skolem - Löwenheim e la moderna teoria dei modelli*,[24] in quest'ottica può destare ammirazione o curiosità, ma non interesse.

2.2.4. Lo stesso Peirce osserva, però, che un problema può sì nascere da una situazione specifica, ma anche da un'esigenza puramente mentale:

> Una domanda può nascere da un'effettiva situazione problematica, o da un'esigenza puramente mentale, consistente nel *dover* rispondere ad ogni questione posta. [In questo caso] (...) la necessità a cui si riferisce la domanda è solo il bisogno di aver risposto alla questione.[25]

E' chiara l'allusione a Schröder come a colui che tenta di rispondere ad un quesito solo in quanto è stato posto:

> [Il problema della soluzione secondo Schröder] (...) è trovare quella forma di relativo che soddisfi necessariamente una certa condizione e nella quale può essere espresso ogni relativo che soddisfi tale condizione.[26]

In altre parole, Schröder, secondo la lettura peirceana, mostra che ogni problema di soluzione equivale ad affermare:

$$\alpha \quad \text{sse} \quad f = 0 \tag{57}$$

[23] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 322].

[24] [**Brady, 2000**, p. 155]. La traduzione è mia.

[25] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 323]. Il corsivo è mio.

[26] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 325].

Cioè, un'equazione è risolvibile sse il relativo che ne costituisce la soluzione soddisfa una condizione α. Si tratta, pertanto, di trovare quella forma generale in cui riscrivere ogni relativo che soddisfi α. Detto meglio, qual'è la forma *generale* di un relativo, soluzione di $f = 0$, che soddisfi α? Qui, l'interesse viene spostato dall'*effettivo* ritrovamento di relativi che siano soluzioni dell'equazione $f = 0$, alla loro formulazione più in generale in termini della condizione α. Il che è come domandarsi: cos'hanno in comune tutte le soluzioni di $f = 0$, rispetto ad una condizione α?

Ciò è come classificare i problemi in base alla forma dei relativi che soddisfano una data condizione. Se si preferisce, è come dire che un problema viene individuato da un'opportuna classificazione delle sue soluzioni, rispetto ad un dato principio (α).

2.3. Passiamo, adesso, ad analizzare la posizione schröderiana. Mettersi nei panni di Schröder, al solito, è più difficile. Quello che non fa è piuttosto chiaro: stabilire una procedura per trovare delle soluzioni particolari di un'equazione. Schröder puntava a creare un calcolo equazionale di cui l'Auflösungsproblem costituisse la regola principe d'inferenza. Sia dato, per esempio, un certo numero di equazioni A, B, C, D, ecc; raggruppiamole in un'unica identità $\mathfrak{A}$ con la *legge di Schröder*. Assumendo come soluzione particolare a, otteniamo facilmente la soluzione generale di $\mathfrak{A}$ introducendo un relativo generico u, che, o ridarrà a, oppure u. In ogni caso, tale soluzione generale racchiuderà in sé ogni possibile soluzione per $\mathfrak{A}$. Bene, se A, B, C, D, ... erano le nostre premesse, e a una certa conclusione, la soluzione generale sarà l'insieme di tutte le possibili conclusioni. Abbiamo, così, ricondotto il problema di trovare una soluzione per un insieme di equazioni, a quello di cercare le conclusioni di un insieme di premesse.

Con la soluzione generale, Schröder non si accontenta di trovare una soluzione; egli le vuole trovare tutte. L'Auflösungsproblem, sotto quest'interpretazione, si riduce alla domanda: con quale algoritmo posso generare tutte le possibili conclusioni, dato un insieme di premesse? Tale algoritmo è la soluzione generale. Questo atteggiamento puramente calcolistico trova giustificazione nella stessa concezione schröderiana di *calcolo logico*:

> Un "calcolo logico" è l'insieme di quelle formule che si possono derivare in termini di una cerchia di operazioni attraverso operazioni logiche che le connettono.[27] Schröder definisce marchio caratteristico della "*logica matematica*", o del "*calcolo logico*", il fatto che le sue derivazioni ed inferenze possano essere svolte in forma di calcolo (...).[28]

Qui, Peckhaus si riferisce all'*Operationskreis*, ma questa impostazione calcolistica è presente anche nelle *Vorlesungen*.

Al proposito, si noti la classificazione delle varie tipologie di problemi, secondo Peirce:

> Ogni problema (...) è o un problema di conseguenze, o un problema di generalizzazione, o un problema di teoria.[29]

Il *problema di conseguenze* non è altro che quello formulato, come abbiamo appena visto, con estrema generalità da Schröder; cioè, quali conseguenze scendono dall'assunzione di un certo numero di premesse?

3. Conclusione

Insomma, abbiamo visto come Schröder nella lezione quinta delle *Lezioni* introduca il *problema della soluzione* [Auflösungsproblem] dandogli, a parere di Peirce, un'importanza esagerata. Si è sostenuto che la questione dovesse essere decisa su due piani: uno relativo al significato del problema in sé e per sé, l'altro alla sua interpretazione come metodo deduttivo per ottenere un certo numero di conseguenze da delle premesse. Dal punto di vista del significato intrinseco, abbiamo giustificato le critiche di Peirce sottolineando la sua lettura epistemologica della faccenda: un problema nasce solo da un'urgenza specifica nella quotidianità dello scienziato.

---

[27] 'A "logical calculus" is the set of formulas which can be produced in a circle of operations with logical connecting operations.' [[**Peckhaus, 2004**, p. 16 della versione *preprint*]. Si noti che le operazioni *connettenti* di Schröder *non* sono i nostri connettivi, altrimenti il passaggio sopra citato di Peckhaus viene a mancare di senso. Infatti, i connettivi corrispondono a quella cerchia di operazioni [Operationskreis] nella quale vengono derivate le formule.

[28] [**Peckhaus, 2004**, ivi]. La traduzione è mia.

[29] [**Hartshorne and Weiss, 1960**, p. 324].

Dall'altro punto di vista, si è potuto scorgere nel trattamento dell'Auflösungsproblem la vocazione calcolista dell'autore tedesco; la soluzione generale costituiva la regola, l'algoritmo, con cui generare, dato un certo insieme di premesse, tutte le sue possibili conseguenze.

3.1. D'altra parte, non si forzi troppo la dicotomia Peirce - Schröder. La differenza non consiste tanto nel fatto che il primo era uno scienziato e il secondo un matematico, ma nelle rispettive filosofie di fondo. Schröder era l'esploratore che segnava su di un taccuino tutto ciò che incontrava in una zona mai battuta dall'uomo, non mancando di sottolineare tutte le sfacettature della flora e della fauna, le somiglianze, le differenze, i tipi, i sotto-tipi, ecc. In questo modo, perveniva ad una *cartografia*, una *mappa*, una *classificazione* degli oggetti incontrati. Ebbene, fuor di metafora, nel terzo volume delle *Lezioni*, Schröder compie questo lavoro di classificazione delle relazioni, non tacendo alcun aspetto, con una precisione e ordine senza pari; vengono alla mente, al proposito, le 23 formule equivalenti al teorema K.[30]

Questo lavoro di classificazione viene fatto anche per l'Auflösunsgsproblem rispetto ad una data classificazione α. Non si può certo negare l'importanza, e la *scientificità* di una tale classificazione. Lo poteva fare Peirce, perché aveva alle spalle un'esigenza *pragmatica* di fondo. E' in questo senso che si è ritenuto opportuno leggere la questione su due piani: uno, più legato a considerazioni filosofico - epistemologische, l'altro, a considerazioni scientifico - matematiche.

[30] [**Schröder, 1966**, p. 242].

CAPITOLO 4

Un'importante eredità

1. Cenni biografici

Leopold Löwenheim nasce il 26 giugno del 1878 a Krefeld, secondogenito di Detmond Louis (1846 - 1894) e di Elisa Roth (1843 - 1924). Il fratello maggiore di Leopold, Leo, morì pochi mesi dopo la nascita, nel 1877. Il padre di Löwenheim, nato a Dessau, insegnava matematica alla *scuola professionale di stato* [Städtischen Gewerbeschule] di Krefeld. La madre, invece, era una scrittrice. La famiglia si spostò per un breve periodo a Napoli, per volgersi poi a Berlino. Qui, Löwenheim frequenta dal 1884 al 1896 il *Königliches Luisen - Gymnasium.* Successivamente, dal 1896 al 1900 studia matematica e scienze naturali all'università di Berlino e alla *Technische Hochschule* di Berlino - Charlottenburg, allora un sobborgo indipendente di Berlino.

Finalmente, nel 1901 Leopold ottiene l'abilitazione all'insegnamento. In particolare, potrà insegnare matematica e fisica nelle *Oberstufen* [ultimo triennio delle scuole superiori] e chimica e mineralogia nelle *Mittelstufen* [classi intermedie]. Dopo un anno di prova nel 1902/03 a Spremberg, inizia la carriera di insegnante a Berlino alla *Realschule*, prima come supplente, dal 1903 al 1904, e poi come *maestro anziano* [Oberlehrer] dal 1904 al 1911. Dal 1919 è finalmente insegnante di ruolo allo *Jahn - Realgymnasium.*

1.1. Appartiene a questo periodo di apprendistato l'articolo, *Su alcune possibilità nel calcolo dei relativi*[1] apparso nel 1915 nei *Mathematische Annalen.* Tre sono i punti di interesse di questo importantissimo lavoro:

---

[1] [**Löwenheim, 1915**]. Traduzione inglese di Stefan Bauer - Mengelberg, *On possibilities in the calculus of relatives*, in [**van Heijenoort, 1967**, pp. 228 - 251].

(1) formulazione e dimostrazione del teorema oggi conosciuto come *Teorema di Löwenheim*[2]

(2) proposta di una procedura di decisione per il calcolo dei predicati *monadici* del primo ordine

(3) riduzione del *problema della decisione* per il calcolo dei predicati a quello per il calcolo dei predicati *diadici*

Per quanto riguarda il punto 1, il teorema in questione afferma:

TEOREMA DI LÖWENHEIM. *Una formula del primo ordine che non contenga variabili libere [Zählaussage], se è soddisfacibile in un dominio infinito, lo è già in un dominio* finito o numerabile *[abzählbar].*

1.2. Nel 1931 Löwenheim sposò Johanna Teichert che, però, morì da lì a poco nel 1937. Sono questi anni difficili per il Nostro, che dovette abbandonare nel 1933 l'insegnamento in quanto per un quarto non ariano. Dopo la guerra, insegnò come docente nelle scuole secondarie dal 1946 al 1949, prima alla *Pestalozzi - Schule* a Berlino - Lichtenberg e poi, di nuovo, nello

[2] Come è noto, nella letteratura, ci sono *due* 'teoremi di Löwenheim - Skolem', quello *ascendente* e quello *discendente*. Né Löwenheim, né Skolem dimostrarono il primo di questi. Qui la storia della logica ha semplicemente adottato un'idea di Tarski, secondo la quale si poteva parlare di un teorema di Löwenheim - Skolem ascendente. Si noti anche che Löwenheim dimostra il teorema per una *singola* formula, mostrando che se è soddisfacibile in un dominio infinito, allora lo è già in un dominio numerabile. Skolem rafforzerà il teorema, estendendolo ad insiemi numerabili di formule e dimostrando, inoltre, che se essi sono soddisfacibili in un dominio infinito D, allora lo sono già in un sottodominio numerabile D' di D. Ovviamente, se esiste un sottodominio numerabile D' di D che soddisfi una formula, allora, certamente, esiste un dominio numerabile che la soddisfi (teorema di Löwenheim). Ma non vale il viceversa: cioè, non è affatto detto che se esiste un dominio numerabile che soddisfi una formula, allora esso è un sottodominio del dominio in cui si assume che per ipotesi sia soddisfatta la formula di partenza (teorema di Skolem). In questo senso, il teorema di Skolem è un rafforzamento di quello di Löwenheim e, non a caso, Skolem dovette servirsi anche della scelta per dimostrarlo. Per questo motivo, bisognerebbe accuratamente distingure il teorema di Löwenheim da quello di Skolem anche nella denominazione.

Ad ogni modo, se si vuole adottare a tutti i costi un'arbitraria classificazione, il teorema qui in oggetto è quello di Löwenheim discendente. Per il teorema di Löwenheim - Skolem ascendente vedi [**Mangione e Bozzi, 1993**, p. 553]:

I teoremi [di Löwenheim - Skolem] ascendenti stabiliscono l'esistenza, per ogni modello infinito $\mathfrak{M}$ di una teoria $\mathfrak{T}$ (espressa entro un dato linguaggio) di sue estensioni $\mathfrak{M}'$, ancora modelli di $\mathfrak{T}$ e aventi cardinalità t per ogni t maggiore della cardinalità m di $\mathfrak{M}$.

Cioè, se una teoria ha un modello infinito $\mathfrak{M}$ di cardinalità t, allora ha un modello $\mathfrak{M}'$ estensione di $\mathfrak{M}$ per *ogni* cardinalità maggiore di t.

Jahn - Realgymnasium. Löwenheim andò definitivamente in pensione solo all'età di 72 anni.

Agli anni della guerra appartiene l'altro grande contributo logico di Löwenheim, *Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkul*.[3] Löwenheim muore il 5 maggio del 1957 di embolia polmonare allo *Albrecht - Achilles - Krankenhaus* di Berlino, dove era stato ricoverato dopo un'improvvisa paraplegia. Gli sopravvive il figlio adottivo Johannes Teichert.

1.3. E' difficile dare un'idea precisa della personalità di Löwenheim, tenuto conto che per lungo tempo non si sapeva neppure la data della sua morte. Infatti, già nel 1933 Löwenheim viene dato per disperso [verschollen].[4] Si pensò che, in quanto non del tutto ariano, fosse stato una vittima del terzo Reich. Per questo motivo, Fraenkel e Bar - Hillel in *Foundations of Set Theory*[5] scrissero che il Nostro sarebbe morto pressapoco nel 1940. Interrogato al proposito da C. Thiel, Fraenkel rispose che si era basato sul fatto che l'ultimo articolo conosciuto di Löwenheim, *Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkul*, era stato ricevuto il 4 settembre del 1940 dalla redazione del *Journal of Symbolic Logic* e che, inoltre, essendo Löwenheim *probabilmente* ebreo, fosse stato una vittima del nazismo. In realtà, Löwenheim continuò a scrivere testi sui più svariati argomenti, dalla geometria alla quartettistica beethoveniana. Disgraziatamente, migliaia di lavori[6] di argomento geometrico vennero completamente distrutti durante il bombardamento del 23 agosto 1943. Certo è che Löwenheim era una persona eclettica dagli svariati interessi. E' questo un punto in comune con E. Schröder, al quale era accomunato anche dalla passione per le attività fisiche. Non da ultimo, Löwenheim, oltre a scrivere occasionalmente poesie, era un buon giocatore di scacchi.

Colpisce, invece, l'interesse di Löwenheim per un'antroposofia di matrice cristiana,[7] di contro agli interessi materialistici paterni. Del padre, nel 1915, Löwenheim pubblicò un lavoro su Democrito dal titolo, *La Scienza di*

---

[3] [**Löwenheim, 1940**].

[4] [**Thiel, 1975**, p. 1].

[5] [**Fraenkel and Hillel, 1958**].

[6] Da un punto di vista squisitamente scientifico, la più grande catastrofe occorse il 23 agosto del 1943 quando (...) 1100 disegni geometrici dello stesso Löwenheim e due bauli pieni di modelli geometrici e manoscritti scientifici caddero vittime delle fiamme ([**Thiel, 1975**, p. 6]. Le traduzioni da questo testo sono mie .).

[7] Nel 1896 aveva aderito alla *Società per la cultura etica* [Gesellschaft für etische Kultur] e con il passare degli anni sarebbe diventato anche vegetariano.

Democrito ed il suo influsso sulla moderna scienza della natura [Die Wissenschaft Demokrits und ihr Einfluss auf die moderne Naturwissenschaft]. Infine, non va dimenticato il rapporto epistolare che legò Löwenheim a Frege; nel 1909 Löwenheim era riuscito a convincere Frege della possibilità di edificare la matematica formale. Si legga, infatti, quanto scrive Christian Thiel al proposito:

> Estremamente affascinante è il suo [i.e. di Löwenheim] scambio di 20 lettere con Frege in cui, come viene riportato da Bachmann e Scholz, riuscì a convincere Frege che un'incontestabile fondazione dell'aritmetica formale era possibile.[8]

Ancora,

> A Löwenheim riuscì nel 1909 (...) di convincere Frege della possibilità di costruire l'aritmetica dal punto di vista formale.[9]

Disgraziatamente, per quanto allettante possa essere la questione, la totale distruzione di questo carteggio non permette che una cursoria annotazione.

2. Il teorema di Löwenheim

Siamo arrivati, così, al teorema di Löwenheim. Malgrado non si possa tacere del fatto che questo teorema segni la nascita della teoria dei modelli,[10] non si possono nascondere, tuttavia, le difficoltà di comprensione che da sempre ha presentato. Queste difficoltà concernono non solo la dimostrazione, ma addirittura il teorema stesso. Tant'è vero che i commentatori si dividono in coloro che reputano che Löwenheim abbia dimostrato che, data una formula del primo ordine, se è soddisfacibile in un dominio infinito, allora lo è in un dominio tutt'al più numerabile, e in coloro che, come Badesa, forse guidati da certe affermazioni skolemiane,[11] ritengono che Löwenheim non abbia solo trovato un dominio numerabile per la formula in

[8] [**Thiel, 1977**, p. 246]. Le traduzioni da questo testo sono mie.

[9] [**Thiel, 1975**, p. 2].

[10] Vedi, [**Badesa, 2004**].

[11] Badesa ammette esplicitamente di rifarsi a Skolem:

Skolem (...) attribuì a Löwenheim la dimostrazione della versione del sotto-dominio e, secondo noi, questa attribuzione va presa sul serio ([**Mancosu et al., 2005**, p. 47]. Le traduzioni da questo testo sono mie).

questione, ma uno che sia anche *sotto*-dominio del dominio in cui si pone, per ipotesi, soddisfatta la formula. In realtà, sarà Skolem, come è noto, ad esibire un dominio numerabile che sia *anche* un sotto-dominio. C'è quasi l'impressione, qui, che si voglia *skolemizzare* Löwenheim, cioè attribuirgli un risultato posteriore. Il problema è che per rafforzare il teorema di Löwenheim *à la Skolem* è necessario l'assioma della scelta. Ora, non è affatto chiaro *se* Löwenheim abbia fatto uso di tale assioma e, in caso affermativo, di quale versione si avvantaggiò. Ancora una volta, l'affermazione di Badesa, secondo la quale

> (...) noi possiamo assumere che Löwenheim usi implicitamente qualche forma dell'assioma di scelta.[12]

suona più come una dichiarazione di principio, che come il risultato di un'indagine. Insomma,

> Il fatto che la dimostrazione di Löwenheim consenta due letture [i.e. quella secondo cui Löwenheim esibì semplicemente un dominio numerabile e quella secondo cui esibì un sotto-dominio numerabile] così diverse tra loro mostra a sufficienza quanto il suo argomento sia poco chiaro.[13]

Tuttavia, se l'enunciato del teorema è poco chiaro, la sua dimostrazione è così oscura al punto di mettere in disaccordo gli storici sul suo effettivo significato. Per qualcuno è corretta, per altri presenta delle lacune; ma spesso tali bachi non vengono individuati in maniera pulita:

> L'opinione oggi dominante è che la dimostrazione presenti delle lacune, sebbene i commentatori si trovino poi in disaccordo su quanto siano importanti.[14]

Vaught, per esempio, ritiene che la dimostrazione sia lacunosa, ma non specifica poi quali siano i difetti.[15] Badesa, ancora una volta, sposa il giudizio di Skolem che non dubitò mai della correttezza della dimostrazione di Löwenheim; solo la riteneva inutilmente complicata.[16] Per Moore, invece, un'adeguata comprensione della dimostrazione si ha solo nel momento in cui la si inserisca nel quadro di una logica infinitaria.[17]

---

[12] [**Mancosu et al., 2005**, p. 53].
[13] [**Mancosu et al., 2005**, p. 47].
[14] [**Mancosu et al., 2005**, ivi].
[15] [**Vaught, 1974**, p. 156]. Citato in [**Mancosu et al., 2005**, p. 47].
[16] [**Mancosu et al., 2005**, p. 144].
[17] [**Moore, 1980**, p. 101]. Vedi anche [**Moore, 1988**, pp. 121 – 122].

E' perlomeno curioso che un teorema con una dimostrazione così criptica abbia, nondimeno, segnato una tappa fondamentale nella storia della logica.

2.1. Verrebbe, a questo punto, la tentazione di attribuire le difficoltà di lettura del risultato di Löwenheim alla teoria in cui l'ha formulato: il calcolo dei relativi. Si commetterebbe, però, un grave errore. Il calcolo dei relativi, infatti, nella sua formulazione schröderiana presenta certo problemi interpretativi, ma dal punto di vista espositivo - formale raggiunge una chiarezza senza pari. Vorremmo dire *didattica*, in quanto Schröder pianificò pur sempre le *Lezioni* in vista dell'insegnamento e il fatto che fossero così diffuse prima dei Principia Mathematica la dice lunga sul loro valore espositivo. L'abbiamo detto, Schröder compie un lavoro di catalogazione e sistemazione senza uguali.

Stando così la questione, non si possono addebitare le opacità löwenheimiane al calcolo usato, ma ai concetti che Löwenheim mette in gioco. Forse, lo stesso carattere fortemente rivoluzionario del teorema di Löwenheim era qualcosa per cui nel 1915 mancavano dei mezzi adeguati per gestirlo. Non a caso, Skolem introdusse delle tecniche logiche nuove di lavoro per dominarlo e rafforzarlo. Badesa centra la questione, osservando:

> (...) la dimostrazione di Löwenheim non è del tutto corretta, ma qualsiasi sua valutazione deve tenere conto del fatto che egli mancava di quegli strumenti che gli avrebbero consentito di esprimere meglio le sue idee.[18]

In altre parole, Löwenheim non era tanto carente dal punto di vista concettuale, ma tecnico. Si ha come una netta discrasia tra la ricchezza significativa del teorema di Löwenheim e la povertà di mezzi per enunciarlo e dimostrarlo. In un certo senso, è come se Löwenheim intravedesse un nuovo campo di ricerca (la teoria dei modelli), ma mancasse degli strumenti tecnici per dominarlo adeguatamente.

2.2. Detto questo, accenniamo brevemente alla dimostrazione del teorema di Löwenheim, rimandando il lettore interessato al già citato testo di Badesa ([**Badesa, 2004**]) in cui viene proposta una sua possibile ricostruzione, al saggio della Geraldine Brady ([**Brady, 2000**, pp. 169 – 196]) e alla squisita introduzione alla traduzione inglese del testo di Löwenheim di Jean van Heijenoort ([**van Heijenoort, 1967**, pp. 228 – 232]). Ricordiamo il teorema:

[18] [**Mancosu et al., 2005**, pp. 55 – 56].

TEOREMA DI LÖWENHEIM. *Una formula del primo ordine che non contenga variabili libere [Zählaussage], se è soddisfacibile in un dominio infinito, allora lo è già in un dominio finito o numerabile.*[19]

Bene, la dimostrazione di Löwenheim si articola in due parti a cui corrispondono due lemmi:

LEMMA 1. *Ogni enunciato del primo ordine è equivalido ad uno della forma '$\exists\forall F$', dove F è la matrice, $\exists$ una stringa, eventualmente vuota, di quantificatori esistenziali e $\forall$ una stringa, eventualmente vuota, di quantificatori universali.*[20]

LEMMA 2. *Se un enunciato in* f.n.L *è soddisfacibile, allora lo è già in un dominio tutt'al più numerabile.*[21]

Si noti come Löwenheim, anzitutto, non dimostri il suo teorema per insiemi numerabili di formule, come farà Skolem, ma per una ed una sola formula che dev'essere in f.n.L. La richiesta di Löwenheim che una formula sia in f.n.L equivale all'esigenza di eliminare l'alternanza dei quantificatori nel suo prefisso. Per la dimostrazione del primo lemma, Löwenheim si avvale di una procedura schröderiana[22] che permette di spostare un quantificatore esistenziale davanti ad uno universale, una volta che siano soddisfatte delle *opportune* condizioni. In particolare, lo spostamento dipende dall'introduzione di una nuova classe di variabili che Löwenheim chiama *indici sfuggenti* [Fluchtindizes].[23] Cosa siano effettivamente queste bizzarre entità finora non è stato capito. Per esempio,

> (. . .) è una questione dibattuta se gli indici sfuggenti siano o no termini funzionali.[24]

Secondo la Brady, tali difficoltà sarebbero amputabili al linguaggio usato da Löwenheim:

> Il principale ostacolo alla comprensione deriva dalla sua [i.e. di Löwenheim] *particolare notazione* per le variabili funzionali e le funzioni.[25]

---

[19] [**Löwenheim, 1915**, p. 450]. Le traduzioni da questo testo sono mie.

[20] [**Löwenheim, 1915**, ivi]. Non diremo che un enunciato del primo ordine della forma '$\exists\forall F$' è in *forma normale di Löwenheim* (f.n.L).

[21] [**Löwenheim, 1915**, p. 453].

[22] [**Schröder, 1966**, p. 514].

[23] [**Löwenheim, 1915**, p. 454]. Stefan Bauer - Mengelberg, nella sua traduzione inglese dell'articolo in questione, usa l'espressione 'fleeing subscripts' (letteralmente, sottoscritti che fuggono) ([**van Heijenoort, 1967**, p. 238]).

[24] [**Mancosu et al., 2005**, p. 49].

[25] [**Brady, 2000**, p. 173]. La traduzione e il corsivo sono miei.

In altre parole, Löwenheim aveva le idee ben chiare su cosa stava facendo ma non aveva gli strumenti per esprimerlo in maniera pulita. Da cui varie difficoltà interpretative.

Ad ogni modo, tornando alla questione della natura degli indici sfuggenti, lo stesso Volker Peckhaus, noto studioso schröderiano, ha ammesso in una comunicazione personale di non aver mai capito cosa fossero. Ancora una volta, l'oscurità löwenheimiana fa capolino.

2.3. Per noi, in questo contesto, è importante sottolineare che la tecnica usata per ottenere, dato un enunciato del primo ordine, la sua $\mathsf{f.n.L}$ deriva da Schröder. In questo modo, Schröder non offre a Löwenheim solamente il calcolo in cui formulare e provare il suo teorema, ma anche gli strumenti concreti per dimostrarlo. A buon diritto, pertanto, si può leggere il teorema di Löwenheim come uno dei risultati più significativi ottenuti nel calcolo dei relativi schröderiano. Infatti, tutta la prima parte della dimostrazione e, cioè, quella concernente il primo lemma, si basa di un artificio schröderiano per eliminare l'alternanza dei quantificatori da un enunciato del primo ordine in forma prenessa.

3. Matematica e bellezza

L'eredità di Schröder nel lavoro di Löwenheim non si esaurisce certo a questo punto. Infatti, Löwenheim, nel suo *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, dopo aver indicato che un'*equazione relativa* [Relativgleichung] risulta dall'uguaglianza di due espressioni relative, e che tramite il teorema di Schröder può essere sempre posta uguale a 0, afferma che tutte le questioni rilevanti di logica e matematica si lasciano ricondurre a tali equazioni:

> A tali equazioni relative si lasciano ricondurre tutte le questioni importanti di matematica e del calcolo logico.[26]

Ancora, dopo aver dimostrato che ogni equazione relativa si lascia ricondurre ad una contenente solo relativi binari,[27] osserva che, dato che ogni enunciato matematico si lascia esprimere come un'identità relativa, ogni enunciato matematico si lascia esprimere, perciò, anche come un'identità relativa binaria:

[26] [**Löwenheim, 1915**, p. 448].

[27] E' il teorema 6 di *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*:*Ogni equazione relativa, per esempio un'equazione del primo ordine [Zählgleichung] è equivalente ad una binaria* ([**Löwenheim, 1915**, p. 463]).

> (...) ogni enunciato della matematica o di un qualsiasi calcolo (...) si lascia riscrivere come un'identità relativa (...). [Poiché, d'altra parte,] tutto il calcolo dei relativi si lascia ricondurre a quello binario, segue così che si può decidere la validità di qualsiasi enunciato matematico, se si può decidere se un'identità relativa binaria è o no soddisfatta identicamente [i.e. è valida].[28]

Quello che sta affermando Löwenheim nell'articolo del 1915 è la riduzione dell'*Entscheidungsproblem* al calcolo dei relativi binari. Detto meglio, la possibilità di fare matematica nel calcolo delle relazioni è strettamente legata al problema della decisione. E' questo, infatti, di rimbalzo a rilanciare l'effettiva formulazione della matematica nel calcolo dei relativi. E' importante notare come Löwenheim sia stato guidato nelle sue ricerche dalla volontà di risolvere il problema della decisione. La possibilità di edificare la matematica nel calcolo delle relazioni, invece, verrà articolata da Löwenheim nel suo *Einkleidung der Mathematik*[29], dove parlerà addirittura di *schröderizzare* la matematica, mostrando come anche il concetto intuizionistico di dimostrazione abbia un suo posto nel calcolo dei relativi:

> (...) il concetto di "intuizionisticamente dimostrabile" ha il suo posto di diritto nel calcolo di Schröder. Quindi, anche dal paradiso dell'intuizionismo non bisogna lasciarsi scacciare.[30]

3.1. Ma come mai questo entusiasmo per un calcolo che nel 1940 iniziava coll'avere un sapore quantomeno esotico, se non arcaico? Secondo Löwenheim, il calcolo logico dei suoi tempi aveva rinunciato all'eleganza e alla scioltezza. Come non ricordare le affermazioni schröderiane sulla superiorità della sua pasigrafia rispetto al simbolismo peaniano, superiorità di un battello a vapore rispetto ad una barca a vela?

> [I sostenitori della scuola peaniana] (...) si servono ancora di una barca a vela, quando sono già in uso i battelli a vapore.[31]

Uno dei punti di forza del calcolo dei relativi è che non permette di formulare in esso le antinomie insiemistiche, in quanto non si può esprimere schröderianamente il concetto di *insieme di insiemi*:

---

28 [**Löwenheim, 1915**, ivi].

29 [**Löwenheim, 1940**].

30 [**Löwenheim, 1940**, p. 2]. Le traduzioni da questo testo sono mie.

31 [**Schröder, 1898**, p. 161], cit. in [**Peckhaus, 1991**, p. 14 della versione online]. La traduzione è mia.

> (...) Russell ha bisogno dell'assioma che si può considerare un insieme, tanto come insieme, quanto come elemento [di un altro insieme], assioma che nel calcolo di Schröder è semplicemente impossibile.[32]

Questo non vuole, però, dire che Löwenheim ricorse al calcolo dei relativi per poter fare matematica (o, almeno, aritmetica) senza paradossi. Di fatto, quello che si scopre in seguito è che in tale teoria vengono eliminate alcune antinomie. La situazione è simile a quella concernente la nascita dell'intuizionismo a cui diede vita Brouwer. Egli fu spinto in questo da una particolare concezione della matematica; è ben vero che nel calcolo intuizionista non è formulabile l'antinomia di Russell, ma affermare che Brouwer creò tale calcolo per eliminare quest'antinomia è un po' troppo.

Löwenheim parla di schröderizzare la matematica spinto dalla bellezza e dall'eleganza del calcolo dei relativi. Sono ragioni squisitamente estetiche quelle che spinsero Löwenheim a studiare il calcolo di Schröder. Bisogna, però, anche ricordare che agli inizi del novecento, le *Lezioni* schröderiane erano un diffuso testo di studio. La logica la si studiava lì. Nel 1914, l'anno in cui Löwenheim dimostra il suo teorema, Whitehead e Russell avevano appena scritto i *Principia Mathematica* (1911) e non erano ancora diffusi come lo sarebbero stati decenni dopo. Per questo motivo, a prescindere dai pregi che Löwenheim vedeva nella teoria dei relativi schröderiana, era quasi automatico che vi lavorasse dentro.

Ciò non toglie, comunque, che il calcolo schröderiano agli occhi di Löwenheim possedesse una sua naturalezza ed intima armonia.[33]

3.1.1. Sempre nell'articolo del 1940, Löwenheim constata che la matematica schröderizzata si articola in tre *gradini*:

(1) $\forall$ e $\exists$ quantificano elementi del dominio (è il nostro calcolo dei predicati)
(2) $\forall$ e $\exists$ quantificano relativi unari, cioè insiemi
(3) $\forall$ e $\exists$ quantificano relativi binari

Qui, Löwenheim osserva:

> Ackermann ha mostrato che non ogni enunciato del secondo gradino si lascia ridurre ad uno del primo, né un enunciato del terzo gradino si lascia ricondurre in generale ad uno del secondo.[34]

[32] [**Löwenheim, 1940**, p. 8].
[33] [**Löwenheim, 1940**, ivi].
[34] [**Löwenheim, 1940**, p. 3].

Purtroppo, Löwenheim non articola maggiormente questa suddivisione in gradini. Ciò è un peccato, perché avrebbe gettato maggior luce sul significato *concreto* del fare matematica schröderianamente, al di là di dichiarazioni di principio.

3.2. Ritornando alle motivazioni profonde di Löwenheim, l'insistenza sulla poeticità e l'armonia del calcolo schröderiano non devono stupire. Lo stesso Schröder, come abbiamo visto nel *problema della soluzione*, si lasciava guidare più dalla bellezza e dalla fine articolazione di un'indagine, che non da uno scopo particolare come Peirce. Schröder non aveva in mente di giungere ad una tecnica che potesse risolvere dei problemi particolari, quanto articolare il concetto di problema in sé. Allo stesso modo, Löwenheim non cerca nel calcolo dei relativi delle risposte a delle urgenze specifiche (anche se epistemologicamente importanti), quali l'evitare i paradossi, ma il piacere di una ricerca condotta in maniera elegante, ponendo l'indice più sulla bellezza della matematica che sulla sua potenza.

3.2.1. In conclusione, l'eredità di Schröder nel pensiero di Löwenheim fu da un lato, come abbiamo visto, la preparazione del terreno per la dimostrazione del teorema di Löwenheim e dall'altro la possibilità di tradurre la matematica (od una sua parte, almeno) all'interno del calcolo dei relativi.

4. Il contributo di Skolem

Nei paragrafi precedenti abbiamo potuto constatare quali difficoltà di interpretazione presentino gli indici sfuggenti nel teorema di Löwenheim. Come già sottolineato, Löwenheim prova il teorema per formule in $\mathsf{f.n.L}$ e, quindi, ha bisogno, anzitutto, di dimostrare che, data una formula del primo ordine, esiste sempre la $\mathsf{f.n.L}$ corrispondente. Lo scopo di tale forma normale era quello di eliminare l'*alternanza* di quantificatori universali ed esistenziali nel prefisso di una formula in forma prenessa.

Raccogliendo da Schröder il suggerimento di introdurre dei particolari indici, Löwenheim riesce ad eliminare quest'alternanza giungendo ad una formula in forma prenessa il cui prefisso è costituito da un blocco di quantificatori esistenziali, seguito da uno di quantificatori universali. Nell'articolo del 1920, *Logische-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit* *oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Menge*[35], Skolem evita di introdurre gli indici sfuggenti, sfruttando delle particolari funzioni e, come già riportato, *rafforza* notevolmente il risultato di Löwenheim; da un lato, infatti, dimostra il teorema non più soltanto per una singola formula del primo ordine, ma per insiemi numerabili di formule. Dall'altro lato, prova che se una formula (o un insieme numerabile di formule) del primo ordine è soddisfacibile in un dominio infinito D, allora è già soddisfacibile in un dominio tutt'al più numerabile D' incluso in D. Per far ciò, ha bisogno della scelta. Il rafforzamento è evidente: Skolem non trova un generico dominio numerabile per la formula (o l'insieme delle formule) di partenza; ne trova uno che *oltre* ad essere numerabile, è sottomodello di quello in cui si assume che sia soddisfatta la nostra (il nostro) formula (insieme di formule). Come già sottolineato nel primo paragrafo di questo capitolo, dall'esistenza di un sottomodello numerabile segue quella di un modello numerabile, ma non vale il viceversa.

Anche la dimostrazione del teorema di Löwenheim da parte di Skolem può essere divisa in due parti:[36]

(1) ogni formula ben formata del primo ordine ha la sua *forma normale di Skolem* (d'ora in poi f.n.S)
(2) se una formula del primo ordine in f.n.S è soddisfacibile in un dominio infinito, allora lo è già nel dominio dei numeri naturali; **oppure**, se una formula del primo ordine in f.n.S è soddisfacibile in un dominio infinito D rispetto ad una soluzione S, allora lo è già in un sottodominio *numerabile* $D' \subseteq D$ rispetto ad S', dove S' è la restrizione di S a D'.[37]

Il passo cruciale per noi è la dimostrazione di 1. Anzitutto, una formula del primo ordine è in f.n.S quando, in forma prenessa, appare nel modo seguente:

$$\forall x_1, \dots, x_n \exists y_1, \dots, y_m \alpha \tag{58}$$

[35] [**Skolem, 1920**]; traduzione inglese, *Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical propositions: A simplified proof of a theorem by L. Löwenheim and generalizations of the theorem*, in [**van Heijenoort, 1967**, pp. 252 – 263]. Noi ci limiteremo ad esporre i concetti fondamentali di quest'articolo, in quanto è in questo testo che Skolem presenta, fra le dimostrazioni del teorema di Löwenheim da lui svolte, quella più originale. In seguito, cercherà di rimanere più fedele allo spirito di Löwenheim, evitando l'uso dell'assioma di *scelta*.

[36] Come al solito, non svolgeremo la dimostrazione, rimandando il lettore interessato al testo di Skolem sopra citato, a [**Brady, 2000**, pp. 197 – 205] e a [**Mancosu et al., 2005**, pp. 56 – 58 della versione preprint].

[37] Si noti il rafforzamento sopra descritto del teorema di Löwenheim.

Dove α è la matrice priva di quantificatori. Ad essere sinceri, il prefisso di (58) è il contrario di quello di una formula in f.n.L; cioè, una formula in f.n.L è la duale di una in f.n.S, la prima riguardante la *validità*, la seconda la *soddisfacibilità*. Comunque, in entrambi i casi, tanto in Löwenheim quanto in Skolem, il prefisso è diviso in due blocchi *separati* di quantificatori: l'uno contenente *solo* quantificatori universali, l'altro *solo* quantificatori esistenziali.

4.1. La procedura di Skolem può essere così riassunta:[38]

(59) $$\forall x_1, \ldots, x_n \exists y \alpha$$

La (59) è vera in un dominio D, rispetto ad una soluzione S, sse per ogni n-pla di elementi $a_1, \ldots a_n \in D$ esiste un elemento $b \in D$ t.c.

(60) $$\alpha\begin{bmatrix} x_1,\ldots x_n, y \\ a_1,\ldots a_n, b \end{bmatrix} \quad \text{è vera in } D \text{ rispetto ad } S.$$

Sfruttando l'assioma di *scelta* di Zermelo, possiamo introdurre una funzione f_α che trasceglie tra tutti i $b \in D$ t.c. per ogni $a_1, \ldots a_n \in D$

(61) $$\alpha\begin{bmatrix} x_1,\ldots x_n, y \\ a_1,\ldots a_n, b \end{bmatrix}$$

è vera in D rispetto ad S un *determinato* elemento b_i. Cioè, per ogni n-pla di elementi $a_1, \ldots a_n \in D$,

(62) $$\alpha\begin{bmatrix} x_1,\ldots,x_n, & y \\ a_1,\ldots,a_n, & f_\alpha(a_1,\ldots a_n) \end{bmatrix}$$

è vera in D rispetto ad S. In altre parole, per ogni n-pla $a_1, \ldots, a_n \in D$ è *univocamente* determinato, in virtù di f_α, un b_i t.c.

(63) $$\alpha\begin{bmatrix} x_1,\ldots x_n, & y \\ a_1,\ldots a_n, & b_i \end{bmatrix}$$

è vera in D rispetto ad S. Dove $b_i = f_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$. Quindi, se

(64) $$\forall x_1, \ldots, x_n \exists y \alpha$$

è vera in D rispetto ad S, allora anche

(65) $$\forall x_1, \ldots, x_n \alpha[y/f_\alpha(x_1, \ldots, x_n)]$$

è vera in D rispetto ad S e viceversa.[39]
In questo modo, Skolem elimina i quantificatori esistenziali da una formula in forma prenessa, passando così da un prefisso

(66) $$\forall\exists$$

[38] Skolem utilizza il linguaggio schröderiano e ha che fare, quindi, con relazioni piuttosto che predicati.

[39] Per la dimostrazione di questo fatto, si veda [**Casari, 1997**, pp. 211 – 212].

ad uno

(67) $\forall$

Tali funzioni ci consentono, quindi, eliminando alcuni quantificatori esistenziali, di passare da un prefisso, per esempio,

(68) $\forall\exists\forall\exists$

ad uno

(69) $\forall\forall\exists$

Quello che fa qui Skolem è arricchire il linguaggio di nuovi simboli funzionali, tanti quanti sono necessari all'eliminazione dei quantificatori esistenziali; così, una formula α del primo ordine, scritta in un linguaggio $L(\alpha)$, è soddisfacibile sse lo è la sua f.n.S scritta in un linguaggio $L^f(\alpha)$ arricchito di questi nuovi simboli funzionali. A questo punto, Skolem può dimostrare il teorema di Löwenheim per formule in f.n.S.

Si noti come Skolem rimanga *fedele* alla logica del primo ordine; infatti, non quantifica esistenzialmente le funzioni f_α (*funzioni di Skolem*), bensì arricchisce *solamente* il linguaggio. Se si adottasse una lettura funzionale degli indici sfuggenti löwenheimiani, indipendentemente dalla sua correttezza storica, potremmo sostenere che Löwenheim passa al *secondo* ordine. Infatti, la tecnica usata da Löwenheim per spostare un quantificatore esistenziale davanti ad uno universale può essere così formulata:

(70) $\forall x \exists y R(x, y) \leftrightarrow \exists f \forall x R(x, f(x))$[40]

In questo modo, Löwenheim, *quantificando esistenzialmente* le f_i passa ad un ordine superiore.

4.1.1. C'è un'ulteriore sottolineatura. Prima s'era detto che il prefisso di una formula in f.n.L. ($\exists\forall$) era il rovescio di quello di una formula in f.n.S. ($\forall\exists$). Rimane da aggiungere che, se si tiene conto che Löwenheim, occupandosi della soddisfacibilità di una formula, elimina i quantificatori esistenziali dal suo prefisso, si può tranquillamente affermare che una formula in f.n.S. *coincide* con la *chiusura universale* di una in f.n.L.

[40] E' quello che fa van Heijenoort nell'introduzione alla versione inglese di *Über Möglichkeiten im Relativkalkül* in [**van Heijenoort, 1967**, p. 230] ed è quanto sostenuto dalla Geraldine Brady [**Brady, 2000**, p. 192].

4.2. Come più volte sottolineato, Skolem rafforza il teorema di Löwenheim, dimostrandone varie generalizzazioni, tra cui quella per insiemi numerabili di formule appartenenti al calcolo dei predicati:

> Se una proposizione è la congiunzione di un insieme *numerabile* di proposizioni del primo ordine, allora o è una contraddizione,[41] o è soddisfacibile già in un dominio numerabile.[42]

Da questo risultato si ottiene, come caso particolare, che se gli assiomi della teoria degli insiemi hanno un modello, allora ne hanno uno numerabile:

> Se il sistema di assiomi di Zermelo (...) è consistente,[43] allora è sempre possibile introdurre una sequenza infinita di simboli $1, 2, 3, \ldots$ in modo da formare un dominio D in cui tutti gli assiomi di Zermelo sono veri, purchè questi simboli siano opportunamente raggruppati in coppie della forma $a \in b$.[44]

In altre parole, se il sistema di assiomi fornito da Zermelo è soddisfacibile, allora lo è già nel dominio dei numeri naturali.

4.3. Qualè il senso del lavoro di Skolem? Per usare le sue parole:

> (...) [La] procedura [utilizzata da Löwenheim per spostare i quantificatori universali] è in un certo qual modo inutilmente complicata e necessita di introdurre (...) simboli che sono sotto-sottoscritti di relativi coefficienti [i.e. gli indici sfuggenti]. (...) Io voglio fornire una prova più semplice [del teorema di Löwenheim] in cui viene evitato l'uso di tali sotto-sottoscritti (...).[45]

Skolem sostiene di aver solo *semplificato* la dimostrazione di un risultato che già era stato ottenuto (il teorema di Löwenheim), usando l'assioma di scelta invece degli indici sfuggenti per dividere il prefisso quantificazionale di una formula in forma prenessa in due blocchi *disgiunti* di quantificatori.

---

[41] Si noti la lettura semantica del concetto di contraddizione. Per Skolem una proposizione è contradditoria quando non è soddisfacibile. Vedi, [**van Heijenoort, 1967**, pp. 252 – 253].

[42] [**van Heijenoort, 1967**, p. 260]. Le traduzioni da questo testo sono mie.

[43] Consistente, qui, equivale a soddisfacibile (non-contraddittorio = non-(non-soddisfacibile)).

[44] [**Skolem, 1923**]; traduzione inglese, *Some remarks on axiomated set theory* in [**van Heijenoort, 1967**, p. 295]. La traduzione è mia.

[45] [**van Heijenoort, 1967**, p. 254].

In realtà, Skolem introduce delle importanti generalizzazioni del teorema di Löwenheim. E' questo ad essere noto nella letteratura come *teorema di Löwenheim - Skolem all'ingiù*.

Come s'è visto, da un punto di vista moderno (a posteriori), quello che fa Skolem nell'articolo del 1920 è introdurre per la prima volta una classe importantissima di funzioni: quella costituita dalle funzioni f_α, oggi chiamate *funzioni di Skolem*. Tali funzioni rivestono un significato particolare, indipendentemente dal loro ruolo nella dimostrazione del teorema di Löwenheim-Skolem, permettendo di eliminare da una formula in forma prenessa i quantificatori esistenziali e le variabili a loro soggette, ottenendo una formula *equisoddisfacibile* a quella primitiva.

Dal punto di vista storico, invece, Skolem con il suo lavoro pone all'attenzione del mondo matematico l'articolo del 1915 di Löwenheim, ignorato completamente da tutti per essere rimasto all'interno della tradizione schröderiana. In questo modo, Skolem rilancia l'attualità di questa tradizione, mostrando come essa sia viva e permetta di ottenere risultati importanti come il teorema di Löwenheim-Skolem. Skolem non si limita ad un confronto della tradizione schröderiana con altre tradizioni, come aveva fatto Wiener nella sua tesi di dottorato[46] e come aveva fatto l'ultimo Schröder. Questo genere di confronti, non lo si può negare, ha un qualcosa di *morto* o museale, come il paragone tra due reperti.

I risultati di Löwenheim e Skolem, invece, giustificano, per così dire, dal di dentro, la teoria schröderiana a partire dai risultati ottenuti in essa. Detto meglio, ha senso l'utilizzo del linguaggio e della teoria schröderiani se permettono la derivazione di teoremi come quelli sotto esame. Oppure, se si preferisce, ha senso lavorare nella teoria dei relativi perché è una teoria viva le cui tematiche sono attualissime.

Certamente, né Löwenheim, né Skolem provarono i loro risultati per *pubblicizzare* la teoria dei relativi. Tuttavia, è innegabile che il loro lavoro possa essere letto anche da questo punto di vista: come uno dei risultati più importanti, ottenuti nel calcolo delle relazioni.

5. Tarski

Come abbiamo potuto vedere, l'eredità di Schröder si articola in due direttrici fondamentali: una riguardante il teorema di Löwenheim-Skolem,

[46] [**Wiener, 1913**].

l'altra la possibilità di sviluppare la matematica, o almeno una parte di essa, nel calcolo dei relativi. Nel primo caso, Schröder fornisce non solo la teoria all'interno della quale Löwenheim e Skolem provarono il loro celebre teorema, ma fornisce anche gli strumenti per dimostrarlo. Infatti, Löwenheim raccoglie proprio da Schröder il metodo per eliminare l'alternanza dei quantificatori nel prefisso di una formula in forma prenessa. E' vero che Skolem sostituisce al metodo schröderiano l'introduzione di una nuova classe di funzioni (le funzioni di Skolem), ma con l'idea di semplificare un lavoro svolto *schröderianamente*. Ovverosia, in ogni caso il personaggio di riferimento è sempre Schröder. E' per questo motivo che si è potuto affermare che il teorema di Löwenheim-Skolem rappresenta uno dei risultati più importanti ottenuti nel calcolo dei relativi schröderiano.

D'altra parte, come si ricorderà, e qui iniziamo a muoverci lungo la seconda direttrice, Schröder affermò anche che scopo *ultimo* e *fondamentale* del suo lavoro era quello di giungere alla definizione logica di *numerodi*.[47] Questa affermazione è stata intesa dalla storiografia come indice della volontà di Schröder di fondare l'aritmetica sul calcolo dei relativi:

> (...) Schröder mostra che la teoria dei relativi (...) è sufficiente per sviluppare la teoria dei numeri.[48]

Abbiamo avuto occasione, a suo tempo, di modulare meglio lo scopo *fondazionale* sotteso al calcolo dei relativi[49] e, quindi, non ci ritorneremo in questo contesto. Questa idea era stata ripresa da Löwenheim nell'articolo del 1915[50], ritornando sull'argomento in maniera pì diffusa nel successivo articolo del 1940.[51] Anche in questo caso, dunque, viene fatta propria la posizione di Schröder. D'altra parte, come sottolinea giustamente la Brady,

> L'idea di Peirce e Schröder che il calcolo dei relativi (...) possa costituire una fondazione completa per la matematica ricorrerà in seguito due volte nella storia della matematica. Prima Löwenheim affermerà che il calcolo dei relativi è tanto adatto per fondare la matematica quanto l'usuale teoria degli insiemi. Poi, in *A Formalization of Set Theory*

[47] [**Schröder, 1966**, p. 350].

[48] [**Brady, 2000**, p. 198].

[49] Vedi il paragrafo 4 del secondo capitolo.

[50] [**Löwenheim, 1915**, p. 463].

[51] [**Löwenheim, 1940**, pp. 1-15]. Abbiamo trattato la posizione di Löwenheim al proposito nel presente capitolo. Vedi il paragrafo 3.

> *without Variables*[52] Tarski e Givant scriveranno che un particolare calcolo dei relativi binari è adeguato a sviluppare tutta la matematica, senza far uso di variabili [individuali].[53]

5.1. Noi ci volgeremo ad esaminare brevemente la posizione di Tarski senza, però, scendere nel dettaglio dal punto di vista tecnico. Il primo contributo del logico polacco alla teoria schröderiana è contenuto in un articolo del 1941, dal titolo *On the Calculus of Relations*.[54] E' da sottolineare, anzitutto, il motivo che spinse Tarski a cimentarsi con il calcolo dei relativi; per usare le sue stesse parole:

> (...) il calcolo delle relazioni ha un fascino ed una bellezza intrinseci che lo rendono una fonte di piacere intellettuale per tutti coloro che lo conoscono.[55]

C'è quindi una motivazione affatto estetica dietro la scelta tarskiana di studiare il calcolo dei relativi e, ancora una volta, la memoria va a certe affermazioni di Löwenheim:

> Per più ragioni mi dispiace che ci sia allontanati dall'elegante calcolo di Peirce e Schröder (...). Sono, infatti, dell'opinione che tanto nella scienza quanto nella tecnica il mezzo più adatto allo scopo sia anche il più bello.[56]

Va anche detto che, malgrado Tarski riconosca giustamente Peirce come il creatore della teoria delle relazioni,[57] la sua simpatia va a Ernst Schröder come a colui che ha fornito *l'unico contributo veramente esaustivo nel calcolo delle relazioni*.[58] Qui, Tarski, pur riconoscendo a Peirce le sue geniali intuizioni, mette giustamente in luce come il contributo di Schröder non sia per nulla marginale. Egli non ha dimostrato *centinaia di teoremi puramente formali di nessuna importanza*.[59] Schröder compie un lavoro di sistemazione del calcolo dei relativi, disegnando una mappa dei suoi concetti. Oggi, in un periodo in cui la figura di Charles Sanders Peirce è ampiamente studiata ed anche di moda, Schröder può sembrare un personaggio opaco,

---

52 [**Tarski and Givant, 1987**].
53 [**Brady, 2000**, p. 159].
54 [**Tarski, 1941**].
55 [**Tarski, 1941**, p. 89]. Le traduzioni da questo testo sono mie.
56 [**Löwenheim, 1940**, p. 1].
57 [**Tarski, 1941**, p. 73].
58 [**Tarski, 1941**, p. 74].
59 Si tratta di una affermazione peirceana riportata da Roger Maddux in [**Maddux, 2001**, p. 7 della versione pre-print] (la traduzione è mia).

poco appariscente, lontano dalle intuizioni fulminee dell'americano. Semplicemente Schröder è lontano dal pragmatismo di Peirce. Ne avevamo già discusso a proposito del *problema della soluzione*, mostrando come questi pensatori divergessero sulle sue finalità.

5.1.1. Per chi vuole occuparsi della filosofia che impregna il calcolo delle relazioni lo studio di Peirce sembra più che adatto allo scopo, ma per chi desidera, invece, *lavorarci* dentro è necessario sapere anzitutto di cosa si stia parlando: gli elementi in gioco, i limiti, i pregi, ecc. Per questo fine risulta più necessario un lavoro esaustivo di sistemazione, come fece Ernst Schröder, che non le intuizioni geniali, ma *isolate*, di Peirce. Non è, quindi, un caso che Löwenheim, Skolem e Tarski facessero un riferimento quasi automatico alla teoria schröderiana: loro ci lavorarono dentro, non l'analizzarono dall'esterno. Né vanno dimenticate le ragioni estetiche che spinsero questi matematici allo studio del calcolo dei relativi schröderiano.

Schröder, a differenza di Peirce, ci mostra il piacere dello studio di uno strumento, indipendentemente dalle sue motivazioni pragmatiche. Può aver ragione Peirce a lamentarsi che i teoremi schröderiani sono formali, ma non per questo sono inutili. Lo sono se si adotta una visione pragmatista secondo la quale è l'importanza *specifica*, *epistemologica*, di un *determinato* enunciato a richiedere che venga dimostrato il suo status di teorema. Non tutto va dimostrato, quindi. Ma solo ciò che per ragioni extra-logiche ha una certa rilevanza; ancora una volta, è un preciso *contesto* scientifico a determinare l'importanza di un assunto e a richiedere che esso venga dimostrato, o confutato. Ma non è quello che aveva in mente Schröder: per questi bisognava, prima di tutto, valutare accuratamente la posta in gioco nel calcolo delle relazioni, delimitarne l'ambito, e metterne in luce le peculiari caratteristiche. Un lavoro da certosino, che se studiato con attenzione può aiutare a capire meglio le stesse intuizioni peirceane, perché le inquadra in un contesto; non in un contesto pragmatico come voleva l'americano, ma in quello di un calcolo dei relativi pienamente sistematizzato.

5.1.2. C'è anche un altro aspetto di Schröder che colpì Tarski: il fatto che nell'algebra delle relazioni, facendo uso di *concetti*, viene evitato il ricorso agli *individui*. Nel calcolo dei relativi, come nel calcolo booleano delle classi, l'individuo non è dato, ma *costruito*. Ciò che è dato è la *totalità*. E' a partire da questa che si definisce un individuo. Schröder, infatti, lo definisce nel calcolo delle classi semplicemente come ciò che non può stare a cavalcioni di due classi disgiunte:

> L'individuo, o il punto, non può stare a cavalcioni di due classi mutualmente disgiunte.[60]

Di questa particolare caratterizzazione del concetto di individuo, Schröder è debitore a Peirce, secondo il quale:

> (...) un individuo (...) è ben definito rispetto a qualsivoglia concepibile proprietà. Cioè, per ogni proprietà, un individuo o chiaramente la possiede, o non la possiede.[61]

Ora, tenuto conto che una proprietà nel calcolo delle classi schröderiano viene rappresentata da un dominio,

> (...) affermare che un individuo è tale che, per ogni proprietà, o la possiede o non la possiede, equivale a dire che, per ogni dominio, un individuo o è incluso in quel dominio, o nel suo complemento.[62]

L'idea che si possa evitare il ricorso agli individui, facendo uso solo di concetti, come si sa, non è un'idea nuova di Peirce o Schröder, ma risale ad Aristotele. Tuttavia, questo modo di fare logica venne ben presto abbandonato, in quanto ci si rese conto che non si poteva andare in là più di tanto. Bisognerà aspettare il calcolo delle relazioni per rilanciare la sua potenzialità. Infatti, sebbene questo calcolo per molti aspetti sia povero, è tuttavia sufficiente per definire in esso tutta la teoria degli insiemi. Tarski prima di avvicinarsi a Schröder, malgrado la vulgata lo voglia un platonista, forse condizionato da Lesniewski, non credeva affatto all'esistenza di qualcosa che potesse essere un individuo. Perciò, non poteva che trovare conforto in un algebra (quella dei relativi) in cui tali entità non facevano la loro comparsa.

Quando scelse di assiomatizzare la geometria euclidea nel 1929, assunse come ente primitivo quello di *corpo solido*, di *sfera*.[63] Qui viene sospesa la questione sugli individui, assumendo che essi siano un concetto *limite*, nel senso che se, detta grossolanamente, spezzettassimo all'infinito un corpo, ciò che otterremo sarebbe un punto, od un individuo. Nell'articolo in questione, Tarski definisce, infatti, il punto come la classe di equivalenza di tutte quelle sfere concentriche ad una data sfera. Abbiamo qui a che fare con una visione francamente *gestaltica*[64], in cui viene sospeso lo status

---

[60] [**Schröder, 1966**, p. 320]. Citato in [**Dipert, 1991a**, p. 156]. Le traduzioni da questo testo sono mie.

[61] [**Dipert, 1991a**, p. 156].

[62] [**Dipert, 1991a**, ivi].

[63] [**Tarski, 1929**], ora in [**Tarski, 1986**, pp. 225 – 231].

[64] Rimando ai capitoli 5 e 8 del mio *Aspetti della mereologia* ([**Bondoni, 2000**]) per una trattazione esaustiva di queste problematiche, rispettivamente in Schröder e Tarski.

ontologico degli individui - punti.

5.2. Queste le motivazioni dietro l'interesse tarskiano nei confronti di Schröder. Detto Questo, vediamo come si mosse Tarski nel 1941. Egli propone, in *On the Calculus of Relations*, due metodi per l'implementazione del calcolo dei Relativi. Nel primo caso, si prende il calcolo dei predicati con l'identità opportunamente assiomatizzato (dove a fianco delle variabili individuali troviamo anche delle variabili *relazionali*) e vi si aggiungono V^2, Λ^2, Id e Di; abbiamo sei operazioni, cioè, l'unione, la disgiunzione, il complemento, il prodotto e la somma peirceani e la conversa. Il calcolo delle relazioni è quel frammento della teoria così costruita in cui *non* compaiono variabili *individuali*. In questo modo, il calcolo dei relativi viene costruito come *parte* di una logica più comprensiva. Tarski lo chiama *teoria elementare delle relazioni*.

Un'altra possibilità è quella di costruire il calcolo, sempre in maniera deduttiva, a partire da degli assiomi (che sono teoremi nella teoria costruita con il metodo precedente) divisibili in tre gruppi: il primo caratterizza il significato delle operazioni *assolute* (congiunzione, disgiunzione e complemento) applicate alle relazioni; il secondo, quello delle costanti *assolute* (*non*-relative); il terzo, infine, quello di alcuni concetti sulle relazioni. Con questo metodo è possibile costruire il calcolo dei relativi usando solo variabili relazionali e senza quantificatori (su variabili individuali); i simboli logici, invece, sono gli stessi della teoria elementare delle relazioni. La parte del calcolo contenente solo costanti assolute costituisce un'*algebra di Boole*; in altre parole, Tarski costruisce il calcolo delle relazioni come un'espansione di un'algebra booleana, arricchita di costanti relazionali e delle tre operazioni relative di composizione, somma peirceana e conversa, ottendendo, così, un'*algebra relazionale*. Tarski osserva che il calcolo ottenuto con questo metodo è l'unione di un'algebra di Boole con la teoria dei gruppi, dato che la conversa corrisponde all'inversa e la composizione alla composizione tra gruppi:

> Risulta così che il calcolo delle relazioni include la teoria elementare dei gruppi ed è, per così dire, un'unione di un'algebra boolena con la teoria dei gruppi.[65]

Non solo; nel calcolo dei relativi sviluppato con il secondo metodo bastano due regole: quella di *separazione* e quella di *sostituzione*.

---

[65] [**Tarski, 1941**, p. 87].

5.2.1. Tarski prova, quindi, alcuni importanti teoremi, tra cui la legge di Schröder:

LEGGE DI SCHRÖDER. [66]

$$V^2 \circ R \circ V^2 = \begin{cases} V^2 \textit{ se } R \neq \Lambda^2 \\ \Lambda^2, \textit{ altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

$$\Lambda^2 \bullet R \bullet \Lambda^2 = \begin{cases} \Lambda^2 \textit{ se } R \neq V^2 \\ V^2, \textit{ altrimenti} \end{cases} \tag{2}$$

Questa legge, come in Schröder, implica che ogni enunciato del calcolo dei relativi possa essere espresso in forma equazionale:

> Ogni enunciato del calcolo delle relazioni può così essere trasformato in un enunciato equivalente della forma '$R = S$ ', o addirittura della forma '$R = V^2$ '.[67]

Sfruttando la legge di Schröder possiamo limitarci a quella parte del calcolo contenente solo enunciati della forma '$x = y$'; ovviamente, dopo aver tradotto anche gli assiomi in forma equazionale.

5.3. A questo punto sorge la questione: che rapporto c'è tra la teoria elementare delle relazioni e il calcolo delle relazioni? Purtroppo, benché ogni teorema ottenuto nel calcolo costruito con il secondo metodo sia teorema anche nel calcolo costruito con il primo metodo, non vale il viceversa. Questo perché non ogni enunciato della teoria elementare delle relazioni è esprimibile nel calcolo dei relativi. Questo segue da un risultato di Korselt riportato da Löwenheim in *Über Möglichkeiten im Relativkalkül* secondo il quale non ogni enunciato della teoria elementare delle relazioni è *condensabile*:[68]

> (...) Korselt, in una comunicazione epistolare, ha dimostrato (...) [l'esistenza di equazioni, o addirittura di enunciati del primo ordine (Zählaussagen) non condensabili].[69]

[66] [**Tarski, 1941**, ivi].

[67] [**Tarski, 1941**, ivi].

[68] Una formula è condensabile quando permette l'eliminazione delle variabili individuali e dei quantificatori ad esse connessi; per esempio, $R \circ S$ è la condensazione di $\exists z(\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in S)$. Schröder introduce questo concetto verso la fine del terzo volume delle *lezioni*:

Rimane ancora il compito di "*comprimere*" [verdichten], di "*condensare*" [condensiren] queste funzioni proposizionali, cioè di formularle come relativi costruiti a partire da $R, S, T, \ldots$, attraverso (...) [le sei operazioni del calcolo], inclusi $\exists$ e $\forall$ e indipendenti dai suffissi x, y ([**Schröder, 1966**, pp. 550 – 551]. Le traduzioni da questo testo sono mie.).

[69] [**Löwenheim, 1915**, p. 448].

5.3.1. La non condensabilità di ogni enunciato non è l'unico neo del calcolo dei relativi. Infatti, il risultato *negativo* di Church secondo il quale il *problema della decisione* nella teoria elementare delle relazioni è *irrisolubile*, cioè non si può decidere se un qualsiasi enunciato della teoria è o no teorema, si traduce nel calcolo dei relativi; anche in questo contesto il problema della decisione rimane irrisolubile.

5.4. A questo punto viene spontanea l'immagine del calcolo delle relazioni come quella di un calcolo forse affascinante, ma certo un po' debole. Non è così. Vediamo il perché. Tarski sarebbe tornato ad occuparsene nel suo ultimo lavoro con Steven Givant, completato appena prima della morte, dal titolo *A Formalization of Set Theory without Variables*. Qui ricorre per l'ennesima volta l'idea di fondare la matematica sul calcolo delle relazioni, facendo uso di formule condensate. L'espressione *senza variabili* nel titolo si riferisce appunto al fatto di poter sviluppare la matematica con espressioni relative condensate, che sappiamo non presentare né variabili (individuali), né quantificatori (su queste variabili). Gli autori dimostrano che il calcolo dei relativi costruito con il secondo metodo, senza variabili individuali e con la relazione $\in$ di appartenenza, pur avendo la capacità *espressiva* e *deduttiva* di un calcolo dei predicati con solo *tre* variabili individuali, è tuttavia sufficiente per formalizzare tanto la teoria degli insiemi, quanto quella dei numeri.

Che sia in grado di formalizzare la teoria dei numeri lo sapevamo già da Schröder che tradusse la teoria delle catene dedekindiana nel calcolo delle relazioni. Per quanto riguarda, invece, la teoria degli insiemi, Tarski e Givant dimostrano che vari sistemi assiomatici insiemistici sono formalizzabili nel calcolo dei relativi. Essi possono, quindi, esprimersi entusiasticamente riguardo al loro lavoro:

> [Il calcolo delle relazioni] (...) si prova essere adeguato per lo sviluppo di tutta la matematica classica.[70]

E più oltre,

> (...) in linea di principio, l'intera area di ricerca matematica può essere svolta all'interno di questo calcolo [i.e. il calcolo dei relativi con $\in$].[71]

Schizziamo brevemente il modo con cui Tarski e Givant dimostrano che tale calcolo è *equipotente* ad un sistema assiomatico per la teoria degli insiemi. Anzitutto, dati due sistemi formali S_1 e S_2, S_2 *estende* S_1 sse ogni enunciato appartenente a S_1 appartiene anche ad S_2 e sse se un enunciato

[70] [**Tarski and Givant, 1987**, p. xii]. Le traduzioni da questo testo sono mie.

[71] [**Tarski and Givant, 1987**, p. xvii].

è dimostrabile in S_1, allora lo è anche in S_2. Quindi, S_2 è un'estensione equipotente di S_1 sse:

(1) ad ogni enunciato in S_2 corrisponde un enunciato equivalente in S_1
(2) se un enunciato è dimostrabile in S_2, allora lo è anche in S_1

Infine, due sistemi sono equipotenti tra loro sse hanno un'estensione equipotente in comune. Bene, Tarski e Givant dimostrano che il calcolo dei relativi assiomatizzato da Tarski con l'appartenenza è equipotente ad un sistema assiomatico insiemistico, poiché ha un'estensione equipotente in comune con quest'ultimo.

Dato, poi, che il calcolo dei relativi preso in esame non contiene variabili individuali, si può allora sviluppare la teoria degli insiemi senza variabili, una volta tradotta in tale calcolo.

5.4.1. Tarski, così, fa sue tre idee fondamentali di Schröder:

(1) la possibilità di sviluppare la matematica (o almeno l'aritmetica) nel calcolo delle relazioni
(2) la possibilità di condensare ogni formula del calcolo dei relativi
(3) la possibilità di dare una forma equazionale al calcolo delle relazioni

Per quanto riguarda il punto 2, bisogna risalire alla disinvolta osservazione di Schröder, secondo la quale *ogni* enunciato del calcolo dei relativi sarebbe condensabile:

> [La condensazione] è in pratica *sempre* effettuabile (...).[72]

In realtà, come avrebbe mostrato Korselt, un semplice enunciato come quello esprimente l'esistenza di *quattro* individui diversi non è condensabile.[73] Eppure, nonostante queste limitazioni, Tarski raccoglie la sfida di implementare un calcolo dei relativi con solo formule condensate, spinto dalla bellezza e dall'eleganza di tale calcolo. Tali motivazioni estetiche non vanno sottaciute, anzi amplificate, poiché costituiscono la ragion d'essere del lascito schröderiano: il piacere puramente intellettuale di sistematizzare una teoria per benino, articolando ogni concetto in tutte le sue pieghe e in tutte le sue sfumature. E' ciò, insisto, che distingue l'approccio schröderiano da quello peirceano. In Schröder non vi sono motivazioni di carattere pragmatico od empirico dietro alla scelta di occuparsi di relazioni; anche l'idea di poter sviluppare con esse l'artimetica giunge dopo, una volta compiuto, almeno in parte, un lavoro di sistemazione che indichi i confini della

[72] [**Schröder, 1966**, p. 551].

[73] E' il teorema 1 di *Über Möglichkeiten im Relativkalkül* [**Löwenheim, 1915**, p. 448].

teoria. Dato il risultato fortemente negativo di Korselt possono essere state solo ragioni estetiche a motivare Tarski per oltre quarant'anni, cioè da *On the Calculus of Relations* fino alla *Formalization of Set Theory without Variables*.[74] Infatti, può suonare paradossale che un individuo si cimenti a studiare un calcolo sapendo fin dall'inizio che non solo non è sufficientemente espressivo come teorie concorrenti (la teoria elementare delle relazioni), ma, addirittura, eredita da queste alcuni elementi negativi come la non risolubilità del problema della decisione.[75]

Se a questo si aggiunge la circostanza che uno dei suoi apparenti punti di forza, cioè la possibilità di eliminare le variabili ed i quantificatori ad esse collegati, in realtà non lo è affatto, perché non ogni formula è condensabile (Korselt), viene da domandarsi quale sia il vantaggio, nonostante tutto questo, di lavorarci dentro. Al massimo se ne potrebbe fare l'oggetto di un'indagine storica; ma Tarski (e Givant) non fa così: sceglie di *usare* il calcolo delle relazioni per sviluppare la matematica *nonostante* sia molto povero espressivamente e deduttivamente e punta alla condensabilità *nonostante* i limiti imposti dal lavoro di Korselt. Perché? Qui possono intervenire solo delle motivazioni di carattere estetico: ha senso lavorare nel calcolo delle relazioni perché è *bello*. Dove *bello* ha qui una sfumatura pregna di significato. Ed anche perché, eliminando il ricorso ad entità dubbie quali gli individui, non poteva che emanare un senso di sicurezza.

Anche dell'idea di formulare equazionalmente il calcolo delle relazioni (punto 3) Tarski è debitore a Schröder. Quest'ultimo, infatti, introduce la legge che porta il suo nome appunto per trascrivere ogni formula del calcolo dei relativi come un'equazione. Tarski e Givant lo ammettono apertamente, scrivendo:

> Schröder sembra essere stato il primo a considerare la questione se ogni enunciato elementare sulle relazioni potesse essere espresso equazionalmente nel calcolo delle relazioni (...).[76]

La possibilità di formulare equazionalmente il calcolo dei relativi implica, poiché la matematica classica è sviluppabile in esso, che la questione se

[74] Ovviamente, non va dimenticato il rifiuto tarskiano degli individui. L'algebra delle relazioni, facendo a meno di essi, non poteva che incontrare il favore del logico polacco. Ma perché proprio a Schröder dovesse fare riferimento e non a Peirce che, in fin dei conti, rigettava allo stesso modo il concetto di individuo, forse solo delle ragioni estetiche lo possono spiegare.

[75] Fra l'altro, il calcolo delle relazioni risulta pure essere *semanticamente incompleto*.

[76] [**Tarski and Givant, 1987**, p. xv].

un enunciato matematico segua o no da degli assiomi possa essere ricondotta alla questione se un'equazione del calcolo dei relativi sia o no derivabile da un insieme di equazioni. Ancora una volta, è Schröder e *non* Peirce a suggerire a Tarski un possibile percorso.

6. Epilogo

In conclusione, quale fu l'eredità lasciata da Schröder? Come abbiamo visto, da un lato Schröder codifica teoria e strumenti che verranno adoperati successivamente da Löwenheim e Skolem nella dimostrazione del loro teorema. In questo modo, il teorema di Löwenheim-Skolem costiuisce una delle punte più alte del calcolo delle relazioni, gettando contemporaneamente le basi per una nuova teoria: la *teoria dei modelli*. Dall'altro lato, Schröder influenza teoreticamente la linea di ricerca sulle relazioni, partendo da Löwenheim e giungendo fino a Tarski e Givant. Ciò costituisce la parte del lascito informata da principii estetici, come l'eleganza e la bellezza, e si articola nella possibilità di sviluppare la matematica (o almeno l'aritmetica) nel calcolo delle relazioni, nel condensare ogni formula di tale calcolo e, infine, nel dare alla teoria delle relazioni una veste equazionale. Il tutto senza far ricorso al concetto di individuo.

Bibliografia

[Badesa, 2004] Badesa, C. (2004). *The Birth of Model Theory, Löwenheim's Theorem in the Frame of the Theory of Relatives*. Princeton University Press, Princeton and Oxford. translated by Micheal Maudslay.

[Bondoni, 2000] Bondoni, D. (1999 – 2000). Aspetti della mereologia. tesi di laurea non pubblicata, Università degli Studi di Milano.

[Bonfantini, 2003] Bonfantini, M., ed. (2003). *Charles Sanders Peirce, Opere*. Bompiani.

[Brady, 2000] Brady, G. (2000). *From Peirce to Skolem, A Neglected Chapter in the History of Logic*. Elsevier.

[Casari,] Casari, E. La matematica della verità. IV.

[Casari, 1997] Casari, E. (1997). *Introduzione alla Logica*. UTET Libreria.

[Dedekind, 1888] Dedekind, R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen?* Friedr. Vieweg & Sohn.

[Dipert, 1991a] Dipert, R. R. (1990 – 1991a). Individuals and extensional logic in Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik. *Mod. Logic*, 1:140 – 159.

[Dipert, 1991b] Dipert, R. R. (1990 – 1991b). The life and work of Ernst Schröder. *Mod. Logic*, 1:119 – 139.

[Fraenkel and Hillel, 1958] Fraenkel, A. A. and Hillel, J. B. (1958). *Foundations of Set Theory*. North Holland Publishing Company, Amsterdam.

[Grassmann, 1872] Grassmann, R. (1872). *Die Formenlehre oder Mathematik*.

[Grassmann, 1966] Grassmann, R. (1966). *Die Formenlehre oder Mathematik*. Georg Holms. mit einer Einführung von J. E. Hofmann.

[Hartshorne and Weiss, 1933] Hartshorne, C. and Weiss, P., editors (1933). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, volume 4, The Simplest Mathematics. Harvard University Press.

[Hartshorne and Weiss, 1960] Hartshorne, C. and Weiss, P., editors (1960). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, volume 3, Exact Logic, and vol. 4, The Simplest Mathematics. Belknap Press of Harvard University Press.

[Heath, 1966] Heath, P., editor (1966). *On The Syllogism and Other Logical Writings*. Routledge & Kegan Paul.

[Jónsson, 1991] Jónsson, B. (1991). The theory of binary relations. In *Algebraic Logic*. North-Holland Publishing Company.

[Lewis, 1969] Lewis, C. I. (1969). *A Survey of Symbolic Logic*. Dover Publications, Inc.

[Löwenheim, 1915] Löwenheim, L. (1915). Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Math. Ann.*, 76:447 – 470.

[Löwenheim, 1940] Löwenheim, L. (1940). Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkul. *J. of Symb. Logic*, 5:1 – 15.

[Maddux, 2001] Maddux, R. D. (2001). Relation algebras. Draft version: 7 May 2001.

[Mancosu et al., 2005] Mancosu, P., Zach, R., and Badesa, C. (2005). The Development of Mathematical Logic from Russell to Tarski: 1920 – 1935. In Haaparanta, L., editor, *Development of Modern Logic, A Philosophical and Historical Handbook*. Oxford University Press.

[Mangione e Bozzi, 1993] Mangione, C. e Bozzi, S. (1993). *Storia della Logica, da Boole ai nostri Giorni*. Garzanti.

[Moore, 1980] Moore, G. H. (1980). The historical interplay between mathematical logic and axiomatic set theory. *History of Philosophy and Logic*, 1:95 – 137.

[Moore, 1988] Moore, G. H. (1988). The emergence of first-order logic. In Aspray, W. and Kitcher, P., editors, *History and philosophy of modern mathematics*, pages 95 – 135. University of Minnesota Press, Minneapolis.

[Morgan, 1860] Morgan, A. D. (1860). On the Syllogism: iv, and on the Logic of Relations. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, pages 331 – 358.

[Peckhaus, 1991] Peckhaus, V. (1990/1991). Ernst Schröder und die pasigraphischen Systeme von Peano und Peirce. *Mod. Logic*, 1:34–35.

[Peckhaus, 2004] Peckhaus, V. (2004). Schröders Logic. In Gabbay, D. M. and Woods, J., editors, *Handbook of the History and Philosophy of Logic*, volume 3. Elsevier.

[Peirce, 1870] Peirce, C. S. (1870). Description of a Notation for the Logic of Relatives, resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole's Calculus of Logic. *Mem. of the Amer. Acad.*, pages 317–78.

[Peirce, 1897] Peirce, C. S. (1897). The Logic of Relatives. *The Monist*, pages 161 –217.

[Pratt,] Pratt, V. Origin of the Calculus of Binary Relations. Versione online.

[Schröder, 1873] Schröder, E. (1873). *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende*, volume 1. B. G. Teubner. Die siebene algebraischen Operationen.

[Schröder, 1874] Schröder, E. (1874). *Über die formalen Elemente des absoluten Algebra, zugleich als Beilage zum Programm des Pro - und Realgymnasium zu Baden-Baden für 1873/1874*. Schweizerbart'sche Buchdruckerei.

[Schröder, 1877a] Schröder, E. (1877a). *Der Operationskreis des Logikkalkuls*. Teubner.

[Schröder, 1877b] Schröder, E. (1877b). Note über den Operationskreis des Logikkalkuls. *Math. Ann.*, 12:481 – 484.

[Schröder, 1890] Schröder, E. (1890). *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Exakte Logik*, volume 1. B. G. Teubner.

[Schröder, 1891] Schröder, E. (1891). *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Exakte Logik*, volume 2, Erste Abteilung. B. G. Teubner.

[Schröder, 1895a] Schröder, E. (1895a). Note über die Algebra der binären Relative. *Math. Ann.*, pages 144 – 158.

[Schröder, 1895b] Schröder, E. (1895b). *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Exakte Logik*, volume 3, Algebra und Logik der Relative. B. G. Teubner.

[Schröder, 1898] Schröder, E. (1898). Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien. In *Verhandlungen des Ersten Internationaler Mathematischer-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897, Leipzig*. Teubner.

[Schröder, 1899] Schröder, E. (1899). On Pasigraphy. Its Present State and the Pasigraphic Movement in Italy. *The Monist*, pages 44 – 62, corrigenda, p. 320.

[Schröder, 1901] Schröder, E. (1901). Gross herzoglich Badischer Hofrat Dr. phil. Ernst Schröder ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Karlsruhe i. Baden. In *Geistiges Deutschland - Deutsche Zeitgenossen auf dem Gebiete der Literatur, Wissenschaften und Musik*. Berlin-Charlottenburg.

[Schröder, 1966] Schröder, E. (1966). *Der Operationskreis des Logikkalkuls*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

[Schröder, 1966] Schröder, E. (1966). *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Exakte Logik*, volume 2. Chelsea Publishing Company. Herausgegeben im Auftrag der deutschen Mathematiker - Vereinigung von Dr. Eugen Müller.

[Schröder, 1966] Schröder, E. (1966). *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Exakte Logik*, volume 1. Chelsea Publishing Company.

[Schröder, 1966] Schröder, E. (1966). *Vorlesungen über die Algebra der Logik, Exakte Logik*, volume 3, Algebra und Logik der Relative. Chelsea Publishing Company.

[Skolem, 1920] Skolem, T. (1920). Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. *Videnskaps. skrift., I. Matem.-natur. klasse*, 4.

[Skolem, 1923] Skolem, T. (1923). Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. In *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4 - 7 Juli 1922, Den femte skandinaviska matematikerkongressen*. Redogörelse, Akademiska Bokhandeln, Helsinki.

[Stjažkin, 1980] Stjažkin, N. I. (1980). *Storia della logica, La formazione delle idee della logica matematica*. Editori Riuniti. Edizione italiana a cura di Roberto Cordeschi.

[Tarski, 1929] Tarski, A. (1929). Les Fondaments de la Geométrie des Corps.

[Tarski, 1941] Tarski, A. (1941). On the Calculus of Relations. *The Jour. of Symb. Logic*, 6(3):73–89.

[Tarski, 1986] Tarski, A. (1986). *Collected Papers*. Birkäuser, Basel/Boston/Stuttgart.

[Tarski and Givant, 1987] Tarski, A. and Givant, S. (1987). *A Formalization of Set Theory without Variables*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[Thiel, 1975] Thiel, C. (1975). Leben und Werk Leopold Löwenheims (1878 - 1957). *Jahres. der D. Math. Verein.*, 77:1 – 9.

[Thiel, 1977] Thiel, C. (1977). Leopold Löwenheim: Life, work, and early influence. In Gandy, R. and Hyland, M., editors, *Logic Colloquium*, volume 76, pages 235–252. North-Holland Publishing Company, Amsterdam - New York - Oxford.

[van Heijenoort, 1967] van Heijenoort, J. (1967). *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879 - 1931*. Harvard University Press.

[Vaught, 1974] Vaught, R. L. (1974). Model theory before 1945. In L.Henkin, Addison, J., Chang, C. C., Scott, D., and Vaught, R. L., editors, *Proceedings of the Tarski Symposium*, volume 254 of *Proceedings of symposia in pure mathematics*, Providence. American Mathematical Society.

[Wiener, 1913] Wiener, N. (1913). *A comparison between the treatment of the algebra of relatives by Schröder and that by Whitehead and Russell*. PhD thesis, Harvard University.